МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 512.558
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15
https://elibrary.ru/buzlne

Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами

Евгений Михайлович Вечтомов[1], Андрей Александрович Петров[2], Александр Павлович Шкляев[3]

[1,2,3]Вятский государственный университет, г. Киров, Россия
[1]e-mail: vecht@mail.ru
[2]e-mail: apetrov43@mail.ru
[3]e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru

Аннотация. Исследуется строение конечных полумодулей над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Основное внимание уделено случаю трехэлементных идемпотентных полуколец. Описаны полумодули, содержащие не более 6 элементов, над трехэлементными идемпотентными полукольцами.

Ключевые слова: *полукольцо; мультипликативно идемпотентное полукольцо; полумодуль; конечный полумодуль; полурешетка; решетка; подходящая подполурешетка*

Для цитирования: *Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П.* Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. https://elibrary.ru/buzlne.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 30.08.2024; одобрена после рецензирования 15.09.2024; принята к публикации 03.10.2024.

MATHEMATICS

Research article

Finite Semimodules Over Three-element Multiplicatively Idempotent Semirings

Eugeny M. Vechtomov[1], Andrey A. Petrov[2], Alexander P. Shklyaev[3]

[1,2,3]Vyatka State University, Kirov, Russia
[1]e-mail: vecht@mail.ru
[2]e-mail: apetrov43@mail.ru
[3]e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru

Abstract. In this paper we study the structure of finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings. The main attention is paid to the case of three-element idempotent semirings. Semimodules containing at most 6 elements over three-element idempotent semirings are described.

Keywords: *semiring; multiplicatively idempotent semiring; semimodule; finite semimodule; semilattice; lattice; suitable subsemilattice*

For citation: Vechtomov, E. M,, Petrov, A. A. and Shklyaev, A. P. (2024), "Finite Semimodules Over Three-element Idempotent Semirings", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science,* no. 3(66), pp. 5-15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. https://elibrary.ru/buzlne.

Acknowledgments: the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117, supported the work.

The article was submitted 30.08.2024; approved after reviewing 15.09.2024; accepted for publication 03.10.2024

Введение. Основные понятия

Исследуются полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Статья примыкает к работам [1], [2]. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец излагается в книге [3]. Ранее изучались гомологические свойства полумодулей над дистрибутивными решетками S, называемых S-полигонами [4], в частности над трехэлементной цепью [5]. Последние достижения в теории полигонов над полугруппами изложены в обзоре [6]. Обзорная статья [7] посвящена теории полумодулей над полукольцами.

Отметим, что базовую информацию о полукольцах и полумодулях можно найти в монографии [8], а по теории решеток – в книге [9].

Полукольцом (с нулем и единицей) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями *сложения* + и *умножения* и элементами *нуль* 0 и *единица* 1, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $\langle S, +, 0\rangle$ – коммутативный моноид;
2) $\langle S, \cdot, 1\rangle$ – моноид;
3) 0 – мультипликативный нуль, то есть тождественно $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$;
4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, то есть в S справедливы тождества $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$.

Полукольцо S называется:

- *коммутативным*, если S удовлетворяет тождеству $xy=yx$;
- *мультипликативно идемпотентным*, если в S тождественно $xx=x$;
- *идемпотентным*, если S удовлетворяет тождествам $xx=x$ и $x+x=x$.

Полумодулем над полукольцом S или просто S*-полумодулем* (унитарным левым S-полумодулем) называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ с нейтральным элементом нуль 0 вместе с отображением $S\times A \to A$, $(s, a)\to sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t\in S$ и $a, b\in A$):

(1) $(s+t)a=sa+ta$;
(2) $s(a+b)=sa+sb$;
(3) $(st)a=s(ta)$;
(4) $1\cdot a=a$;
(5) $0\cdot a=0=s\cdot 0$.

Отметим, что в полукольцах и полумодулях нуль 0 обозначается одинаково.

Заметим также, что такие понятия как полугруппа, моноид, идеал, подполурешетка, подполумодуль определяются стандартно.

Отображение α: $A\to B$ S-полумодуля A в S-полумодуль B называется *S-гомоморфизмом*, если α *аддитивно* и *линейно*, то есть $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$ и $\alpha(sx)=s\alpha(x)$ для любых $x, y\in A$ и $s\in S$. Если S-гомоморфизм α S-полумодулей является взаимно однозначным отображением (биекцией), то он называется *S-изомофизмом*; при этом обратная биекция α^{-1} также будет S-изомофизмом. Изоморфные S-полумодули имеют одни и те же абстрактные свойства.

Заметим, что класс всех S-полумодулей при фиксированном полукольце S образует категорию полумодулей, если в качестве ее морфизмов взять всевозможные S-гомоморфизмы.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle A, +\rangle$ называется *полурешеткой*. Эквивалентное «порядковое» определение: (верхняя) *полурешетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \le\rangle$, для любых элементов a и b которого существует точная верхняя грань $\sup(a, b)$. Эти определения связаны соотношениями: $a\le b \Leftrightarrow a+b=b$ и $a+b=\sup(a, b)$. *Нулем* полурешетки $\langle A, +\rangle$ называется ее нейтральный элемент 0: $a+0=a$ для всех $a\in A$. В порядковом смысле 0 есть наименьший элемент полурешетки $\langle A, \le\rangle$.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, такая, что $\langle S, +\rangle$ и $\langle S, \cdot\rangle$ – полурешетки, согласованные посредством законов поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. Эквивалентное "порядковое" определение: *решетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \le\rangle$, для любых элементов a и b которого существуют точная верхняя грань $\sup(a, b)$ и точная нижняя грань $\inf(a, b)$, то есть $\langle A, \le\rangle$ является одновременно нижней и верхней полурешеткой. Имеют место соотношения: $a\le b \Leftrightarrow ab=a$ и $ab=\inf(a, b)$.

Отметим, что решетки удобно рассматривать как алгебраические системы $\langle S, +, \cdot, \le\rangle$ с согласованными друг с другом бинарными операциями сложения +, умножения $\cdot$ и отношением порядка $\le$. В частности, в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать: $a\le b$, $c\le d$ влекут $a+c\le b+d$, $ac\le bd$.

Решетка с тождеством $x(y+z)=xy+xz$, равносильно, с тождеством $x+yz=(x+y)(x+z)$, называется *дистрибутивной*.

Предварительные результаты

Приведем несколько предварительных соображений.

Лемма 1. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0\rangle$ будет S-полумодулем над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S тогда и только тогда, когда в A верно тождество $4x=2x$.*

Доказательство. В любом мультипликативно идемпотентном полукольце S имеем $4=1+1+1+1=(1+1)(1+1)=1+1=2$. Поэтому полумодули над таким полукольцом S удовлетворяют тождеству $4x=2x$. Обратно, если в коммутативном моноиде A верно тождество $4x=2x$, то A будет S-полумодулем для четырехэлементного полукольца $S=\{0, 1, 2, 3\}$ с равенством $3+1=2$.

Далее предполагается, что $A\equiv\langle A, +, 0\rangle$ – коммутативный моноид с тождеством $4x=2x$.

С точностью до изоморфизма существует четыре трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- $S_1=\{0< e< 1\}$ – цепь;
- $S_2=\{0, e, 1\}$ при $1+1=1$ и $e+1=e$;
- $S_3=\{0, 1, 2\}$ при $3=1$;
- $S_4=\{0, 1, 2\}$ при $3=2$.

Полукольца S_1, S_2 – идемпотентные ($2=1+1=1$), а полукольца S_3, S_4 не являются идемпотентными ($2\neq 1$).

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Коммутативный моноид A является S_1-полумодулем и/или S_2-полумодулем тогда и только тогда, когда A будет полурешеткой.*

Лемма 3. *Если A – конечная полурешетка с нулем, то $\langle A, \leq\rangle$ будет решеткой.*

Доказательство. Требуется доказать, что любые два элемента $a, b\in A$ имеют точную нижнюю грань $\inf(a, b)$. Рассмотрим множество B всех нижних граней множества $\{a, b\}$. Поскольку $0\in B$, то B не пусто. Тогда $\inf(a, b)$ есть сумма всех элементов множества B. См. более общее утверждение [9, с. 44, лемма 14].

Возьмем S-полумодуль A над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S. Каждый элемент $e\in S$ индуцирует аддитивный эндоморфизм $e\colon A\to A$, $a\to ea$ при $a\in A$, такой, что $e(0)=0$ и $e(e(a))=e(a)$ для всех $a\in A$. При этом образ $e(A)$ служит множеством всех неподвижных элементов при действии эндоморфизма e. Отметим, что в случае дистрибутивной решетки S множество $e(A)$ названо в статье [10] фиксатором элемента $e\in S$.

Если элемент $e\in S$ коммутирует с каждым элементом из полукольца S, то эндоморфизм $e\colon A\to A$ будет S-гомоморфизмом. В случае коммутативного полукольца S отображение $\alpha\colon S\to \mathrm{End}\, S$, сопоставляющее каждому элементу $e\in S$ S-гомоморфизм $e\colon S\to S$, является изоморфным вложением полукольца S в полукольцо $\mathrm{End}\, S$ всех S-гомоморфизмов $S\to S$, рассматриваемое с операцией поточечного сложения и композицией S-гомоморфизмов.

Пусть A будет S_1-полумодулем (S_2-полумодулем). Структура полумодуля A полностью определяется действием элемента e на A, поскольку 0 действует как нулевой эндоморфизм и 1 как тождественный изоморфизм. Множество $e(A)$ будет подполурешеткой полурешетки A, содержащей 0, такой, что $e(a)\leq a$ (соответственно, $a\leq e(a)$) для любого элемента $a\in A$. Легко видеть, что эндоморфизм $e\colon A\to A$ является *изотонным отображением*, то есть сохраняет порядок: $a\leq b \Rightarrow ea\leq eb$ для всех $a, b\in A$. Кроме того, $e(A)$ является подполумодулем S_1-полумодуля (соответственно, S_2-полумодуля) A.

Полумодули над полукольцом S_1

Подполурешетку B полурешетки A назовем *S_i-подходящей*, если A допускает структуру S_i-полумодуля ($i=1, 2$) и $B=e(A)$.

Теорема 1. *Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_1-полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A. При этом для любого элемента $a\in A$ элемент ea будет наибольшим элементом множества $\{x\in e(A)\colon x\leq a\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $B=\{x \in e(A): x \leq a\}$. Имеем $ea \in B$, поскольку $ea \leq a$ и $e(ea)=ea$. Если $x \in e(A)$ и $x \leq a$, то $x=ex \leq ea$ в силу изотонности отображения e. Поэтому элемент ea будет наибольшим элементом множества B. Заметим, что первая часть теоремы 1 вытекает также из [10, замечание 1 к теореме 2].

Теорема 1 позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_1-подходящей.

В случае произвольной конечной полурешетки A с нулем 0 ее подполурешетка B с 0 задает отображение e: $A \to A$ согласно теоремы 1. Значит, подполурешетка B будет S_1-подходящей тогда и только тогда, когда отображение e аддитивно.

Пример 1. Рассмотрим булеву решетку $A=\{0, a, b, s\}$ с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом s и одной парой несравнимых элементов a, b. S_1-подходящими подполурешетками в B являются в точности следующие: $\{0\}$, A, $\{0, a\}$, $\{0, b\}$. В первом случае e действует как 0 (нулевой эндоморфизм), во втором случае – как 1 (тождественный изоморфизм), в третьем случае $e(b)=0$ и $e(s)=a$, в четвертом случае $e(a)=0$ и $e(s)=b$. Во всех случаях отображение e аддитивно. Получаем, с точностью до изоморфизма, три S_1-полумодуля A.

Предложение 1. *Идеалы любой конечной дистрибутивной решетки A являются S_1-подходящими подполурешетками в ней.*

Доказательство. Пусть B – идеал конечной дистрибутивной решетки A. Рассмотрим отображение e: $A \to A$, определенное по правилу теоремы 1 при $e(A)=B$. Очевидно, что e изотонно. Для проверки аддитивности отображения e возьмем элементы $a, b \in A$. Положим $c=e(a+b) \in B$. Имеем $e(a)+e(b) \leq e(a+b)$ и $ca, cb \in B$. Тогда, в силу дистрибутивности решетки A, $c=ce(a+b) \leq c(a+b)=ca+cb \leq e(a)+e(b)$. Значит, $e(a+b)=e(a)+e(b)$.

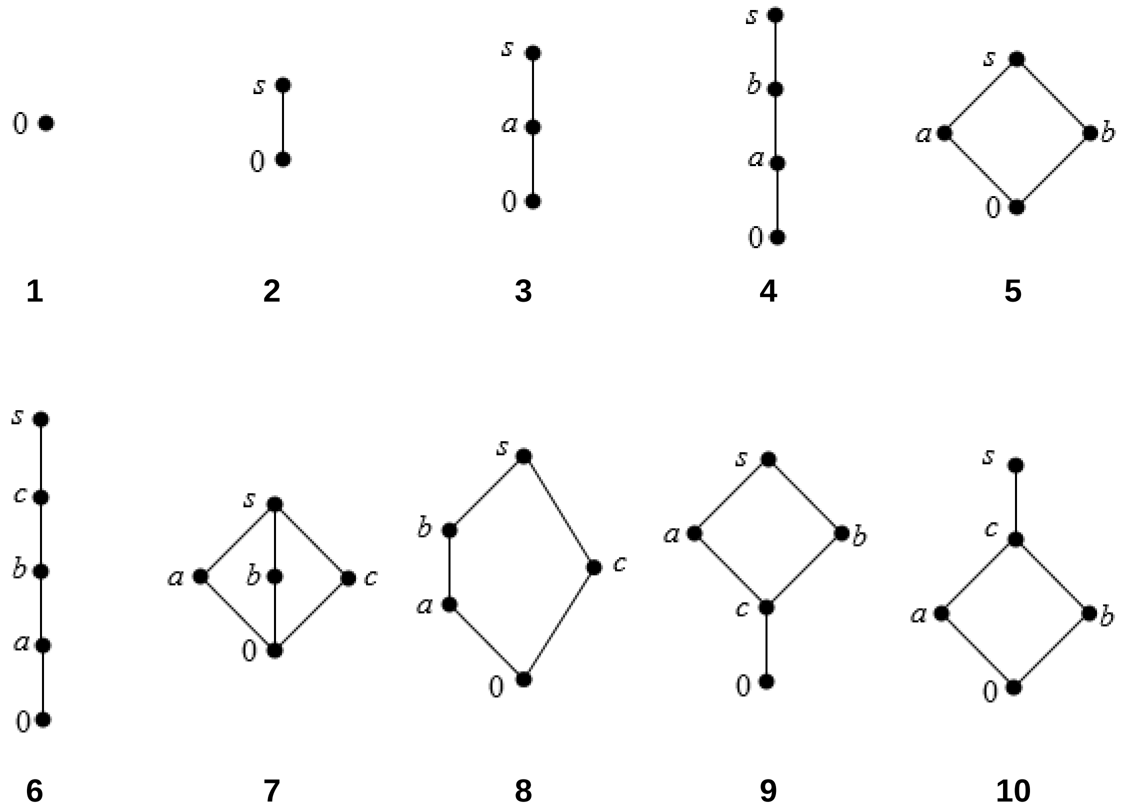
Предложение 2. *Все подполурешетки с нулем конечной полурешетки A с нулем являются S_1-подходящими тогда и только тогда, когда A – цепь.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Предположим, что в полурешетки A найдутся несравнимые элементы a, b. Положим $B=\{0, a+b\}$. По условию подполурешетка B будет S_1-подходящей. Тогда $a+b=e(a+b)=e(a)+e(b)=0+0=0$, противоречие. Значит, любые два элемента полурешетки A сравнимы, то есть A будет цепью.

$\Leftarrow$. Пусть A – конечная цепь с нулем 0 и B – ее подполурешетка с 0. Зададим отображение e: $A \to A$ по правилу теоремы 1. Как уже отмечалось, такое отображение e является изотонным. Ясно, что изотонное отображение цепи в любую полурешетку аддитивно.

Следствие 1. *Для любого натурального числа $n \geq 2$ n-элементная цепь допускает ровно 2^{n-1} структур S_1-полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-1} S_1-полумодулей, являющихся n-элементными цепями.*

Подсчитаем число попарно неизоморфных S_1-полумодулей A, имеющих не более 5 элементов. Их аддитивные моноиды $\langle A, +, 0 \rangle$ являются решетками, представленными на рисунке:



Диаграммы Хассе решеток мощности $n \leq 5$

Найдем для примера все неизоморфные S_1-полумодули A, имеющие аддитивную структуру решетки **9**. Используя теорему 1, проверим, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть $|B|=1$, то есть $B=e(A)=\{0\}$. В этом случае e действует как нулевой эндоморфизм. Обозначим полученный полумодуль A_1.

2) Пусть $|B|=2$.

2.1) Если $B=\{0, c\}$, то $e(\{a, b, s\})=c$ и легко проверить, что e аддитивно, то есть имеем полумодуль A_2.

2.2) Пусть $B=\{0, a\}$. Здесь $e(\{b, c\})=0$, $e(s)=a$ и можно убедиться, что e аддитивно, получаем полумодуль A_3. Ясно, что подрешетка $\{0, b\}$ задает полумодуль, изоморфный A_3.

2.3) Пусть теперь $B=\{0, s\}$. Имеем $e(\{a, b, c\})=0$, и отображение e не является аддитивным, так как $e(a+b)=e(s)=s\neq 0=e(a)+e(b)$.

3) Пусть $|B|=3$.

3.1) Если $B=\{0, c, a\}$, то $e(b)=c$, $e(s)=a$, e аддитивно и имеем полумодуль A_4, изоморфный полумодулю, получаемому в случае $B=\{0, c, b\}$.

3.2) При $B=\{0, c, s\}$, получаем $e(\{a, b\})=c$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s\neq c=e(a)+e(b)$.

3.3) В случае $B=\{0, a, s\}$, получаем $e(\{b, c\})=0$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s\neq a=e(a)+e(b)$. Аналогично при $B=\{0, b, s\}$.

4) Пусть $|B|=4$.

4.1) Если $B=\{0, c, a, s\}$, то $e(b)=c$, но $e(a+b)=e(s)=s\neq a=a+c=e(a)+e(b)$, то есть e не аддитивно. Аналогично при $B=\{0, c, b, s\}$.

4.2) Если $B=\{0, a, b, s\}$, то $e(c)=0$ и имеем полумодуль A_5.

4) Пусть $|B|=5$, то есть $B=A$. Здесь e действует как тождественный эндоморфизм. Получаем полумодуль A_6.

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 6 S_1-полумодулей, имеющих аддитивную структуру решетки A.

Предложение 3. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 53 S_1-*полумодуля порядка* (*мощности*) ≤ 5. *Из них*:

- 1 *одноэлементный*;
- 2 *двухэлементных*;
- 4 *трехэлементных*;
- 11 *четырехэлементных, из которых* 8 *имеют* (*аддитивную*) *структуру решетки* **4** *и* 3 *имеют структуру решетки* **5**;
- 35 *пятиэлементных, из которых* 16 *имеют структуру решетки* **6**, 2 *имеют структуру решетки* **7**, 5 *имеют структуру решетки* **8**, 6 *имеют структуру решетки* **9** *и* 6 *имеют структуру решетки* **10**.

Полумодули над полукольцом S_2

Исследуем структуру S_2-подходящих подполурешеток полурешеток с нулем.

Теорема 2. *Подполурешетка* $e(A)$ *произвольного* S_2-*полумодуля* A *однозначно определяет действие элемента* e *на* A. *При этом для любого элемента* $a\in A$ *элемент* ea *будет наименьшим элементом множества* $\{x\in e(A)\colon a\leq x\}$.

Доказательство. Пусть $a\in A$ и $B=\{x\in e(A)\colon a\leq x\}$. Имеем $ea\in B$, так как $a\leq ea$ и $e(ea)=ea$. Если $x\in e(A)$ и $a\leq x$, то $ea\leq ex=x$. Поэтому элемент ea будет наименьшим элементом множества B.

Теорема 2 помогает убедиться в том, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_2-подходящей.

Пример 2. Рассмотрим цепь A, полученную из цепи $\mathbf{Q}$ рациональных чисел добавлением наименьшего $\mathbf{0}$ и наибольшего $\mathbf{1}$ элементов. Множество $e(A)=\mathbf{Z}\cup\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ целых чисел с присоединенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ является S_i-подходящей подцепью S_i-полумодуля A при $i=1, 2$.

Предложение 4. *Пусть* A *– конечная полурешетка с нулем* 0 *и наибольшим элементом* s. *Тогда подполурешетка* B *полурешетки* A *будет* S_2-*подходящей в том и только в том случае, когда* B *является подрешеткой решетки* A *и содержит элементы* 0 *и* s.

Доказательство. Предположим, что подполурешетка B полурешетки A из условия предложения является S_2-подходящей. По лемме 3 полурешетка A является решеткой. Имеем $B=e(A)$, $0\in e(A)$ и $s\in e(A)$, так как $s\leq es$. Возьмем элементы $a, b\in B$ и покажем, что $ab=\inf(a, b)\in B$. Поскольку $ab\leq a=ea$, $ab\leq b=eb$ и $ab\leq e(ab)$, то $ab=e(ab)\in B$. Стало быть, B – подрешетка решетки A.

Обратно, пусть B – подрешетка конечной решетки A с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s, содержащая 0 и s. Руководствуясь теоремой 2, определим отображение $e\colon A\to A$, для любого элемента $x\in A$ положив $ex=a_1\cdot\ldots\cdot a_k$, где

$\{a_1\cdot\ldots\cdot a_k\}=\{a\in B: x\leq a\}$. Отображение e изотонно и $x\leq e(x)$ для всех $x\in A$. Остается доказать аддитивность отображения e. Возьмем элементы $x, y\in A$. Имеем $e(x)+e(y)\leq e(x+y)$. С другой стороны, $x+y\leq e(x)+e(y)\in B$, откуда $e(x+y)\leq e(x)+e(y)$.

Пример 3. Пополним решетку A из примера 1 элементом c, таким, что $0< c< a$ и $c< b$. В результате получим дистрибутивную решетку C, в которой верхняя подполурешетка A будет S_1-подходящей, но не S_2-подходящей в силу предложения 4. Цепь $B=\{0, c, s\}$ в решетке C, будучи S_2-подходящей по предложению 4, не является S_1-подходящей.

Предложение 5. *Для того чтобы в конечной полурешетке A с нулем 0 и наибольшим элементом s все подполурешетки с 0 и s являлись S_2-подходящими, необходимо и достаточно, чтобы решетка A обладала следующим свойством:*

$$a+b=s \text{ и } ab=0 \text{ для любых несравнимых элементов } a, b\in A. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть A – произвольная конечная полурешетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s. По лемме 3 A – решетка. Легко видеть, что выполнение свойства $(*)$ равносильно тому, что либо A – цепь, либо множество $A\backslash\{0, s\}$ является дизъюнктным объединением не менее чем двух цепей.

Необходимость. Предположим, что все подполурешетки полурешетки A, содержащие 0 и s, являются S_2-подходящими. Тогда по предложению 4 все они будут подрешетками решетки A. Пусть $a, b\in A$ – несравнимые элементы. Если $a+b\neq s$ или $ab\neq 0$, то подполурешетка $\{0, a, b, s\}$ в A не является ее подрешеткой.

Достаточность вытекает из предложения 4, поскольку любое подмножество в A, содержащие 0 и s, образует подрешетку решетки A.

Следствие 2. *Любое подмножество конечной полурешетки A с нулем 0, наибольшим элементом s и свойством $(*)$, содержащее 0 и s, является S_2-подходящей полурешеткой.*

Следствие 3. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ всякая n-элементная полурешетка со свойством $(*)$ допускает ровно 2^{n-2} структур S_2-полумодуля.*

Следствие 4. *Для любого натурального $n\geq 2$ n-элементная цепь допускает ровно 2^{n-2} структур S_2-полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-2} S_2-полумодулей, являющихся n-элементными цепями.*

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 суть необходимые условия на S_i-подходящую подполурешетку S_i-полумодуля (i=1, 2). Они позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка полурешетки A (конечной или бесконечной) S_i-подходящей.

Замечание 2. Рассмотрим подробнее n-элементную ($n\geq 3$) полурешетку A со свойством $(*)$ с наименьшим элементом 0 и набольшим элементом s. По лемме 3 A является решеткой. Очевидно, что в решетке A все подмножества, содержащие 0 и s, являются подрешетками, стало быть, по предложению 4 будут S_2-подходящими подполурешетками.

В силу свойства $(*)$ упорядоченное множество $A\backslash\{0, s\}$, рассматриваемое с индуцированным порядком, является дизъюнктным объединением n_1 одноэлементных максимальных цепей, n_2 двухэлементных максимальных цепей, …, n_{n-2} $(n-2)$-элементных максимальных цепей, таким, что $n_1+2n_2+\ldots+(n-2)n_{n-2}=n-2$. Некоторые из чисел n_i могут равняться 0. Значит, полурешетка A имеет ровно $n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$ автоморфизмов. Легко видеть, что данная полурешетка A имеет ровно один автоморфизм тогда и только тогда, когда все ненулевые числа среди чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{n-2}$ равны 1, другими словами, длины максимальных цепей в $A\backslash\{0, s\}$ попарно различны.

В этом случае существует, с точностью до изоморфизма, ровно 2^{n-2} S_2-полумодулей A. При $n_1=n-2$ полурешетка A обладает ровно $(n-2)!$ автоморфизмами.

Предположим, что подмножество B полурешетки A, содержащее 0 и s, перемещается при действии автоморфизма α полурешетки A, $\alpha(B)\neq B$. Тогда S_2-подходящие (полу)решетки B и $\alpha(B)$ порождают изоморфные неравные S_2-полумодули A. Поэтому число попарно неизоморфных n-элементных S_2-полумодулей A может быть значительно меньше числа 2^{n-2} из следствия 3. Например, в случае $n_1=n-2$ все k-элементные подмножества K множества $A\setminus\{0, s\}$ порождает одну-единственную, с точностью до изоморфизма, S_2-подходящую (полу)решетку на A – ее подрешетку $K\cup\{0, s\}$, определяющую структуру S_2-полумодуля A. Следовательно, существует, с точностью до изоморфизма, ровно $n-1$ S_2-полумодуля A.

Найдем число попарно неизоморфных S_2-полумодулей, имеющих не более 5 элементов.

Перечислим для примера все неизоморфные S_2-полумодули A, имеющие структуру решетки **9**. По теореме 1 для этого достаточно указать, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$. В силу предложения 4 – это в точности все подрешетки в A, содержащие элементы 0 и s, то есть $\{0, s\}$, $\{0, c, s\}$, $\{0, a, s\}$, $\{0, b, s\}$, $\{0, c, a, s\}$, $\{0, c, b, s\}$ и A. Отметим, что подрешетки $\{0, b, s\}$ и $\{0, c, b, s\}$ задают полумодули, изоморфные полумодулям, задаваемым подрешетками $\{0, a, s\}$ и $\{0, c, a, s\}$, соответственно. Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 5 S_2-полумодулей, имеющих структуру решетки A.

Предложение 6. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 41 S_2-*полумодуль порядка* ≤ 5. *Из них*:

- 1 *одноэлементный*;
- 1 *двухэлементный*;
- 2 *трехэлементных*;
- 7 *четырехэлементных, из которых* 4 *имеют структуру решетки* **4** *и* 3 *имеют структуру решетки* **5**;
- 30 *пятиэлементных, из которых* 8 *имеют структуру решетки* **6**, 4 *имеют структуру решетки* **7**, 8 *имеют структуру решетки* **8**, 5 *имеют структуру решетки* **9** *и* 5 *имеют структуру решетки* **10**.

Замечание 3 Мы также нашли все шестиэлементные S_1-полумодули и S_2-полумодули, опираясь на диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток. Сделали это, во-первых, "вручную", как в предложениях 3 и 6. Во-вторых, с помощью компьютерной программы. Получилось, с точностью до изоморфизма, 127 S_1-полумодулей и 158 S_2-полумодулей.

Полумодули над полукольцами S_3 и S_4

В полумодулях над каждым из полуколец S_3 и S_4 действие элемента 2 определяется однозначно: $x\mapsto 2x=x+x$.

Для полуколец S_3 и S_4 справедливы следующие утверждения:

Предложение 7. *Коммутативный моноид* $\langle A, +, 0\rangle$ *является* S_3-*полумодулем тогда и только тогда, когда* A *удовлетворяет тождеству* $3x=x$; *при этом он допускает одну-единственную структуру* S_3-*полумодуля.*

Доказательство. В полукольце $S_3=\{0, 1, 2\}$ выполняется равенство 3=1. Поэтому любой S_3-полумодуль удовлетворяет тождеству $3x=x$. Если моноид A удовлетворяет тождеству $3x=x$, то элемент 2 действует по однозначно определенному правилу $x\mapsto 2x$, превращая тем самым моноид A в S_3-полумодуль.

Предложение 8. *Коммутативный моноид* $\langle A, +, 0\rangle$ *является* S_4*-полумодулем тогда и только тогда, когда* A *удовлетворяет тождеству* $3x=2x$*; при этом он допускает одну-единственную структуру* S_4*-полумодуля.*

Доказательство повторяет доказательство предложения 7.

Следствие 5. *Для любой мощности m мощность множества всех попарно неизоморфных* S_3*-полумодулей* (S_4*-полумодулей*) *мощности m равна мощности множества всех попарно неизоморфных коммутативных аддитивных моноидов с тождеством* $3x=x$ (*соответственно,* $3x=2x$) *мощности m.*

Замечание 4. Полученные в статье результаты, в частности теоремы 1 и 2, могут быть полезны при исследовании произвольных полумодулей над идемпотентными полукольцами.

Список источников

1. *Вечтомов Е.М.* О полумодулях над мультипликативно идемпотентными полукольцами // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 103–104.
2. *Петров А.А.* О коммутативных аддитивных полугруппах с тождеством $4x=2x$ // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 130–131.
3. *Вечтомов Е.М., Петров А.А.* Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 180 с.
4. *Fofanova T.S.* Polygons over distributive lattices // Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 289–292.
5. *Фофанова Т.С.* Об инъективных полигонах над цепями // Mathematika Slovaka. 1978. Vol. 28, № 1. P. 21–32.
6. *Кожухов И.Б., Михалёв А.В.* Полигоны над полугруппами // Фун даментальная и прикладная математика. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 141–199.
7. *Ильин С.Н.* О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Серия. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.
8. *Golan J.S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
9. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
10. *Фофанова Т.С.* Полигоны над дистрибутивными структурами // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12, № 5. С. 1158–1163.

References

1. Vechtomov, E. M. (2024), "On semimodules over multiplicatively idempotent semirings", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: theory and applications", KFU, Kazan,* pp. 103–104.

2. Petrov, A. A. (2024), "On commutative additive semigroups with identity 4*x*=2*x*", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications", KFU, Kazan*, pp. 130–131.
3. Vechtomov, E. M. and Petrov, A. A. (2022), "*Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication*", Lan, St. Petersburg, 180 p.
4. Fofanova, T. S. (1982), "Polygons over distributive lattices", *Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J.* Bolyai, North-Holland, Amsterdam, pp. 289–292.
5. Fofanova, T. S. (1978), "On injective polygons over chains", *Mathematika Slovaka*, Vol. 28, no. 1, pp. 21–32.
6. Kozhukhov, I. B. and Mikhalev, A. V. (2020), "Polygons over semigroups", *Fundamental and applied mathematics*, Vol. 23, Iss. 3, pp. 141–199.
7. Il'in, S. N. (2018), "On the homological classification of semirings", *Results of science and technology. Series. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, Vol. 158, pp. 3–22.
8. Golan, J. S. (1999), "*Semirings and their applications*", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 382 p.
9. Grätzer, G. (1982), "*General lattice theory*", Mir, M., 456 p.
10. Fofanova, T. S. (1971), "Polygons over distributive structures", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 12, no. 5, pp. 1158–1163.

Информация об авторах:

Е. М. Вечтомов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 146598;

А. А. Петров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 662310;

А. П. Шкляев – бакалавр четвертого года обучения по направлению "Математика и компьютерные науки", Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36).

Information about the authors:

E. M. Vechtomov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 146598;

A. A. Petrov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 662310;

A. P. Shklyaev – Bachelor of the Fourth Year of Study in the Field of Mathematics and Computer Science, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).