

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК:531

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45

<https://elibrary.ru/QOWZIC>



**Математическая модель механического взаимодействия  
тел нанометрового масштаба**

**Роман Игоревич Изюмов<sup>1</sup>, Александр Львович Свистков<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>1</sup>[izumov@icmm.ru](mailto:izumov@icmm.ru)

<sup>2</sup>[svistkov@icmm.ru](mailto:svistkov@icmm.ru)

**Аннотация.** Атомно-силовая микроскопия (АСМ) базируется на регистрации взаимодействия зонда АСМ с образцом. Для интерпретации экспериментальных данных разработана новая математическая модель. Актуальность работы вызвана необходимостью корректного учета эффектов, которые возникают при взаимодействии тел на наноуровне в условиях больших деформаций. Стандартные модели являются развитием модели Герца, предпосылки которой далеко не всегда являются корректными для конкретных случаев. В новой модели учитывается криволинейность границы контакта зонда с материалом. Также в процессе построения модели было принято во внимание исчезновение и появление новых нелинейных поверхностей контакта и соответствующее изменение энергии поверхностного натяжения, что играет важную роль при индентировании мягких материалов (полимеры, биологические ткани). По результатам апробации разработанной модели на экспериментальных данных наноиндентации было показано ее способность с высокой точностью описывать сопровождающие контакт и процесс внедрения эффекты: скачкообразное втягивание зонда в образец под действием поверхностных эффектов, прилипание зонда при его извлечении из образца и момент отрыва зонда от образца. Проведено сравнение полученной модели с результатами, которые дают стандартные модели ДМТ и ДжКР. Оно показало большую гибкость новой модели, ее способность более точно описывать экспериментальные данные.

**Ключевые слова:** атомно-силовая микроскопия; поверхностное натяжение; модель

**Для цитирования:** Изюмов Р.И., Свистков А.Л. Математическая модель механического взаимодействия тел нанометрового масштаба // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 35-45. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45. <https://elibrary.ru/QOWZIC>.

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственной темы (рег. номер АААА-А20-120022590044-7).

*Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 30.11.2024; принята к публикации 09.12.2024.*



Эта работа © 2024 Изюмов Р.И., Свистков А.Л. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

**Nanometer-scale Bodies Mechanical Interaction  
Mathematical Model**

**Roman. I. Iziyomov<sup>1</sup>, Alexander. L. Svistkov<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS, Perm, Russia

<sup>1</sup>izumov@icmm.ru

<sup>2</sup>svistkov@icmm.ru

**Abstract.** Atomic force microscopy (AFM) is based on registration of the interaction of the AFM probe with the sample. A new mathematical model has been developed for the interpretation of experimental data. The relevance of the work is caused by the need to correctly account for the effects that arise in the interaction of bodies at the nanoscale under conditions of large deformations. Standard models (Deryagin-Muller-Toporov (DMT), Johnson-Kendall-Roberts (JKR), etc.) represent a modification of the Hertz model, whose assumptions are not always correct for specific cases. The new model takes into account the curvilinearity of the interface between the probe and the material. Also in the process of model construction the disappearance and appearance of new nonlinear contact surfaces and the corresponding change of surface tension energy were taken into account, which plays an important role in indentation of soft materials (polymers, biological tissues). The results of testing the developed model on experimental data of nanoindentation showed its ability to describe with high accuracy the effects accompanying the contact and the indentation process: a jump-like retraction of the probe into the sample under the influence of surface effects, sticking of the probe at its removal from the sample, and the moment of probe detachment from the sample. A comparison of the obtained model with the results given by the standard DMT and JKR models was carried out. It has demonstrated the greater flexibility of the new model and its ability to describe the experimental data more accurately.

**Keywords:** *atomic force microscopy; surface tension; model*

**For citation:** Izyumov, R. I., Svistkov, A. L. (2024), "Nanometer-scale Bodies Mechanical Interaction Mathematical Model", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67)), pp. 35-45. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45. <https://elibrary.ru/QOWZIC>.

**Acknowledgments:** This work was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. AAAA-A20-120022590044-7).

*The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 30.11.2024; accepted for publication 09.12.2024.*

**Введение**

Атомно-силовая микроскопия позволяет получать трехмерные данные о рельефе поверхности образца и регистрировать силовые взаимодействия зонда с материалом на нанометровом масштабе. Интерпретация полученных результатов базируется на математических и конечно-элементных моделях взаимодействия зонда АСМ с образцом.

Математические модели, нашедшие широкое распространение в научной и инженерной среде, такие как ДМТ, ДжКР и др. [1–5], являются развитием модели Герца [6].

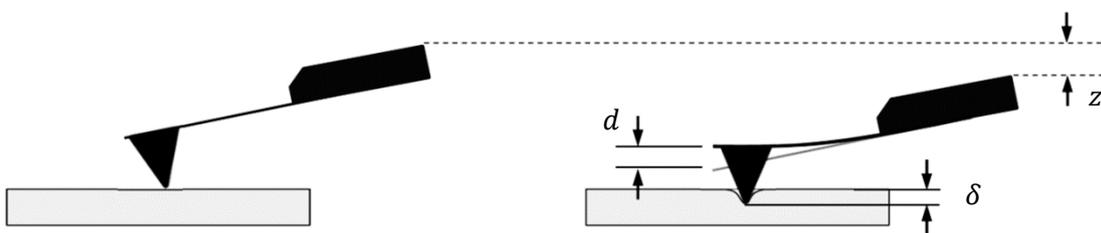
Современными последователями стали авторы таких работ как [7–11]. Создание узконаправленных моделей вызвано очень широким спектром всевозможных факторов, которые невозможно описать некоторой универсальной моделью (в том смысле, что эта модель становится неподъемной для современного уровня развития вычислительных ресурсов).

Поскольку в конкретных условиях чаще всего выделяется какой-то один фактор, то разумнее создавать модель с учетом особенностей только исследуемого объекта.

Примером могут быть: неоднородность материала [12], описание уменьшающегося контакта [13]. Некоторыми исследователями предпринимается попытка учесть такие явления как относительные сдвиги [14], капиллярные эффекты [15]. Существует множество работ, в которых показано существенное влияние поверхностного натяжения при взаимодействии объектов нанометрового масштаба [16–19]. В нашей работе этому явлению уделено внимание в контексте взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с поверхностью полимерных образцов. Также показана несостоятельность некоторых допущений, которые применяются в Герц-подобных моделях.

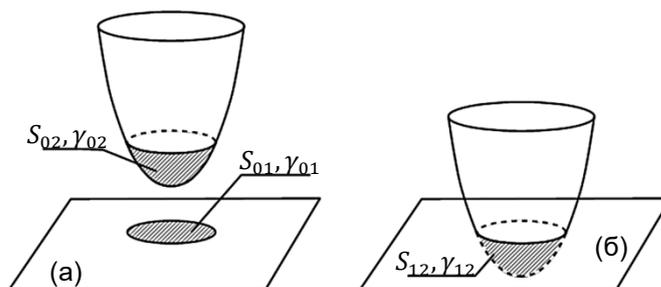
## 1. Постановка задачи

В процессе проведения экспериментов на атомно-силовом микроскопе взаимодействие зонда АСМ с образцом регистрируется путем измерения отклонения от равновесного положения балки кантилевера, на конце которой расположен зонд в виде конусообразной иглы (рис. 1). От того, как будет расшифрована зависимость изгиба кантилевера от положения зонда, будет зависеть достоверность информация о свойствах образца.



**Рис. 1.** Взаимодействие зонда АСМ с образцом сопровождается: перемещением основания кантилевера  $z$ , изгибом балки кантилевера  $d$ , и внедрением зонда в образец  $\delta$

Рассмотрим изменение состояния системы зонд-образец при возникновении контакта между ними (рис. 2).



**Рис. 2.** Система зонд-образец до и после внедрения.

В состоянии до контакта (а) отмечены цветом те участки образца (01) и зонда (02), которые при внедрении (б), образуют общую поверхность контакта (12)

Поверхность контакта – это геометрическое положение точек тела, с определенной плотностью энергии, которая зависит от среды, с которой контактируют эти точки тела. Поэтому одну и ту же геометрическую поверхность в условиях контакта с разными средами корректно обозначать разными символами.

Опишем появление контакта в терминах поверхностной энергии. Состояние системы до контакта (а) будет иметь следующие характеристики:

Поверхность 01: площадь  $S_{01}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{01}$ .  $U_{01} = \gamma_{01}S_{01}$ .

Поверхность 02: площадь  $S_{02}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{02}$ .  $U_{02} = \gamma_{02}S_{02}$ .

В состоянии контакта (б):

Поверхность 12: площадь  $S_{12}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{12}$ .  $U_{12} = \gamma_{12}S_{12}$ .

Переход из состояния (а) в (б) сопровождается исчезновением поверхностей контакта 01 и 02 появлением поверхности 12. В свою очередь происходит изменение поверхностной энергии. Разницу между энергией в конечном состоянии и начальном обозначим как  $U_s$ :

$$U_s = U_{12} - (U_{01} + U_{02}). \quad (1)$$

Определим площадь поверхности для конкретной формы параболического зонда, которую в осесимметричной постановке можно описать формулой  $H(r) = r^2/(2R)$ , где  $R$  – радиус кривизны в вершине параболоида.

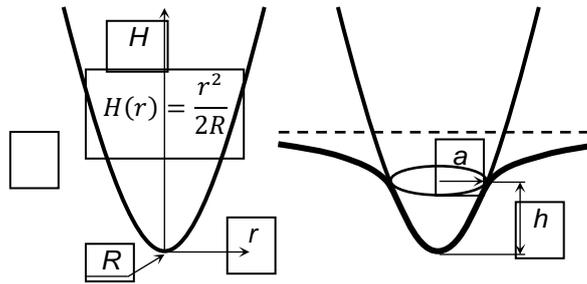


Рис. 3. Геометрия контакта:  $h$  – его высота,  $a$  – его радиус на высоте  $h$

Для представленной на рис. 3 геометрии выполняется следующее соотношение:  $a^2 = 2Rh$ . Тогда соотношения для поверхностной энергии будут иметь вид:

$$U_{01} = \pi a^2 \gamma_{01} = 2\pi \gamma_{01} R h, \quad (2)$$

$$U_{02} = 2\pi \gamma_{02} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right) / 3R, \quad (3)$$

$$U_{12} = 2\pi \gamma_{12} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right) / 3R, \quad (4)$$

$$U_s = -2\pi \gamma_{01} R h - \frac{2\pi(\gamma_{02} - \gamma_{12})}{3R} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right). \quad (5)$$

Изменение поверхностной энергии в результате увеличения контакта, который определяется его высотой  $h$ , вызывает появление силы  $F_s = \frac{\partial U_s}{\partial h}$ :

$$F_s = -2\pi \gamma_{01} R - 2\pi(\gamma_{02} - \gamma_{12}) (2hR + R^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Полная энергия системы является суммой следующих энергий:

$$U = U_m + U_s + U_c, \quad (7)$$

где  $U_s$  – изменение поверхностной энергии,  $U_m$  – упругая энергия деформирования образца,  $U_c$  – энергия, накопленная кантилевером или работа вдавливающей силы, которая передается на зонд от кантилевера.

Состояние равновесия описывается формулой  $\frac{\partial U}{\partial h} = 0$  или:

$$F_c + F_m + F_s = 0, \quad (8)$$

где  $F_s$  – поверхностная сила, которая стремится сблизить зонд и поверхность образца. Она тянет зонд в сторону образца, вниз, при этом поверхность образца тянется к зонду, вверх.  $F_m$  – реакция образца на внедрение, действующая противоположно направлению внедрения. Дальнейшие выкладки будут проводиться в рамках малых деформаций. Это позволит провести корректное сравнение со стандартными моделями. Однако представленные рассуждения можно обобщить на общий случай конечных деформаций неоднородного материала с включениями с применением метода конечно-элементного моделирования.

Рассмотрим систему зонд-образец и действующие в этой системе силы (рис. 4).

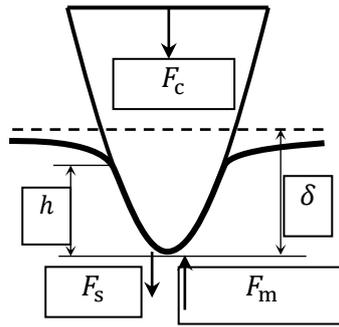


Рис. 4. Состояние системы зонд-образец в присутствии поверхностных сил

В таком виде (рис. 4) мы не можем определить положение зонда  $\delta$ , так как в системе, где присутствуют поверхностные силы, не выполняется соотношение  $h = \delta/2$ , установленное для случая индентирования параболическим зондом без этих сил [5], а именно:  $h > \delta/2$ .

Основной проблемой прямого решения с приложением всех сил в этом случае является то, что расчет поверхностной силы по вычисленной поверхности контакта и добавление ее в систему приводит к еще большему внедрению и увеличению поверхности контакта, а, значит, и не соответствию между размером этой поверхности и рассчитанной силой. Предлагается обойти проблему изменения размера контакта следующим приемом. На рис. 5 представлена схема поэтапного приложения сил к системе зонд-образец, которая приводит в состояние, аналогичное тому, которое представлено на рис. 4.

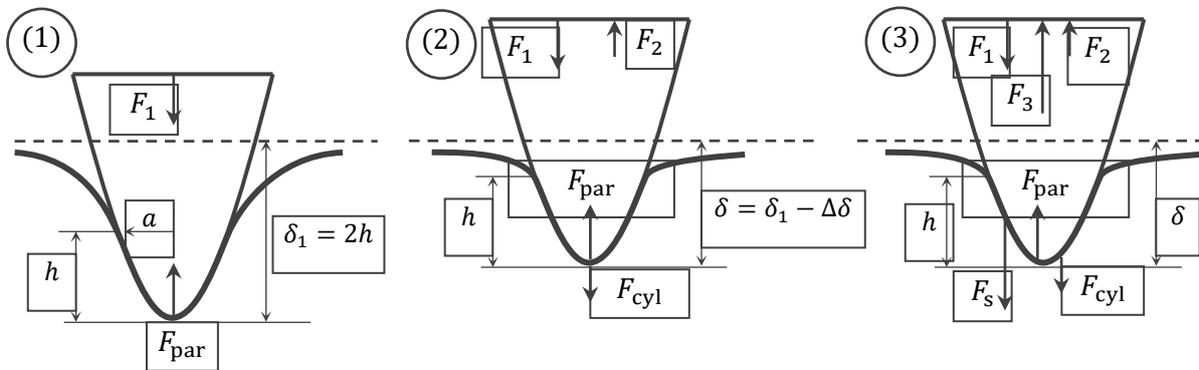


Рис. 5. Поэтапное приложение сил к системе зонд-образец

(1) Вначале зонд нагружается силой  $F_1$ . Зонд внедрится на глубину  $\delta_1$ , что вызовет реакцию материала образца, которая описывается формулой Герца для парабоида (решение Снеддона [5]):

$$F_{\text{par}} = E_* R^{1/2} \delta_1^{3/2}, \quad (9)$$

где  $E_* = 4/3 \cdot E/(1 - \nu^2)$ ,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\nu = 0.5$ . При этом образуется контакт высотой  $h$  и выполняется соотношение  $h = \delta_1/2$  (показано в той же работе [5]).

(2) Далее приложим силу  $F_2$ , которая поднимет зонд на величину  $\Delta\delta$ . Примем, что в области контакта произошло прилипание образца к зонду.

В работе [3] было показано, что подъем парабоида с прилипанием аналогичен задаче о подъеме цилиндрического штампа с радиусом основания  $a$  равным радиусу

контакта в точке  $h$ , которая, в свою очередь, была решена Буссинеском. Реакция материала на подъем зонда:

$$F_{\text{cyl}}(\Delta\delta) = 1.5E_*a\Delta\delta. \quad (10)$$

Новое положение зонда обозначим  $\delta = \delta_1 - \Delta\delta$ . Это положение произвольное, зависящее от произвольной силы  $F_2$ , что будет использоваться на третьем этапе.

Важно отметить, что теперь материал около точки контакта трех сред имеет растягивающую компоненту в общем напряженном состоянии, которое является результатом реакции на внедрение и подъем зонда.

(3) Теперь приложим поверхностную силу  $F_s$ , рассчитанную для контакта высотой  $h$ . Чтобы не произошло смещения зонда, приложим к нему противоположную силу  $F_3$ . В этом случае действие поверхностной силы  $F_s$  будет стремиться увеличивать контакт через подъем поверхности образца к зонду. Однако это действие компенсируется реакцией материала  $F_{\text{cyl}}$  на приложенную ранее силу  $F_2$  и предварительно напряженным состоянием материала около контакта. Так как сила  $F_{\text{cyl}}$  была произвольной на втором шаге, то она может быть задана в том числе и такой, чтобы выполнялось условие: сила  $F_{\text{cyl}}$  должна вызывать такое состояние в материале, чтобы оно полностью компенсировало действие поверхностной силы  $F_s$ . Это значит, что высота контакта сохранится равной  $h$ .

По итогу было получено то же состояние системы зонд-образец, что и представленное на рис. 4. Однако во второй схеме в системе действуют другие, более удобные для вычисления силы.

Остается определить неизвестную величину  $\Delta\delta$ . По своей физической сути величина  $\Delta\delta$  определяет, насколько будут отличаться глубины индентирования при наличии и при отсутствии поверхностных сил в системе. Поэтому для определения  $\Delta\delta$  рассмотрим следующую вспомогательную задачу (рис. 6).

### Вспомогательная задача для определения $\Delta\delta$

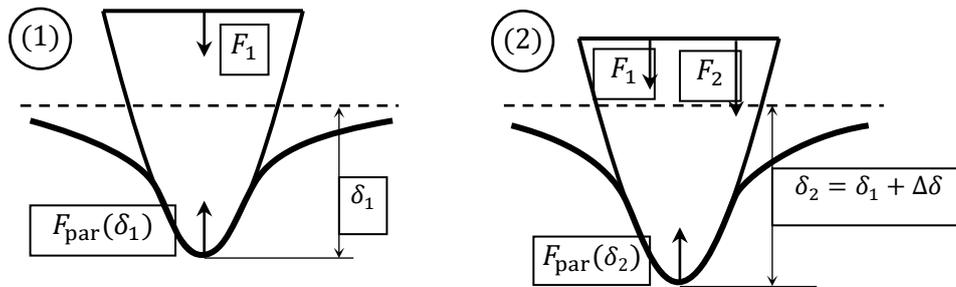


Рис. 6. Вспомогательная схема приложения сил к системе зонд-образец

**ШАГ 1.** Внедрение на глубину  $\delta_1$  силой  $F_1$ . Поверхностные силы отсутствуют.

Упругая реакция образца:

$$F_{\text{par}}(\delta_1) = E_*R^{1/2}\delta_1^{3/2}, \quad h = \delta_1/2, \quad a = \sqrt{\delta_1 R}. \quad (11)$$

Равновесие описывается уравнением:

$$F_1 + F_{\text{par}}(\delta_1) = 0. \quad (12)$$

В абсолютных значениях:

$$-|F_1| + |F_{\text{par}}(\delta_1)| = 0. \quad (13)$$

Из этого уравнения можно определить  $F_1$  по заданному значению  $\delta_1$  и  $F_s$  по вычисленному  $h$ . Используя уравнение (6), рассчитаем  $F_s$  для данной величины контакта:

$$F_s = 2\pi\gamma_1 R + 2\pi(\gamma_2 - \gamma_{12})(2hR + R^2)^{1/2}. \quad (14)$$

**ШАГ 2.** Приложим силу к зонду силу  $F_2$ , равную по значению силе  $F_s$ . Зонд опустится на глубину  $\delta_2$ . Упругая реакция образца:

$$F_{\text{par}}(\delta_2) = E_* R^{1/2} \delta_2^{3/2}. \quad (15)$$

Равновесие описывается уравнением:

$$F_1 + F_2 + F_{\text{par}}(\delta_2) = 0. \quad (16)$$

В абсолютных значениях:

$$-|F_1| - |F_2| + |F_{\text{par}}(\delta_2)| = 0. \quad (17)$$

Или, учитывая уравнение (13), полученное на первом шаге:

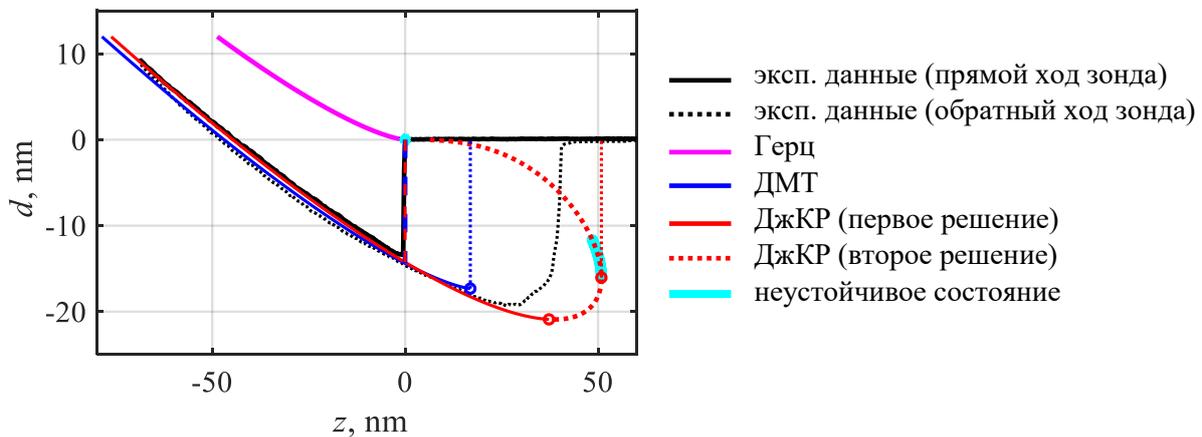
$$-|F_{\text{par}}(\delta_1)| - |F_s| + |F_{\text{par}}(\delta_2)| = 0. \quad (18)$$

Из полученного соотношения с учетом (11, 14 и 15) можно определить  $\delta_2$ , а, следовательно, и дополнительное перемещение зонда:  $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ .

## 2. Сравнение полученных результатов со стандартными моделями

Для верификации модели были использованы экспериментальные данные по индентированию ненаполненного бутадиен-стирольного каучука. Использовались кантилеверы CSG-30 (производитель TipsNano, Estonia). Радиус закругления в вершине зонда составляет  $R = 10$  нм. Жесткость балки кантилевера  $k = 0.417$  Н/м.

На рис. 7 представлены результаты применения стандартных моделей ДМТ и ДжКР для описания полученных экспериментальных данных процесса индентирования (рис. 7, черная линия). Результаты представлены в виде зависимостей изгиба кантилевера от перемещения его основания  $d(z)$ . Для определения изгиба использовалось соотношение:  $F = kd$ .



**Рис. 7.** Экспериментальные данные: зависимость изгиба кантилевера  $d$  от перемещения зонда  $z$ . Решения задачи индентирования по модели Герца, ДМТ и ДжКР

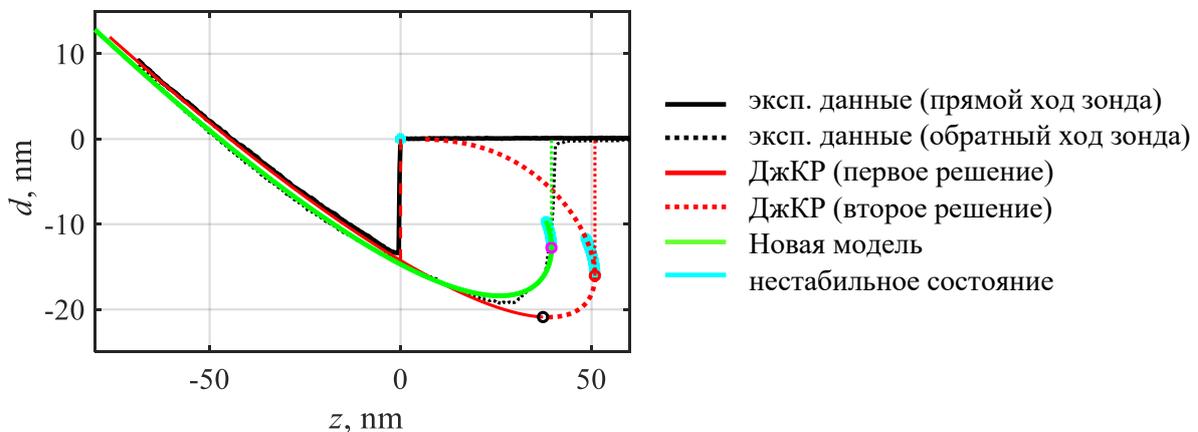
Используются понятия *прямой и обратный ход зонда*, обозначающие, соответственно, сближение зонда с образцом с последующим внедрением (сплошная линия) и извлечение зонда из образца с подъемом в начальное положение (пунктирная линия). Модель Герца представлена для наглядной демонстрации качественного отличия моделей, но очевидно, что она не способна описать скачок зонда в материал в момент его касания.

В модели ДМТ поверхность контакта является плоской, из-за чего поверхностная сила является константой. Это приводит к тому, что извлечение завершается резким отрывом, при достижении некоторого силового критерия (рис. 7, синяя пунктирная линия).

В работе [3] показано, что математическая постановка задачи по модели ДжКР дает два решения. Было доказано, что одно из них является неустойчивым. На рис. 7 показано, что с помощью второго решения можно описать более точно обратный ход зонда до момента, когда это решение не становится математически неоднозначным (для одного положения зонда определены два возможных значения изгиба). Однако подбор параметров модели не позволяет одинаково хорошо описать и процесс внедрения (мы брали эту часть кривой в приоритет при аппроксимации), и процесс извлечения зонда.

В нашей модели мы учли изменение поверхностей контакта в процессе внедрения жесткого зонда в мягкий материал образца. Таким образом, поверхность контакта – это поверхность параболоида. Кроме того, мы приняли во внимание, что до контакта поверхность, относящаяся к образцу, была кругом в недеформированном состоянии.

На рис. 8 показано сравнение возможностей новой модели с ДжКР. При достаточно хорошем описании этапа прямого хода зонда, модель гораздо лучше справляется с описанием обратного хода. Это вызвано большим числом варьируемых параметров – по сравнению с ДжКР имеется не одно значение плотности поверхностной энергии, а две (на рис. 2 указано три значения, однако энергия на поверхности 12 определяется по формуле  $\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$  [20] и не является варьируемым параметром).



**Рис. 8.** Экспериментальные данные: зависимость изгиба кантилевера  $d$  от перемещения зонда  $z$ . В новой модели использовано решение задачи с малыми деформациями, но с точным учетом изменения поверхностной энергии

Поскольку силовые кривые разных моделей имеют существенное отличие только при описании процесса извлечения, то для их оценки приведем сравнение параметров расчетных силовых кривых от параметров экспериментальной силовой кривой в момент отрыва зонда от поверхности образца (табл. 1).

Точка отрыва в эксперименте:  $z = 39.3$  нм,  $\delta = -27.6$  нм,  $F = -4.87$  нН. Положение зонда  $\delta$  определяется с помощью следующего соотношения:  $\delta = -z - d$ .

**Таблица 1.** Отклонение расчетных параметров от экспериментальных в точке отрыва зонда от поверхности образца

	$\Delta z$ , нм	$\Delta \delta$ , нм	$\Delta F$ , нН
ДМТ	22.4	28.0	2.3
ДжКР	11.6	7.2	1.8
Новая модель	0.2	0.9	0.4

Для описания эксперимента установлены следующие параметры (табл. 2).

**Таблица 2.** Параметры моделей

Модель	Модуль упругости $E$ , МПа	Плотность поверхностной энергии $\gamma$ , Н/м
Герц	4	-
ДМТ	4	$\gamma_{12} = 0.115$
ДжКР	4	$\gamma_{12} = 0.185$
Новая модель	4.7	$\gamma_1 = 0.029$ , $\gamma_2 = 0.084$ , $\gamma_{12} = 0.049$

Мы получили завышенное по сравнению со стандартными моделями значение модуля упругости. Это можно объяснить тем, что новая модель вычисляет поверхностную силу на большей поверхности контакта, нежели сравниваемые модели, что создает большую втягивающую силу. Это значит, что при одной и той же внешней силе внедрения наши расчеты при одинаковых параметрах моделей будут давать большую глубину внедрения. Чтобы откорректировать (уменьшить) глубину внедрения, необходимо повысить модельный параметр модуль упругости. Это вызовет большую реакцию материала, а итоговый расчет (кривая индентирования) по новой модели даст схожие с другими моделями результаты.

## Заключение

Было проведено теоретическое обоснование необходимости точного учета явлений, связанных с появлением криволинейной границы контакта зонда с материалом. При разработке новой модели было принято во внимание изменение поверхностей контакта и соответствующее изменение поверхностной энергии. Предложен математический прием, позволяющий корректно учесть действие поверхностных сил.

Модель использует больше варьируемых параметров, что дает ей большую гибкость при аппроксимации экспериментальных данных по сравнению со стандартными моделями ДМТ и ДжКР. За счет этого она способна более точно описывать эксперимент и давать более достоверные данные о свойствах материала образца.

Разработанная модель может быть представлена в простой аналитической форме, не требующей применения приближенных методов расчета. Математическая модель может быть обобщена на случай конечных деформаций, а также применяться в сочетании с конечно-элементной моделью, что позволит анализировать свойства и структуру неоднородного материала, материала, покрытого слоем другого материала, материала с твердыми частицами наполнителя.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Derjaguin B.V., Muller V.M. and Toporov Y.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Col Interface Sci* 53(2), 314–26 (1975).
2. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1998. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31, 3279–3290.
3. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. A* 324 (1558) (1971) 301–313.
4. Maugis D. Adhesion of spheres. The JKR-DMT transition using a Dugdale model, 1992, *J. Col and Interface Sci.* Vol. 150. № 1, 243–269.
5. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, 1965, *Int. J. of Eng. Sci.* Vol. 3, P. 47–57.
6. Hertz H., 1881. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.* 92, 156–171.
7. Muller V.M., Yushenko V.S., Derjaguin, B.V. 1980. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid contact. *J. Colloid Interface Sci.* 77, 91–101.
8. Greenwood J.A., Johnson K.L. 1981. The mechanics of adhesion of viscoelastic solids. *Philo. Mag.* 43, 697–711.
9. Kim K.S., McMeeking R.M., Johnson K.L., 1998. Adhesion, slip cohesive zone and energy fluxes for elastic spheres in contact. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 243–266.
10. Morrow C., Lovell M., Ning X. 2003. A JKR-DMT transition solution for adhesive rough surface contact. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 36, 534–540.
11. Chen S., Yan C., Zhang P., Gao H. Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space. *J. of the Mech and Physics of Solids* 57 (2009), 1437–1448.
12. Zhang X., Wang Q. J., Wang Y., Wang Z., Shen H., Liu J. Contact involving a functionally graded elastic thin film and considering surface effects. *Int. J. of Solids and Structures* 150 (2018) 184–196.
13. El-Borgi S., Comez I., A Receding Frictional Contact Problem between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch. *Mech Mat* 114 (2017) 201–214.
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., et. al. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *Int. J. Mech Sci* 141 (2018) 127–142.
15. Uzhegova N.I.; Svistkov A.L.; Lauke B. The influence of capillary effect on atomic force microscopy measurements. *Int. J. Eng Sci.* 2014. Vol. 75. P. 67–78.
16. Li X. and Mi C. Effects of surface tension and Steigmann–Ogden surface elasticity on Hertzian contact properties / *Int. J. Eng Sci* 145 (2019) 103165.
17. Weike Y., Wang G. Cylindrical indentation of an elastic bonded layer with surface tension. *Applied Mathematical Modelling* 65 (2019), 597–613.
18. Izumov R.I., Svistkov A.L. Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite. *Nanosci. Technol. Int. J.* 10(1), 51–66 (2019).
19. Style, R.W., et. al.: Surface tension and contact with soft elastic solids. *Nat. Commun.* 4, 2728–2733 (2013).
20. Marshall J.S., Li Sh. Adhesive particle flow: a discrete-element approach. Cambridge University Press, New York (2014).

## References

1. Derjaguin, B.V., Muller, V.M. and Toporov, Y.P.: Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Col Interface Sci* 53(2), 314–26 (1975).
2. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1998. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31, 3279–3290.
3. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. A* 324 (1558) (1971) 301–313.

4. Maugis D. Adhesion of spheres. The JKR-DMT transition using a Dugdale model, 1992, *J. Col and Interface Sci*, Vol. 150, no. 1, 243-269.
5. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, 1965, *Int. J. of Eng. Sci.* Vol. 3, pp. 47-57.
6. Hertz H., 1881. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.* 92, 156–171.
7. Muller, V.M., Yushenko, V.S., Derjaguin, B.V., 1980. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid contact. *J. Colloid Interface Sci.* 77, 91–101.
8. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1981. The mechanics of adhesion of viscoelastic solids. *Philo. Mag.* 43, 697–711.
9. Kim, K.S., McMeeking, R.M., Johnson, K.L., 1998. Adhesion, slip cohesive zone and energy fluxes for elastic spheres in contact. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 243–266.
10. Morrow, C., Lovell, M., Ning, X., 2003. A JKR-DMT transition solution for adhesive rough surface contact. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 36, 534–540.
11. Chen, S., Yan, C., Zhang P., Gao H.. Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space. *J. of the Mech and Physics of Solids* 57 (2009), 1437–1448.
12. Zhang X., Wang Q. J., Wang Y., Wang Z., Shen H., Liu J. Contact involving a functionally graded elastic thin film and considering surface effects. *Int. J. of Solids and Structures* 150 (2018) 184–196.
13. El-Borgi S., Comez I., A Receding Frictional Contact Problem between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch. *Mech Mat* 114 (2017) 201–214.
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., et. al. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *Int. J. Mech Sci* 141 (2018) 127–142.
15. Uzhegova N.I.; Svistkov A.L.; Lauke B. The influence of capillary effect on atomic force microscopy measurements. *Int. J. Eng Sci.* 2014. Vol. 75. P. 67-78.
16. Li X. and Mi C. Effects of surface tension and Steigmann–Ogden surface elasticity on Hertzian contact properties / *Int. J. Eng Sci* 145 (2019) 103165.
17. Weike Y., Wang G. Cylindrical indentation of an elastic bonded layer with surface tension. *Applied Mathematical Modelling* 65 (2019), 597–613.
18. Izyumov, R.I., Svistkov, A.L.: Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite. *Nanosci. Technol. Int. J.* 10(1), 51–66 (2019).
19. Style, R.W., et. al.: Surface tension and contact with soft elastic solids. *Nat. Commun.* 4, 2728–2733 (2013).
20. Marshall, J.S., Li, Sh.: *Adhesive particle flow: a discrete-element approach.* Cambridge University Press, New York (2014).

#### **Информация об авторах:**

*A. Л. Свистков* – доктор физико-математических наук, зав. лаб. микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS ID: M-2112-2016 Scopus ID: 6701550738, РИНЦ ID: 3604;

*Р. И. Изюмов* – младший научный сотрудник лаб. микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS ID: J-4556-2018 Scopus ID: 57197705275, РИНЦ ID: 642321.

#### **Information about the authors:**

*A. L. Svistkov* – doctor of physical and mathematical sciences, head of the laboratory of micromechanics of structurally inhomogeneous media ICMM UB RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614018), WoS ID: M-2112-2016 Scopus ID: 6701550738, РИНЦ ID: 3604;

*R. I. Izyumov* – junior researcher of the laboratory of micromechanics of structurally inhomogeneous media ICMM UB RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614018), WoS ID: J-4556-2018 Scopus ID: 57197705275, РИНЦ ID: 642321.