МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46

https://elibrary.ru/fqyvkc

Динамика гиростата в световом поле полуевклидова пространства

Николай Николаевич Макеев
г. Саратов, Россия
e-mail: nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Исследуется движение гиростата в стационарном поле сил светового давления полуевклидова пространства. Гиростат с кинетической осевой симметрией и постоянным гиростатическим моментом движется так, что его носитель вращается вокруг центра инерции. Поле сил светового давления порождается стационарным световым потоком постоянной интенсивности, образованным параллельными лучами света, и принимается консервативным. На основе усовершенствованной термомеханической модели динамического взаимодействия светового излучения с твердой поверхностью строится динамическая система и рассматривается ограниченная задача исследования маятникового движения особого вида. Получены аналитические зависимости от времени компонент вектора угловой скорости гиростата и параметров его ориентации. Найдены параметрические уравнения подвижного годографа вектора угловой скорости гиростата и явное уравнение его несущей поверхности.

Ключевые слова: *гиростат; полуевклидово пространство; поле сил светового давления; маятниковое движение; годограф вектора угловой скорости*

Для цитирования: *Макеев Н.Н.* Динамика гиростата в световом поле полуевклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 35–46. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2024-3-35-46. https://elibrary.ru/fqyvkc.

Статья поступила в редакцию 16.08.2024; одобрена после рецензирования 11.09.2024; принята к публикации 06.10.2024.

MECHANICS

Research article

Gyrostat Dynamics in the Light Field of Semi-Euclidean Space

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia
e-mail: nmakeyev@mail.ru

Abstract. The motion of a gyrostat in a stationary field of light pressure forces in semi-Euclidean space is investigated. A gyrostat with kinetic axial symmetry and a constant gyrostatic moment moves so that its carrier rotates around the center of inertia. The field of light pressure forces is generated by a stationary light flux of constant intensity, formed by parallel rays of light, and is assumed to be conservative. Based on an improved thermomechanical model of the dynamic interaction of light radiation with a solid surface, a dynamic system is constructed and the limited problem of studying pendulum motion of a special type is considered. Analytical time dependences of the components of the gyrostat angular velocity vector and its orientation parameters are obtained. The parametric equations of the moving hodograph of the gyrostat angular velocity vector and the explicit equation of its bearing surface are found.

Keywords: *gyrostat; semi-Euclidean space; light pressure force field; pendulum movement; angular velocity vector hodograph*

For citation: Makeev, N. N. (2024), "Gyrostat Dynamics in the Light Field of Semi-Euclidean Space", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 35-46. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46. https://elibrary.ru/fqyvkc.

The article was submitted 16.08.2024; approved after reviewing 11.09.2024; accepted for publication 06.10.2024.

Введение

Рассматривается динамически активная среда – *световое поле* (поле сил светового давления, *СД-поле*), порождаемое стационарным однородным потоком светового излучения; оно представляется пучком прямолинейных параллельных лучей постоянной интенсивности. Предполагается, что этот поток индуцируется стационарным источником светового излучения постоянной мощности, генерирующим световую волну, взаимодействующую со средой ее распространения и вызывающую эффект светового давления на твердые поверхности (динамический *эффект П.Н. Лебедева*).

Световое давление – пондеромоторный эффект светового излучения, обусловленный передачей импульса электромагнитного поля. Это давление реализуется распределенной поверхностной силой, величина которой пропорциональна плотности энергии светового потока и непосредственно зависит от оптических и термомеханических свойств освещаемой поверхности.

Общепринятая модель термомеханического взаимодействия светового потока с твердой поверхностью учитывает только давление подающего и отраженного (рассеянного) светового излучения. Однако реально мощность светового потока, поглощаемая твердой поверхностью, переизлучается в тепловом диапазоне, и это явление оказывает существенное влияние на динамические свойства тела. Установлено, что сила отдачи тепловых фотонов неконсервативна и в результате это приводит к возникновению существенных по влиянию дополнительных динамических эффектов, не улавливаемых общепринятыми термомеханическими моделями. В настоящей работе принята более совершенная термомеханическая модель, предложенная в статье [1], свободная от указанного недостатка.

В цитируемой статье рассматривается задача об устойчивости перманентных вращений абсолютно твердого тела в СД-поле, которое при определенных условиях может быть консервативным [1]. Свойство консервативности поля способствует решению аналитическими методами задачи о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения тела. Такого рода задачи являются актуальными модельными задачами классической динамики твердого тела.

Несмотря на незначительную по объему аналитическую базу точных частных решений для исследований они имеют существенное значение. Эти решения являются носителями основной информации о характерных особенностях движения данного механического объекта и, вместе с тем, позволяют оценивать возможности применения приближенных методов нахождения решений уравнений его движения.

К настоящему времени не найдены какие-либо общие методы построения видов частных решений систем уравнений движения. В силу этого, как правило, рассматриваются задачи частного характера, решаемые в ограниченной постановке в рамках классической механики.

В настоящей работе решается ограниченная задача о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения гиростата в стационарном СД-поле неевклидова пространства, поставленная при заданных ограничениях и голономных связях, для определенного класса его движений.

1. Предварительные положения

Согласно классификации, применяемой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь полуевклидово пространство является действительным аффинным трехмерным пространством с индексом 2 и дефектом 0. Оно может быть определено и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В данной работе под движением гиростата (в смысле механического движения) понимается перемещение в конфигурационном пространстве его тела-носителя как абсолютно твердого тела. При этом все необходимые геометрические объекты и связанные с ними геометрические построения, вводимые в публикациях различными способами, приняты здесь согласно схеме, установленной в работе [2].

Вследствие существующего гомеоморфизма задача о движении гиростата в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче о его вращении вокруг неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций гиростата, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$ и, кроме того, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) − орты осей заданной ортогональной координатной системы.

Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij}x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j − контравариантные координаты.

Под гиростатом в полуевклидовом пространстве в общепринятом смысле понимается гиростат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O, совпадающим с его центром инерции, относительно которого движется гиростат, − вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов точек гиростата существует условие $\boldsymbol{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Предполагается, что СД-поле светового потока является консервативным, характеризуемым одномерным стационарным квадратичным потенциалом [1]:

$$U(s_3) = \int G(s_3)\, ds_3\,, \tag{1}$$

где функция плотности поля G определяется равенством

$$G(s_3) = n_1 + n_2 s_3 \quad (-\infty < s_3 \le -1), \tag{2}$$

а функция U определена в открытой регулярной области конфигурационного пространства. Здесь $n_1,\ n_2$ – заданные постоянные термомеханические модельные параметры [1], характеризующие теплофизические и оптические свойства светоотражающей твердой поверхности гиростата.

Движение гиростата вокруг полюса O относительно ортобазиса, связанного с носителем, в силовом поле светового потока с потенциалом, заданным соотношениями (1), (2), согласно принятым предпосылкам, определяется системой уравнений

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{k}) = (U_s \times \boldsymbol{s}), \\ \dot{\boldsymbol{s}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где обозначено

$$U_s = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{s}}.$$

Согласно соотношениям (1), (2) для функции U имеем [1]

$$U(s_3) = n_1 s_3 + \tfrac{1}{2} n_2 s_3^2. \tag{4}$$

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе O: ортобазис Γ_0, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиростата, и ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиростата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Н.Е. Жуковскому) тензора инерции данного гиростата.

Обозначим: A_j − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными центральными моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиростата; $\boldsymbol{K}(K_j)$ − кинетический момент гиростата относительно полюса O; $\boldsymbol{k}(k_j)$ − постоянный гиростатический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси ортобазиса Γ; главные центральные моменты инерции гиростата A_1, A_2 − моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2, а момент A_3 − относительно собственной главной оси инерции Ox_3; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее текущий индекс j последовательно принимает значения $j = 1,\ 2,\ 3$. В частности, символ (ω_j) кратко обозначает всю совокупность допустимых значений $(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$.

Пусть $\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ − орты осей базиса Γ. Тогда вектор угловой скорости носителя гиростата и его кинетический вектор-момент относительно полюса O представляются в виде, соответственно [2],

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 - \omega_3 \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{K} = K_1 \boldsymbol{e}_1 + K_2 \boldsymbol{e}_2 - K_3 \boldsymbol{e}_3. \end{gathered}$$

Для компонент вектора **K** имеем

$$K_j = A_j \omega_j + k_j = K s_j \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{5}$$

где $K = |\boldsymbol{K}| \neq 0$, s_j– соответствующие направляющие косинусы, для которых имеет место тривиальное тождество [2]

$$\|\boldsymbol{s}\|^2 \equiv -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = 1. \tag{6}$$

Система параметров ориентации для твердого тела в неевклидовых пространствах вводится по-разному; здесь единой общепринятой схемы не существует.

Следуя конструкционной схеме построения параметров ориентации собственного базового вектора **s** в полуевклидовом пространстве, принятой в работе [2], введем аналоги классических углов Эйлера λ, ϑ, ϕ, определяющих ориентацию ортобазиса Γ относительно Γ_0 конфигурационного пространства. Положим, что вектор $\boldsymbol{s}(s_1,\ s_2,\ s_3)$– *орт*, определяющий ориентацию однородного параллельного светового потока относительно базиса Γ. Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления падающих на поверхность носителя пучка лучей света. Его зависимость от указанных параметров ориентации определяется равенствами [2]

$$(s_1,\ s_2,\ s_3) = (\operatorname{sh}\vartheta \sin\phi,\ \operatorname{sh}\vartheta\cos\phi,\ -\operatorname{ch}\vartheta), \tag{7}$$

удовлетворяющими соотношению (6). Здесь параметры ориентации $\vartheta,\ \phi$ по аналогии с классическими углами Эйлера будем называть параметрами нутации и собственного вращения. При этом данные параметры (как и их классические аналоги) являются безразмерными величинами.

Для собственного вектора **K** согласно равенствам (5), (7) получаем [3]

$$(K_1,\ K_2,\ K_3) = \mathbf{K}(\operatorname{sh}\vartheta\sin\phi,\ \operatorname{sh}\vartheta\cos\phi,\ -\operatorname{ch}\vartheta). \tag{8}$$

Вводя 3-вектор ε_{ijk} с существенной компонентой $\varepsilon_{123} = 1$, переставляем его индексы по схеме: $\varepsilon_{ij\bullet}^{k} = \varepsilon_{ijl}g^{lk}$. Тогда векторное произведение вида $(\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b})$ – это вектор, k-координата которого определяется равенствами [2]:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b})_k &= \varepsilon_{ijk}a^i b^j,\\ (\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b})^k &= \varepsilon_{ij\bullet}^{k}a^i b^j,\end{aligned} \tag{9}$$

откуда следует

$$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3] = [(\boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{e}_2),\ (\boldsymbol{e}_1\times \boldsymbol{e}_3),\ (\boldsymbol{e}_1\times \boldsymbol{e}_2)].$$

Система уравнений (3) согласно соотношениям (1), (2), (5)–(9) и введенным предпосылкам в проекциях на координатные оси ортобазиса Γ принимает вид

$$\begin{gathered} A_1\dot\omega_1 + (A_2 + A_3)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 + k_2\omega_3 = -G(s_3)s_2,\\ A_2\dot\omega_2 - (A_1 + A_3)\omega_3\omega_1 - k_1\omega_3 - k_3\omega_1 = G(s_3)s_1,\\ A_3\dot\omega_3 + (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - k_2\omega_1 + k_1\omega_2 = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\dot s_1 = \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2,\quad \dot s_2 = \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3,\quad \dot s_3 = \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2. \tag{11}$$

Уравнения (10)–(11) образуют многопараметрическую динамическую систему с квадратичной нелинейностью, в которой подсистема (10) имеет особые точки: точку $\boldsymbol{s}_q(0,\ 0,\ 1)$ и множество $\boldsymbol{s}(s_1,\ s_2, s_p)$, где критическое значение $s_p = -\ n_1/n_2$соответствует статическому условию $G(s_p) =\ 0$и является единственным критическим значением.

Для динамической системы (10)–(11) *ставится следующая ограниченная задача.* Полагая, что при $t \in T = [0, +\infty)$ априорно существует точное частное решение $\{\omega_j(t),\ s_j(t)\}$ данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^0\ (\omega^0{}_j)$, $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^0\ (s^0{}_j)$, найти это решение, удовлетворяющее ограничениям, налагаемым на характеристики движения гиростата.

Целью настоящей работы является решение поставленной задачи, получаемое на основе динамической системы (10)–(11) и предпосылок, принятых для данной задачи.

2. Маятниковые движения

Рассмотрим движения гиростата, при которых для $t \in T$ выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = m_1 \neq 0, \qquad \dot{\phi}(t) = m_2, \tag{12}$$

где $m_1,\ m_2$ – заданные действительные постоянные. Эти условия определяют сложное движение, составленное из равномерного прецессирования и равномерного собственного вращения носителя гиростата. Совокупность параметров $m_1,\ m_2$, заданных равенствами (12), характеризует *множество маятниковых движений* гиростата, существующих в СД-поле.

Согласно классификации, приведенной в работе [3], это движение при $m_2 = 0$является частным случаем *маятникового движения первого рода.* Данное движение при дополнительном к (12) условии $\dot{\theta}(t) \equiv 0$переходит в *регулярную прецессию*, порождаемую силами радиационного СД-поля. В определенном смысле движение, подчиненное условиям (12), является *полурегулярной прецессией* гиростата.

Введем условие осевой структурно-кинетической симметрии гиростата:

$$A_1 = A_2 = A > A_3 \tag{13}$$

и рассмотрим преобразование редуцирования динамической системы (10)–(11).

Обозначим

$$F(\omega_1,\ \omega_2) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2,$$

$$\Phi(s_1,\ s_2) = k_1 s_1 + k_2 s_2,$$

$$N(\omega_3) = b\omega_3 + k_3,$$

$$b = A + A_3, \quad A_3 < \frac{1}{2}\ b < A.$$

Из третьего уравнения системы (10) в силу остальных уравнений при условиях (13) получаем

$$AA_3\ddot{\omega}_3 + N(\omega_3)F(\omega_1,\ \omega_2) + k^2\omega_3 + G(s_3)\Phi(s_1,\ s_2) = 0. \tag{14}$$

Введем геометрическую связь

$$X(s_1,\ s_2) \equiv k_1 s_2 - k_2 s_1 = 0, \tag{15}$$

которая по предположению реализуется для значений $t \in T$. Согласно выражениям (7), уравнение связи (15) принимает вид

$$B(\phi)\,\mathrm{sh}\,\vartheta = 0, \tag{16}$$

где обозначено

$$B(\phi) = k_1\cos\phi - k_2\sin\phi.$$

Исключая критическое значение $\vartheta = 0$, находим, что связь вида (16) для гиростата реализуется в виде

$$B(\phi) = 0. \tag{17}$$

Обозначая

$$N(\omega_3) = b\omega_3 + k_3,$$

$$R(\omega_1, \omega_2) \equiv k_1\omega_2 - k_2\omega_1 = -A_3\dot{\omega}_3,$$

в силу уравнений системы (10) получаем

$$A\dot{F}(\omega_1, \omega_2) + N(\omega_3)R(\omega_1, \omega_2) = -G(s_3)X(s_1, s_2),$$

$$\dot{\Phi}(s_1, s_2) = -X(s_1, s_2)\omega_3 - A_3\dot{\omega}_3 s_3. \tag{18}$$

Из соотношений (18) на связи (17) следует:

$$F(u) = a_p\left(\frac{1}{2}bu^2 + k_3u\right) + C_1,$$

$$\Phi(u) = A_3(a_p - u), \qquad u = \omega_3. \tag{19}$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования и, с учетом дальнейшего, обозначено:

$$(a, a_p, a_3) = (A^{-1}, aA_3, A_3^{-1}).$$

Согласно выражениям (17)–(19) уравнение (14) принимает вид

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = -P(u) + an_2(u - a_p)s_3, \tag{20}$$

где обозначено:

$$\Omega^2 = n(a_p k_3^2 + k^2), \qquad n = aa_3,$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

$$P(u) = \sum_{k=0}^{3} g_k u^k, \quad g_3 = \frac{1}{2}a_p n b^2,$$

$$g_2 = \frac{3}{2}a_p b n k_3, \quad g_1 = nbC_1 - an_1,$$

$$g_0 = a_p n_1 + k_3.$$

Присоединим к условиям (12) уравнение, являющееся аналогом кинематического уравнения Эйлера, существующего для случая собственного кинетического момента гиростата. Для полуевклидова пространства это уравнение имеет вид [3]

$$u = m_1 s_3 - m_2, \tag{21}$$

где зависимость вида $s_3(\vartheta)$ определяется равенством (7).

Согласно зависимости (21), уравнение (20) принимает вид

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = Q_3(u), \tag{22}$$

где обозначено:

$$Q_3(u) = \sum_{k=0}^{3} b_k u^k, \quad b_3 = -g_3,$$

$$b_2 = n_p - g_2, \quad b_1 = n_p(m_2 - a_p) - g_1,$$

$$b_0 = -(a_p m_2 n_p + g_0), \quad n_p = am_1^{-1}n_2.$$

Итак, в результате преобразования из системы уравнений (10), (11) выделено определяющее для функции $u(t)$ уравнение (22), которое можно рассматривать как квазилинейное, характеризующее стационарные колебания нелинейного осциллятора в одномерном фазовом пространстве с координатой *u*. В частности, при значениях кинематических параметров

$$m_1 = \frac{2n_2}{3abk_3}, \quad m_2 = -\frac{2(n_1 + a_q k_3)}{3a^2 bk_3},$$

$$a_3 C_1 = \frac{3}{2}a(m_2 - a_p)k_3 - \frac{n_1}{b}, \quad a_q = a_p^{-1},$$

для которых $b_r = 0$ $(r = 0, 1, 2)$, уравнение (22) принимает вид *специального уравнения Дуффинга* (случай жесткой внешней упругой силы) [4, с. 163].

Для уравнения (22) имеет место первый интеграл

$$\dot{u}^2 = 2Q_4(u) \quad (-1 \leq u \leq 1) \tag{23}$$

с полиномом

$$Q_4(u) = \frac{1}{4}b_3 u^4 + \frac{1}{3}b_2 u^3 + \frac{1}{2}b_r u^2 + b_0 u + C_2,$$

где обозначено $b_r = b_1 - \Omega^2$, C_2 – постоянная интегрирования.

Из уравнения (23) следует:

$$\mp \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{\sqrt{2Q_4(s)}} = t - t_0, \tag{24}$$

причем $u_0 = \operatorname{ch} \vartheta_0$, и далее полагаем $t_0 = 0$. В равенстве (24) знак левой части выбирается согласно условию $t > 0$.

Положим, что все корни полинома Q_4 – простые. Обозначим через u_p один из них. Тогда, обращая квадратурную зависимость (24), получаем решение уравнения (23) в форме

$$u(t) = u_p + r_1[\wp(t; g_2, g_3) - r_2]^{-1}, \tag{25}$$

где обозначено

$$r_1 = \frac{1}{2}Q_4'(u_p), \qquad r_2 = \frac{1}{12}Q_4''(u_p).$$

Здесь штрих обозначает производную по переменной *u*, а $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса [5, с. 322] с инвариантами

$$g_2 = \frac{1}{4}(b_3 C_2 - \frac{1}{3}b_0 b_2 + \frac{1}{12}b^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{48}\left[(bb_3 - \frac{1}{3}b_2^2)C_2 - \frac{1}{64}b_0^2 b_3 + \frac{1}{12}b(b_0 b_2 - \frac{1}{6}b^2)\right].$$

В силу соотношений (21), (25) имеем

$$s_3(t) = m_1^{-1}\{m_2 + u_p + r_1[\wp(t; g_2, g_3) - r_2]^{-1}\}. \tag{26}$$

Таким образом, параметры ориентации гиростата, согласно соотношениям (12), (21), определяются равенствами

$$\lambda(t) = m_1 t + \lambda_0, \quad \phi(t) = m_2 t + \phi_0,$$

а зависимость вида $\vartheta(t)$ – равенством (26), где, согласно соотношению (7), $s_3(t) = -\operatorname{ch} \vartheta(t)$.

Зависимость компонент вектора **ω** (ω_j) от параметров его ориентации в случае, при котором вектор **K** в полуевклидовом пространстве является собственным, устанавливается известными соотношениями [3], согласно которым

$$\omega_1 + i\omega_2 = (\dot{\vartheta} + i\dot{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\vartheta)\,exp(-i\phi), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

При этом зависимость вида $\omega_3(t)$ находится из равенства (25).

Приведем выражение проекции вектора скорости носителя на плоскость, ортогональную оси кинетической симметрии гиростата. Для функции ее квадрата нормы $\Omega_N = \|\boldsymbol{\omega}_N\|$ согласно условиям, получаем

$$\Omega_N^2 = (m_1 \mathrm{sh}\,\vartheta)^2 + \dot{\vartheta}^2.$$

Эта зависимость при заданном значении параметра m_1, в случае необходимости, позволяет определить движение гиростата по углу ϑ (нутационное движение).

3. Годограф вектора угловой скорости

Для системы уравнений (10), (11) имеет место интеграл энергии [3]

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}) - U(s_3) = h, \tag{27}$$

где потенциал СД-поля $U(s_3)$ определяется равенством (4), h – постоянная интегрирования. При условиях (13) и обозначениях (19) интеграл (27) принимает вид

$$\Omega_N^2 = 2a[U(s_3) + h] - a_p u^2, \tag{28}$$

где обозначено $\Omega_N^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

Из третьего уравнения системы (10) при условиях (13) следует:

$$-a_3 R(\omega_1, \omega_2) = \dot{u}, \tag{29}$$

где в силу зависимости (25) и соотношения для дифференцирования функции Вейерштрасса $\wp(t)$ [5, с. 320] имеем

$$\dot{u}(t) = \mp r_1[\wp(t) - r_2]^{-2} \cdot \sqrt{4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3}, \tag{30}$$
$$\wp(t) = \wp(t;\ g_2,\ g_3).$$

Представим уравнения (28), (29), соответственно, согласно равенствам (25), (26), (30) в виде

$$\begin{gathered} \Omega_N^2(\omega_1, \omega_2) = \Phi_1(t), \\ -a_3 R(\omega_1, \omega_2) = \Phi_2(t), \end{gathered} \tag{31}$$

где $\Phi_1,\ \Phi_2$ – известные функции.

Положим $k_1 \neq 0$ и обозначим

$$D(t) = [k^2\Phi_1(t) - A_3^2\Phi_2^2(t)]k_1^2, \qquad m = k_1^{-1}k_2.$$

Тогда для значений величин $\omega_1,\ \omega_2$ в области $D(t) \geq 0$ $(t \in T)$ фазового пространства из соотношений (31) следует:

$$\begin{gathered} \omega_1(t) = k^{-2}[A_3 k_2 \Phi_2(t) \pm \sqrt{D(t)}], \\ \omega_2(t) = -k^{-2}[A_3 k_1 \Phi_2(t) \mp m\sqrt{D(t)}], \end{gathered} \tag{32}$$

где $D(t)$ – дискриминантная функция, определенная в области фазового пространства, соответствующей области конфигурационного полуевклидова пространства гиростата, расположенной внутри упомянутого изотропного конуса.

Согласно равенствам (32), поле компонент угловой скорости гиростата при $k_2 D(t) \neq 0$ характеризуется двузначными значениями их величин. При этом на границе области $D(t) = 0$ значения этих компонент однозначны.

Из кинематических уравнений Пуассона (11) и соотношения связи (21) в силу первого определяющего условия (12) имеем:

$$\begin{aligned} \omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 &= q_1, \\ \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2 &= q_2, \end{aligned} \tag{33}$$

где величины

$$q_1(t) = m_1(s_3^2 - 1), \quad q_2(t) = m_1^{-1} \dot{u}$$

определяются соотношениями (25), (26) как известные функции времени *t*. В силу этого, согласно зависимостям (32), из системы уравнений (33) при условии

$$\Phi_1(t) \neq 0 \qquad (t \in T) \tag{34}$$

следует:

$$s_Z(t) = \Phi_1^{-1}(t) q_Z^*(t). \tag{35}$$

В равенстве (35) обозначены комплекснозначные функции:

$$s_Z(t) = s_1 + i s_2, \quad q_Z(t) = q_1 + i q_2 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Здесь условие (34) эквивалентно ограничению $\Omega_N^2(t) \neq 0 (t \in T)$, исключающему критические точки из области, содержащей поле компонент угловой скорости гиростата, а знак $*$ – символ комплексного сопряжения.

Обозначим:

$$p = m_1 n_1 + m_2 n_2, \quad p_1 = 2p, \qquad p_0 = (p + m_1 n_1) m_2.$$

Тогда, согласно зависимости (21), для потенциальной функции СД-поля, определяемой равенством (4), имеем

$$U(u) = (2m_1^2)^{-1}(n_2 u^2 + p_1 u + p_0) \tag{36}$$

и в силу равенств (21), (28), (36) получаем

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + h_2 \omega_3^2 - h_1 \omega_3 - h_0 = 0, \tag{37}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} h_0 &= a_r p_0 + 2ah, \quad h_1 = a_r p_1, \\ h_2 &= a_p - a_r n_2, \qquad a_r = a m_1^{-2}. \end{aligned}$$

Равенство (37) является уравнением *несущей поверхности* в пространстве переменных ω_j, на которой расположен годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$, отнесенный к базису Γ (*подвижный годограф* вектора $\boldsymbol{\omega}$).

Данный годограф для $t \in T$ задается параметрическими уравнениями с параметром *t* (25), (32). При этом, поскольку представления (32) для $\omega_1, \ \omega_2$ двухзначны, то при $D > 0$ в общем случае имеются два невырожденных годографа данного вектора.

При $h_2 \neq 0$ поверхность (37) является невырожденной центральной, тогда как при $h_2 = 0$ – нецентральной. В частности, для случая, при котором $n_2 = A_3 m_1^2$, эта поверхность является цилиндрической.

Заключение

Рассмотренная задача относится к классу задач о движении гиростата с радиационным моментно-силовым приводом в стационарном силовом СД-поле.

Движение гиростата, происходящее при ограничениях (12), является состоянием, сформированным из равномерного прецессионного движения и постоянного собственного вращения носителя. Это движение представляет интерес в связи с исследованием состояния гиростата, непосредственно предшествующего возможной последующей стабилизации гиростата по углам λ и ϕ. В силу этого данное движение можно рассматривать как некоторое заданное переходное состояние, – маятниковое движение, поддерживаемое стационарными силами СД-поля.

Данное состояние гиростата можно интерпретировать как предварительное, на основе которого последующее активное управление движением гиростата, построенное определенным образом, может привести его к требуемому ориентированному финальному состоянию.

Следует отметить, что результирующее уравнение (22), полученное путем преобразования из динамической системы (10), представленное на фазовой плоскости $(u,\ \dot{u} = w)$ в виде

$$w\frac{dw}{du} + f(u) = 0,$$
$$f(u) = \Omega^2 u - Q_3(u),$$

идентично по структуре уравнению одномерной уединенной стоячей волны горения, находящейся в сплошной среде, в которой не происходит процесс диффузии [6]. Такая идентичность обусловлена изоморфизмом математических моделей, существующим в задачах данного рода.

Помимо упомянутого, это уравнение находит применение при анализе процессов в некоторой биологической проблеме выживаемости определенных биологических видов, в задаче возникновения нервных импульсов, в установлении условий самовоспламенения некоторых горючих веществ.

Моделями этого класса могут являться и некоторые упорядоченные изоморфные структуры различной физической природы. В частности, к ним относятся системы однотипных осцилляторов (решеток), одномерные монокристаллы и ряд других модельных объектов.

Список источников

1. *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 3. С. 312–320.
2. *Косогляд Э.И.* Движение твердого тела под действием сил на плоскости Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1970, № 9 (100). С. 59−68.
3. *Макеев Н.Н.* Движение гиростата вокруг центра инерции в полуевклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2 (65). С. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.
4. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.

5. *Уиттекер Э.Т.*, *Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит. 1963. Ч. 2. 516 с.
6. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества // Вопросы кибернетики. М.: Изд-во Академии наук СССР. 1975. Вып. 12. С. 3–30.

References

1. Kogan, A. Yu., Kirsanova, T. S. (1992), "Termomekhanicheskie yavleniya v dvizhenii otnositel`no tsentra mass kosmicheskogo apparata s solnechnym stabilizatorom", *Kosmicheskie issledovaniy*, vol. 30, issue 3, pp. 312-320.
2. Kosoglyad, E. I. (1970), "Dvizhenie tverdogo tela pod deystviem sil na ploskosti Lobachevskogo" *Izvestiya vuzov. Matematika*, no. 9 (100), pp. 59-68.
3. Makeev, N. N. (2024), "Dvizhenie girostata vokrug tsentra inertsii v poluevklidovom prostranstve", *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika,* issue 2 (65), pp. 42-53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53. Russia.
4. Obmorshev, A. N. (1965), "*Vvedenie v teoriyu kolebaniy*", Nauka, Moscow, Russia.
5. Uitteker, E. T. and Vatson, Dzh. N. (1963), "*Kurs sovremennogo analiza*. *V 2 Ch.*" [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, Moscow, Russia.
6. Kolmogorov, A. N., Petrovskiy, I. G. and Piskunov, N. S. (1975), "Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoy s vozrastaniem kolichestva veshchestva", *Voprosy kibernetiki*, issue 12, pp. 3-30.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев − доктор физико-математических наук, профессор (410000, Россия, г. Саратов), AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev − Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Saratov, Russia, 410000), AuthorID: 374535.