МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 517.977.56
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-6-17
https://elibrary.ru/bubykz

Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в задаче оптимального управления нелинейным интегральным уравнением Вольтерра

Агшин Абиль оглы Абдуллаев
Бакинский государственный университет, Институт Систем управления НАН Азербайджана
г. Баку, Азербайджан
agshin-abdullayev@mail.ru
aqshinabiloqlu@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления о минимуме многоточечного функционала, определенного на решениях нелинейного интегрального уравнения, получены неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Также, используя их, установлен аналог уравнения Эйлера и получены конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка. Изучены особые, в классическом смысле, управления на оптимальность.

Ключевые слова: *задача оптимального управления; многоточечный функционал качества; функция Гамильтона–Понтрягина; необходимое условие оптимальности; допустимое управление, аналог уравнения Эйлера, аналог уравнения Лежандра–Клебша, особое управление в классическом смысле*

Для цитирования: *Абдуллаев А.А.* Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в задаче управления нелинейным интегральным уравнением Вольтерра // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1(68). С. 6–17 . DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-6-17. https://elibrary.ru/bubykz.

Благодарности: автор выражает благодарность профессору К.Б. Мансимову за полезные замечания.

Статья поступила в редакцию 07.08.2024; одобрена после рецензирования 12.02.2025; принята к публикации 15.03.2025.

MATHEMATICS

Research article

An Analogue of the Euler Equation and Necessary Conditions for Second-order Optimality in an Optimal Control Problem Described by Nonlinear Volterra Integral Equation

Agshin Abil Abdullayev
Baku State University, Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan,
Baku, Azerbaijan
agshin-abdullayev@mail.ru
aqshinabiloqlu@gmail.com

Abstract. The optimal control problem of the minimum of a multipoint functional defined on solutions of a nonlinear integral equation is considered, and implicit necessary conditions for optimality of the first and second orders are obtained. Also using them, an analogue of the Euler equation was established and constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality were obtained. Singular optimality controls in the classical sense have been studied.

Keywords: *optimal control problem; quality functionality; Hamilton–Pontryagin function; necessary condition for optimality; admissible control, analogue of Euler's equation, analogue of the Legendre-Clebsch equation, singular control in the classical sense*

For citation: Abdullayev, A. A. (2025), "An Analogue of the Euler Equation and Necessary Conditions for Second-order Optimality in an Optimal Control Problem Described by Nonlinear Volterra Integral Equation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(68), pp. 6-17. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-6-17. https://elibrary.ru/bubykz.

Acknowledgments: the author expresses his gratitude to Professor K.B. Mansimov for his helpful comments.

The article was submitted 07.08.2024; approved after reviewing 12.02.2025; accepted for publication 15.03.2025.

Введение

Многие сложные процессы описываются различными интегральными уравнениями типа Вольтерра (см. напр. [1–6]). Поэтому изучаются различные задачи оптимального управления, описываемые интегральными уравнениями. В работах [1, 7–9] и др. исследованы ряд задач оптимального управления, описываемые интегральными уравнениями типа Вольтерра с критериями качества типа Лагранжа или же терминального типа, и установлены некоторые необходимые условия оптимальности первого порядка при различных предположениях на данные задачи.

Но нередко условия оптимальности первого порядка, вырождаясь, становятся неэффективными (см. напр. [10]). Поэтому возникает необходимость в получении необходимых условий оптимальности высокого, в частности второго, порядка. Они позволяют также сузить множество допустимых управлений, подозрительных на оптимальность.

В предлагаемой работе рассматривается задача о минимуме многоточечного функционала, определенного на решениях нелинейного интегрального уравнения, порожденных всевозможными кусочно-непрерывными управляющими функциями (с конечным числом точек разрыва первого рода) при предположении об открытости области управления.

Для начала были получены неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Используя их, был установлен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка), и получен ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка.

В конце работы изучены особые в классическом смысле [10] управления на оптимальность.

Постановка задачи

Предположим, что управляемый объект описывается на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ системой нелинейных одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра.

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} f\big(t_1, \tau, z(\tau), u(\tau)\big) d\tau\,, \quad \tau, t \in [t_0, t_1]. \tag{1}$$

Здесь $f(t,\tau,z,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) до второго порядка включительно, $u(t)$ – r-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U-$ r-мерного линейного пространства R^r т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r, t\in[t_0 t_1]. \quad (2)$$

Каждую управляющую функцию с вышеприведенными свойствами *назовем допустимым управлением.*

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u(t)$ интегральное уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение $z(t)$ интегрального уравнения (1).

На решениях интегрального уравнения (1), порожденных допустимыми управлениями, определим многоточечный функционал:

$$J(u)=\varphi\big(z(T_1),z(T_2),\dots,z(T_k)\big). \quad (3)$$

Здесь $\varphi(z_1,z_2,\dots z_k)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая скалярная функция, а $T_i\in(t_o,t_1]$, $i=\overline{1,k}$ – заданные точки, причем

$$t_0<T_1<T_2<\cdots<T_k\le t_1.$$

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (3) при ограничениях (1), (2).

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (3) при ограничениях (1), (2), назовем оптимальным управлением.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков, носящие конструктивный характер. Как видно, многоточечный функционал (3) является более общим, чем терминальный функционал.

Вычисление первых и вторых вариаций функционала качества

Предположим, что $\big(u(t),z(t)\big)$ и $\big(\bar u(t)=u(t)+\Delta u(t),\bar z(t)=z(t)+\Delta z(t)\big)$ некоторые допустимые процессы.

Тогда ясно, что приращение $\Delta z(t)$ будет решением интегрального уравнения

$$\Delta z(t)=\int_{t_0}^{t}\Big(f\big(t,\tau,\bar z(\tau),\bar u(\tau)\big)-f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)\Big)d\tau. \quad (4)$$

Запишем приращение многоточечного функционала (3):

$$\Delta J(u)=J(\bar u)-J(u)=\varphi\big(\bar z(T_1),\bar z(T_2)\dots\bar z(T_k)\big)-\varphi\big(z(T_1),z(T_2)\dots z(T_k)\big). \quad (5)$$

Пусть $\psi(t)$ пока произвольная n – мерная вектор-функция.

Тогда из тождества (4) получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta z(t)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\psi'(t)\Big(f\big(t,\tau,\bar z(\tau),\bar u(\tau)\big)-f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)\Big)d\tau\right]dt. \quad (6)$$

Из формулы (6), применяя формулу Дирихле (см. напр. [11], с. 136), будем иметь

$$\int_{t}^{t}\psi'(t)\Delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\Big(f\big(\tau,t,\bar z(t),\bar u(t)\big)-f\big(\tau,t,z(t),u(t)\big)\Big)d\tau\right]dt. \quad (7)$$

Далее из соотношения (4) следует, что

$$\Delta z(T_i)=\int_{t_0}^{T_i}\Big(f\big(T_i,t,\bar z(t),\bar u(t)\big)-f\big(T_i,t,z(t),u(t)\big)\Big)dt.$$

Пусть $\alpha_i(t), i=\overline{1,k}$ характеристические функции на отрезках $[t_0,T_i], i=\overline{1,k}$. Тогда последнее соотношение может быть записано в виде

$$\Delta x(T_i)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\Big(f\big(T_i,t,\bar z(t),\bar u(t)\big)-f\big(T_i,t,z(t),u(t)\big)\Big)dt. \tag{8}$$

Используя формулу Тейлора из (5), получим, что

$$\Delta J(u)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\big(z(T_1),z(T_2),\dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i}\Delta z(T_i)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{k}\Delta z'(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1),\ z(T_2),\dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i\partial z_j}\Delta z(T_j)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i)\|\right]^2\right). \tag{9}$$

Заметим, что здесь выражение $\|a\|$ является нормой вектора $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ в R^n, которая вычисляется по формуле $\|a\|=\sum_{i=1}^{k}|a_i|$, а $(')$ штрих – операция транспонирования.

Учитывая формулы (7) и (8) в формуле приращения (9) получим

$$\Delta J(u)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi'\big(z(T_1),z(T_2),\dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i}\alpha_i(t)\Big(f\big(T_i,t,\bar z(t),\bar u(t)\big)+f\big(T_i,t,z(t),u(t)\big)\Big)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta z(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\Big(f\big(\tau,t,\bar z(t),\bar u(t)\big)-f\big(\tau,t,z(t),u(t)\big)\Big)d\tau\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta z(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1),\ z(T_2),\dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i\partial z_j}\Delta z(T_j)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\big(\Delta z(T_i,X_i)\big)\right]^2\right). \tag{10}$$

Теперь для рассматриваемой задачи оптимального управления введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина в виде:

$$H\ (t,z(t),u(t),\psi(t)\ )=$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\frac{\partial\varphi\big(z(T_1),z(T_2),.,z(T_k)\big)}{\partial z_i}f\big(T_i,t,z(t),u(t)\big)+$$

$$+\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)f\big(\tau,t,z(t),u(t)\big)d\tau\,.$$

Учитывая вид функции Гамильтона–Понтрягина в формуле (10), получим

$$\Delta J(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta z(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big(H\Big(t,\bar z(t),\bar u(t),\bar\psi(t)\Big)-H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)\Big)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta z'(T_i)\frac{\partial'\varphi\big(z(T_1),z(T_2),\dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i\partial z_j}\Delta z(T_j)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\big(\Delta z'(T_i)\big)\right]^2\right). \tag{11}$$

А из формулы (11), на основании формулы Тейлора, будем иметь

$$\Delta J(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial H'\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z}\Delta z(t)+\frac{\partial H'\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\Delta u(t)\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\Delta z'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t)+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\Delta z(t)+\right.$$

$$\left.+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t)\right]dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}o_2([\|\Delta z(t)\|+\|\Delta u(t)\|]^2)dt+ \qquad (12)$$

$$+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i)\|\right]^2\right)+\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta z(t)dt.$$

Предположим, что $\psi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\psi(t)=\frac{\partial H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z}. \qquad (13)$$

Соотношение (13) является линейным неоднородным интегральным уравнением относительно $\psi(t)$ (сопряженная система) [10–12].

При этом формула приращения (12) примет вид:

$$\Delta J(u)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H'\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\Delta u(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\Delta z'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t)\right.$$

$$+$$

$$\left.+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\Delta z(t)+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t)\right]dt+$$

$$+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i)\|\right]^2\right)-\int\limits_{t_0}^{t_1}o_2([\|\Delta z(t)\|+\|\Delta u(t)\|]^2)dt. \qquad (14)$$

В дальнейшем нам понадобится оценка нормы приращения траектории $x(t)$.

Из формулы (4), переходя к норме, и используя условие Липшица получаем, что

$$\|\Delta z(t)\|\le L_1\int\limits_{t_0}^{t}[\|\Delta z(\tau)\|+\|\Delta u(\tau)\|]d\tau,$$

где $L_1=const>0$ некоторое постоянное.

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла–Беллмана (см. напр. [11]), получим, что

$$\|\Delta z(t)\|\le L_2\int\limits_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau)\|d\tau, \qquad (15)$$

$(L_2=const>0)$.

Из уравнения (4) получаем, что $\Delta z(t)$ является решением линеаризованной системы уравнений

$$\Delta z(t)=-\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z}\Delta z(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}\Delta u(\tau)+o_3(\|\Delta z(\tau)\|+\|\Delta u(\tau)\|)\right]d\tau. \qquad (16)$$

По предположению множество U (область управления) является открытой.

Поэтому специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta u(t), t \in [t_0, t_1]. \tag{17}$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_1]$ произвольная кусочно-непрерывная и ограниченная вектор-функция.

Через $\Delta z_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $z(t)$, отвечающее специальному приращению (17) управления $u(t)$.

Из оценки (15) следует, что

$$\|\Delta z_\varepsilon(t)\| \le L_3 \varepsilon, t \in [t_0, t_1], \tag{18}$$
$$(L_3 = const > 0)$$

Учитывая формулу (17) и оценку (18) в формуле (16), получим, что

$$\Delta z_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z} \Delta z_\varepsilon(\tau)\, d\tau + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u} \delta u(\tau) d\tau + o_4(\varepsilon; t).$$

При помощи этого разложения доказывается

Лемма. Для специального приращения $\Delta z_\varepsilon(t)$ траектории $z(t)$ имеет место разложение

$$\Delta z_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta z(t) + o_5(\varepsilon; t), \tag{19}$$

здесь $\delta z(t)$ является решением линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра

$$\delta z(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z} \delta z(\tau) + \frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u} \delta u(\tau) \right] d\tau. \tag{20}$$

Лемма доказывается по схеме, аналогичной схеме из [10], используемой в случае задачи оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Учитывая разложение (19) и формулу (17) в приращении (14) функционала, получим, что

$$S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, z(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u} \delta u(t) dt +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta z'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1), z(T_2), ., z(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} \delta z(T_j) -$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta z'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, z(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial z^2} \delta z(t) + 2\delta u'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, z(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u \partial z} \delta z(t) + \right.$$
$$\left. + \delta u'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, z(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u^2} \delta u(t) \right] dt + o(\varepsilon^2).$$

На основании этого разложения заключаем, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала (3) имеют, соответственно, вид:

$$\delta^1 J(u; \delta u) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, z(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u} \delta u(t) dt, \tag{21}$$

$$\delta^2 J(u; \delta u) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta z'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1), z(T_2), \dots, z(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} \delta z(T_j) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\delta z(t)+2\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t)+\right.$$
$$\left.+\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\delta u(t)\right]dt. \tag{22}$$

Необходимые условия оптимальности

Поскольку по предположению множество U открытое, то для оптимальности управления необходимо, чтобы первая вариация функционала вдоль оптимального управления $u(t)$ была равной нулю и вторая должна быть неотрицательной (см. напр. [10–13]).

Поэтому из соотношений (21) и (22) следует, что вдоль оптимального управления $u(t)$, для всех $\delta u(t)$, $t\in T$ (вариация управления)

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H'\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\delta u(t)dt=0, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\delta z'(T_i)\frac{\partial^2\varphi(z(T_1),\dots,z(T_k))}{\partial z_i\partial z_j}\delta z(T_j)-\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta z'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\delta z(t)+\right.$$
$$\left.+2\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t)+\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\delta u(t)\right]dt\geq 0. \tag{24}$$

Соотношения (23) и (24) являются неявными необходимыми условиями первого и второго порядка, соответственно. Из них надо получить необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Из тождества (23) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношение

$$\frac{\partial H\big(\theta,z(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\big)}{\partial u}=0 \tag{25}$$

выполнялось для всех $\theta\in[t_0,t_1)$.

Здесь $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u(t)$.

Соотношение (25) является аналогом уравнения Эйлера из вариационного исчисления (см. напр. [10, 11]).

Каждое допустимое управление, являющееся решением уравнения Эйлера (25), назовем *классической экстремалью*.

В принципе, число классических экстремалей может быть достаточно большим.

Поэтому необходимо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка носящие явный характер.

Пусть $R(t,\tau)$ $(n\times n)$ – матричная функция, являющаяся решением матричного линейного интегрального уравнения

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}R(t,s)\frac{\partial f\big(s,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z}ds+\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z}.$$

Тогда решение $z(t)$ уравнения (20) допускает представление (см. напр. [6])

$$\delta z(t)=\int_{t_o}^{t}R(t,\tau)\left(\int_{t_o}^{\tau}\frac{\partial f(\tau,s,z(s),u(s)}{\partial u}\delta u(s)ds\right)d\tau+\int_{t_o}^{t}\frac{\partial f(t,\tau,z(\tau),u(\tau)}{\partial u}\delta u(\tau)d\tau.$$

Отсюда применяя формулу Дирихле получаем, что

$$\delta z(t)=\int_{t_o}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}R(t,s)\frac{\partial f\big(s,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial z}\delta u(\tau)ds\right]d\tau+\int_{t_o}^{t}\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}\delta u(\tau)dt.$$

Полагая

$$Q(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}R(t,s)\frac{\partial f\big(s,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}ds+\frac{\partial f\big(t,\tau,z(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u},$$

получим

$$\delta z(\,t)=\int_{t_0}^{t}Q(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Из представления (26) следует, что

$$\delta z(\,T_i)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\,Q(T_i,t)\delta u(t)dt. \tag{27}$$

Теперь, используя представления (26) и (27), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (22).

На основе формулы (27) получаем, что

$$\delta z'(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1),z(T_2)\ \dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i\partial z_j}\delta z\big(T_j\big)=$$

$$=\int_{t_o}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(\tau)\,\alpha_j(s)\delta u'(\tau)Q'(T_i,\tau)$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1),z(T_2)\ \dots,z(T_k)\big)}{\partial z_i\partial z_j}Q\big(T_j,s\big)\delta u(s)dsd\tau. \tag{28}$$

Используя формулу (26), будем иметь:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,\ z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}Q(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau\right]dt, \tag{29}$$

$$\int_{t_0}^{t}\delta z'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\delta z(t)at=$$

$$=\int_{t_o}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}Q(t,s)dt\right]\delta u(s)dt. \tag{30}$$

По аналогии ([12]) введем обозначение

$$K(\tau,s) = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i(\tau)\alpha_j(s)\,Q'(T_i,\tau)\,\frac{\partial^2\varphi(z(T_1),z(T_2),\dots,z(T_k))}{\partial z_i\partial z_j}\,Q\big(T_j,s\big) +$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} Q'(t,\tau)\,\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial z^2}\,Q(t,s)dt. \qquad (31)$$

Учитывая введенные обозначение $K(\tau,s)$ и тождества (28)–(31) из неравенства (22) получим.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_o}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)K(\tau,s)\delta u(s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\delta u'(t)\,\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial z}\,Q(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau\right]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)\,\frac{\partial^2 H\big(t,z(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\,\delta u(t)dt \le 0 \qquad (32)$$

выполнялось для всех $\delta(u) \in R^r,\ t \in T$.

Как видно, неравенство (32), являясь общим интегральным необходимым условием оптимальности второго порядка, носит конструктивный характер.

Более того, из него можно, за счет произвольности допустимых вариаций $\delta u(t)$ управляющей функции $u(t)$ получить ряд еще более легко проверяемых необходимых условий оптимальности.

Приведем одну из них.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v'\,\frac{\partial^2 H\big(\theta,z(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\big)}{\partial u^2}\,v \le 0 \qquad (33)$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0,t_1)$ и $v \in R^r$.

Здесь $\theta \in [t_0,t_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u(t)$.

Неравенство (33) есть аналог условия Лежандра–Клебша из вариационного исчисления [10–12] для рассматриваемой задачи.

Докажем условие оптимальности (33).

Пусть $\theta \in [t_0,t_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u(t)$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое произвольное число, такое что, $\theta < \varepsilon < t_1$, и $v \in R^r$ произвольный вектор.

В силу произвольности допустимой вариации $\delta u(t)$ управления $u(t)$, его определим по формуле

$$\delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta,\theta+\varepsilon), \\ 0, & t \in [t_0,t_1]\backslash[\theta,\theta+\varepsilon). \end{cases} \qquad (34)$$

Учитывая выражение $\delta u_\varepsilon(t)$, в формуле (34) из неравенства (32), после некоторых преобразований получим, что

$$\varepsilon v'\,\frac{\partial^2 H\big(\theta,z(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\big)}{\partial u^2}\,v + o(\varepsilon) \le 0. \qquad (35)$$

Разделив обе части последнего неравенства на ε и переходя к переделу при $\varepsilon \to 0$ получим утверждение теоремы 3.

Теорема 2 позволяет получить необходимые условия оптимальности также при вырождении аналога условия Лежандра–Клебша.

По аналогии с работами [10, 12] введем понятие особого в классическом смысле управления.

Определение. Если для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $v \in R^r$

$$v' \frac{\partial^2 H\big(\theta, z(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u^2} v = 0,$$

то классический экстремаль будем называть *особым* (в классическом смысле) управлением в задаче (1)–(3).

Из введенного определения ясно, что для особых в классическом смысле управлений аналог условия Лежандра–Клебша, вырождаясь, становится неэффективным.

Пусть $u(t)$ особое (в классическом смысле) оптимальное управление.

Учитывая формулу (36) в неравенстве (32), получим, что в особом случае

$$\begin{gathered}\varepsilon^2 v' K(\theta,\theta) v + \\ +\varepsilon^2 v' \frac{\partial^2 H\big(\theta, z(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u \partial z} Q(\theta,\theta) v + \\ +o(\varepsilon^2) \le 0 \,.\end{gathered}$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$v' \left[K(\theta,\theta) + \frac{\partial^2 H\big(\theta, z(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u \partial z} Q(\theta,\theta) \right] v \le 0. \tag{36}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство (36) выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in R^r$.

Замечание. Как известно, (см. напр. [13]) применение серии игольчатых вариаций при доказательстве необходимых условий оптимальности первого порядка не усиливает ни принципа максимума Понтрягина, ни его следствия. В особом случае же использование серии игольчатых вариаций позволяет усилить необходимые условия оптимальности, особых управлений, полученных с помощью простых игольчатых вариаций (см. напр. [13, 14, 16, 17]). Исходя из этого, результат Теоремы 4 можно усилить.

Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков, в частности аналог условия Лежандра–Клебша для задачи оптимального управления, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нетиповым критерием качества, получены в работе [15].

Заключение

В работе рассматривается задача минимизации многоточечного функционала, определенного на решениях нелинейного интегрального уравнения в классе кусочно-непрерывных управляющих функций при предположении, что область управления является ограниченным и открытым множеством. Методом приращения выведены первая и вторая вариации критерия качества.

Из условия равенства первой вариации функционала вдоль оптимального управления получен аналог уравнения Эйлера.

А из условия неотрицательности второй вариации функционала получены общие необходимые условия оптимальности, позволяющие установить аналог условия Лежандра–Клебша и исследовать особые (в классическом смысле) управления на оптимальность.

Список источников

1. *Винокуров В.Р.* Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов, сер. Математика. 1967, № 7. С. 21–33.
2. *Владимиров В.С.* Уравнение математической физики. М.: Наука, 1976, 528 с.
3. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
4. *Абуладзе А.А.* Задачи оптимального управления для систем, описываемых интегральными уравнениями. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1988. 117 с.
5. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 156 с.
6. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV, ч. I. М.: Наука, 1974. 336 с.
7. *Мансимов К.Б., Мустафаев М.Г.* Некоторые необходимые условия оптимальности в задачах управления, описываемые интегральными уравнениями типа Вольтерра // Известия АН Азерб. ССР. Сер. физ-техн. и матем. Наук. 1985, № 5. С. 35–41.
8. *Carlson D.A.* An elementary Proof of the maximum principle for optimal control problems gov-erned by Volterra integral equations // Yourn. of Optim. theory and Apple. 1987. Vol. 54, № L. P. 32–45. DOI: 10.1007/bf00940404 EDN: YLWVEX.
9. *De la Vega Constanta.* Necessary conditions for optimal terminal time control problems governed by a Volterra integral equation // Journal Optimization theory and Apple. 2006. Vol. 130, no. 1. P. 79–93. DOI: 10.1007/s10957-006-9087-7.
10. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 259 с.
11. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.
12. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: "Элм", 1999. 176 с.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: изд-во "Наука и техника", 1974. 272 с.
14. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления в системах Гурса–Дарбу. Баку: "Элм", 2010. 360 с.
15. *Мансимов К.Б., Нагиева И.Ф.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетиповым критерием качества // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023, № 64. С. 11–20. DOI: 10.17223/19988605/64/2 EDN: GHXADE.
16. *Гороховик С.Я.* Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения. 1975, № 10. С. 1765–1773.
17. *Срочко В.А.* Многоточечные условия оптимальности для особых управлений // В сб. "Численные методы анализа (прикладная математика)". Иркутск, СО АН СССР, 1976. С. 43–50.

References

1. Vinokurov, V. R. (1967), "Optimal control of processes described by integral equations", *Izvestiya Vuzov, ser. Matematika*, no. 7, pp. 21-33.

2. Vladimirov, V. S. (1982), "Equation of mathematical physics", Nauka, Moscow, Russia, 1976, 528 p.
3. Volterra, V. (1982), "Theory of functionals, integral and integro-differential equations", Nauka, Moscow, Russia, 304 p.
4. Abuladze, A. A. (1988), "Optimal control problems for systems described by integral equations", Tbilisi, Izvestiya TSU, 117 p.
5. Vasilyeva, A. B. and Tikhonov, N. A. (1989), "Integral equations", Moscow State University Press, Moscow, Russia, 156 p.
6. Smirnov, V. I. (1974), "Course in Higher Mathematics", vol. IV, part I, Nauka, Moscow, Russia, 336 p.
7. Mansimov, K. B., and Mustafaev, M. G. (1985), "Some necessary optimality conditions in control problems described by Volterra-type integral equations", *Bulletin of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Phys.-Tech. and Mathematical Sciences,* no. 5, pp. 35-41.
8. Carlson, D. A. (1987), "An elementary proof of the maximum principle for optimal control problems governed by Volterra integral equations", *Journ. of Optim. Theory and Apple.* vol. 54, NL, pp. 32-45.
9. De la Vega Constanta (2006), "Necessary conditions for optimal terminal time control problems governed by a Volterra integral equation", *Journal Optimization theory and Apple*, vol. 130, no. 1, pp. 79-93.
10. Gabasov, R. and Kirillova, F.M. (2011), "Singular optimal controls", Librokom, Moscow, 259 p.
11. Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M. and Fomin, S. V. (2018), "Optimal control", Fizmatlit, Moscow, 384 p.
12. Mansimov, K.B. (1999), "Singular controls in systems with delay", Elm, Baku, 176 p.
13. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (1974), "Maximum principle in the theory of optimal control", Science and Technology Publishing House, Minsk, 272 p.
14. Mansimov, K. B. and Mardanov, M .J. (2010), "Qualitative theory of optimal control in Goursat-Darboux systems", Elm, Baku, 360 p.
15. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem with a non-standard quality criterion", *Bulletin of Tomsk State University*, [Controls, computing engineering and informatics], no. 64, pp. 11-20.
16. Gorokhovik, S. Ya. (1975), "Necessary conditions for optimality in a problem with a moving right end of the trajectory", *Differential equations,* no. 10, pp. 1765-1773.
17. Srochko, V. A. (1976), "Multipoint optimality conditions for singular controls", *In the collection "Numerical methods of analysis (applied mathematics)",* Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, Irkutsk, pp. 43-50.

Информация об авторе:

А. А. Абдуллаев – кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет (Az, 1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), Институт Систем управления НАН Азербайджана (Az, 1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, 68).

Information about the author:

A. A. Abdullaev – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor Baku State University (23, Z. Khalilova St., Baku, Azerbaijan, Az, 1148), Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan (68, Bakhtiyar Vahabzade St., Baku, Azerbaijan, Az, 1141).