

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534-16

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34

<https://elibrary.ru/ghrznm>

## Численный анализ собственных колебаний трехслойной пластины, находящейся под действием температурной нагрузки

**Александр Олегович Каменских**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

e-mail: kamenskikh.a@icmm.ru

**Аннотация.** Одним из вариантов управления динамическим состоянием тонкостенных элементов конструкции является создание в них предварительных напряжений. В пластинах и оболочках они могут быть индуцированы посредством разнообразных актуаторов, smart-материалов или неупругого деформирования. Деформации, возникающие из-за неравномерного распределения температуры, различных коэффициентов линейного теплового расширения материалов конструкции или ее закрепления, также сказываются на собственных частотах. Это может привести в том числе к нежелательным явлениям, таким как потеря устойчивости или перемещение спектра в область частот, подверженных резонансу. В настоящей работе с помощью метода конечных элементов исследуется влияние температурного нагружения на собственные частоты трехслойной пластины. Полученное решение спектральной задачи сравнивается с результатами других авторов. Рассматриваются пластины с разными компоновками слоев и двумя видами закрепления: консольным и зажатом с двух противоположных торцов. Построены зависимости относительного изменения первых трех собственных частот пластины от приращения температуры. Показано, что возникающее напряженно-деформированное состояние слабо влияет на собственные частоты незакрепленной пластины. Результаты численных расчетов для зажатой с двух сторон пластины демонстрируют, что при увеличении ее жесткости, повышаются критические температуры потери устойчивости.

**Ключевые слова:** пластины; свободные колебания; устойчивость; предварительное напряженное состояние

**Для цитирования:** Каменских А.О. Численный анализ собственных колебаний трехслойной пластины, находящейся под действием температурной нагрузки // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 23–34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34. <https://elibrary.ru/ghrznm>.

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Статья поступила в редакцию 30.07.2024; одобрена после рецензирования 18.09.2024; принята к публикации 06.10.2024.



Эта работа © 2024 Каменских А. О. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MECHANICS

Research article

## Numerical Analysis of Natural Frequencies of Three-layer Plate under Temperature Load

**Alexander O. Kamenskikh**Institute of Continuous Media Mechanic, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia  
e-mail: kamenskikh.a@icmm.ru

**Abstract.** One of the options for controlling the dynamic state of thin-walled structures is the creation of prestress state within. Stress field can be induced by various actuators, smart materials or plastic deformation. Deformations arising from uneven temperature distribution, different coefficient of thermal expansion of the materials or boundary conditions also affect the natural frequencies. This can lead to undesirable phenomena such as loss of stability or spectrum moving into the region of frequencies subject to resonance. In this paper, the influence of temperature loading on the natural frequencies of a three-layer plate is investigated by the finite element method. The obtained solution of the spectral problem is compared with the results of other authors. Plates with different configurations and boundary conditions are considered. The relative change of the plate first three natural frequencies on temperature load are received. It is shown that the resulting prestressed state has poor effect on natural frequencies free-edges plate. The results of numerical calculations for a plate clamped on both sides demonstrate that with increasing stiffness, the critical temperatures also increase.

**Keywords:** *plates; natural frequencies; buckling; prestress*

**For citation:** Kamenskikh, A. O. (2024), "Numerical Analysis of Natural Frequencies of Three-layer Plate under Temperature Load", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 23-34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34. <https://elibrary.ru/ghrznm>.

**Acknowledgments:** the study was made in the framework of the government task, registration number of the theme 124020700047-3.

*The article was submitted 30.07.2024; approved after reviewing 18.09.2024; accepted for publication 06.10.2024.*

### Введение

В промышленности все чаще находят применение конструкции, состоящие из комбинации различных материалов. Тонкостенные многослойные элементы используются для обшивок многих аэрокосмических аппаратов и устройств, так как сочетают в себе повышенные характеристики удельной прочности и жесткости, высокие ударопрочность и коэффициент демпфирования [1, 2].

Температурные деформации, вызванные эксплуатацией в разных природных условиях, существенно изменяют картину напряжений в теле. Они способны привести к статической потере устойчивости и изменению спектра собственных частот колебаний конструкции.

Исследования проблемы температурной устойчивости тонкостенных конструкций возникли сравнительно давно [3–5], но и по сей день не потеряли своей актуальности [6–9]. В статье [9] рассматривается влияние неравномерного распределения армирующего волокна в композитных пластинах на ее термо- и аэроупругую устойчивость. Результаты исследования показывают, что концентрирование армирования в центре пластины приводит как к повышению критической температурной нагрузки потери устойчивости, так и к увеличению низшей собственной частоты и критической скорости набегающего потока воздуха, по сравнению с пластиной с равномерным распределением армирования.

В работе [7] авторы провели численное моделирование и эксперимент по построению зависимости прогиба защемленной со всех сторон пластины от температурной нагрузки. Показано, что у композитных пластин происходит смена формы потери устойчивости при их нагреве до определенной температуры, тогда как изотропная алюминиевая пластина не подвержена этому явлению. Результаты эксперимента показали существенно большие прогибы и меньшие критические нагрузки для всех исследованных образцов. Авторы связывают это с их неидеальным изготовлением и с отсутствием точных характеристик материалов.

Серия работ [10–12] посвящена исследованию гидро- и термоупругой устойчивости функционально градиентных (ФГ) цилиндрических оболочек. Результаты статьи [12] демонстрируют, что повышение температуры оболочек с текущей жидкостью сужает диапазон устойчивости, а гидростатическое внутреннее давление, наоборот, расширяет его. Показано, что ФГ оболочка при определенных параметрах конструкции имеет более широкий диапазон устойчивости, чем изготовленная из материала с максимальной жесткостью изотропная оболочка.

В работе [13] решается задача определения собственных частот композитных балок и пластин под различными температурными нагрузками. Проведенные расчеты показывают, что защемленная по всем сторонам пластина теряет устойчивость при повышении температуры. Результаты авторов также демонстрируют, что критическая температурная нагрузка повышается при увеличении толщины композитной пластины.

Следует упомянуть, что не всегда следует избегать потери устойчивости. Существуют исследования, рассматривающие ее как положительное явление, позволяющее создавать smart-конструкции и мета-материалы, аккумулировать энергию и многое другое. Обзор таких работ приводится в [14, 15].

Настоящая статья посвящена установлению влияния температурных напряжений, возникающих в слоистой пластине (ввиду различия коэффициентов линейного теплового расширения материалов), на ее собственные частоты колебаний при изменении толщины и условий закрепления. Работа имеет следующую структуру: математическая постановка и численная реализация задачи о колебаниях кусочно-однородного упругого тела, находящегося под влиянием температурной нагрузки; сравнение результатов численной модели с данными других авторов; результаты моделирования, отражающие чувствительность собственных частот трехслойных пластин к температурному нагружению.

## 1. Математическая постановка и численная реализация

Математическая постановка задачи о колебаниях кусочно-однородного деформированного тела с учетом напряженного состояния, возникающего от изменения температуры, основывается на вариационном уравнении движения при отсутствии внешних нагрузок:

$$\int_V [\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} + \rho(\mathbf{x}) \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}] dV = 0, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор, содержащий компоненты тензора конечных деформаций;  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  – матрица упругости, зависящая от координат  $\mathbf{x}$ ;  $\rho(\mathbf{x})$  – плотность;  $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$  – вектор неизвестных перемещений, где  $u, v, w$  – компоненты перемещений.

На области  $S_d$  заданы кинематические граничные условия:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_d. \quad (2)$$

В уравнении (1) компоненты тензора конечных деформаций можно представить в виде суммы линейной и нелинейной частей:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}\}^T = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{s}, \quad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T,$$

$$\mathbf{s} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T,$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Формулировка задачи о собственных колебаниях с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния основана на линеаризации соотношения (3) относительно состояния с малым отклонением от положения равновесия и представлении решения в виде:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  – функция, зависящая только от координат  $\mathbf{x}$ ;  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – собственная частота колебаний.

После значительных упрощений, исключения величин выше первого порядка малости и учетом (4) окончательно получим:

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \omega^2 \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} dV + \int_V \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{s} dV + \int_V \left( \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_0 \mathbf{s} + \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_0 \mathbf{s} \right) dV = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) соответствует гипотезе предварительного напряженного и деформированного состояния конструкции. Наличие слагаемых, содержащих  $\mathbf{S}_0$ , позволяет принимать во внимание начальные несовершенства формы поверхности оболочки. Опустив в (5) соответствующие им интегралы, получим выражение, которое соответствует гипотезе предварительного напряженного недеформированного состояния:

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \omega^2 \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} dV + \int_V \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{s} dV = 0. \quad (6)$$

Элементы матрицы  $\boldsymbol{\sigma}_0$  находятся из решения статической задачи деформирования тела температурными нагрузками:

$$\int_V (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \Delta T) dV = 0, \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  – вектор коэффициентов линейного теплового расширения (КЛТР);

$\Delta T$  – разница температур.

Решение задачи о собственных колебаниях (6) осуществляется методом конечных элементов (МКЭ) в программном обеспечении ANSYS Mechanical APDL. Кусочно-однородное упругое тело дискретизируется 20-узловыми конечными элементами с квадратичной аппроксимацией всех компонент вектора перемещений (solid186). После применения известных процедур МКЭ дискретный аналог (6) примет вид:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Типовые матрица масс  $\mathbf{M}$ , матрица жесткости  $\mathbf{K}$  и матрица геометрической жесткости  $\mathbf{K}_G$  для каждого конечного элемента с объемом  $V^e$  формируются следующим образом:

$$\mathbf{M}^e = \rho(\mathbf{x}) \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV^e, \quad \mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{B} dV^e, \quad \mathbf{K}_G^e = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{G} dV^e, \quad (9)$$

где  $\mathbf{N}$  – матрицы функции форм для вектора обобщенных перемещений  $\mathbf{u}$ ;

$\mathbf{B}$  – матрица, связывающая линейную часть вектора обобщенных деформаций  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  с узловыми значениями обобщенных перемещений упругого тела;

$\mathbf{G}$  – матрица, связывающая вектор деформаций  $\mathbf{s}$  с узловыми значениями обобщенных перемещений упругого тела, верхний индекс «e» обозначает принадлежность матрицы конкретному конечному элементу.

Конечно-элементный аналог задачи о температурном деформировании (7) имеет вид:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{F}_0^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \Delta T dV^e$ .

На рис. 1 приведено сравнение зависимостей собственных частот при изменении температурной нагрузки, полученных на основе рассматриваемой численной модели и ее реализации в пакете ANSYS (Ans), с данными из статьи [13].

В этой работе приведены собственные частоты колебаний квадратной изотропной пластины размерами 1000×1000×10 мм, жестко защемленной по всем торцам. Ее материал имеет следующие свойства:  $E = 73$  ГПа,  $\nu = 0.34$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup> и  $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$ . Спектральная задача решалась авторами методом конечных элементов на основе Carrera Unified Formulation (CUF) и с использованием коммерческого программного обеспечения Abaqus (Abq).

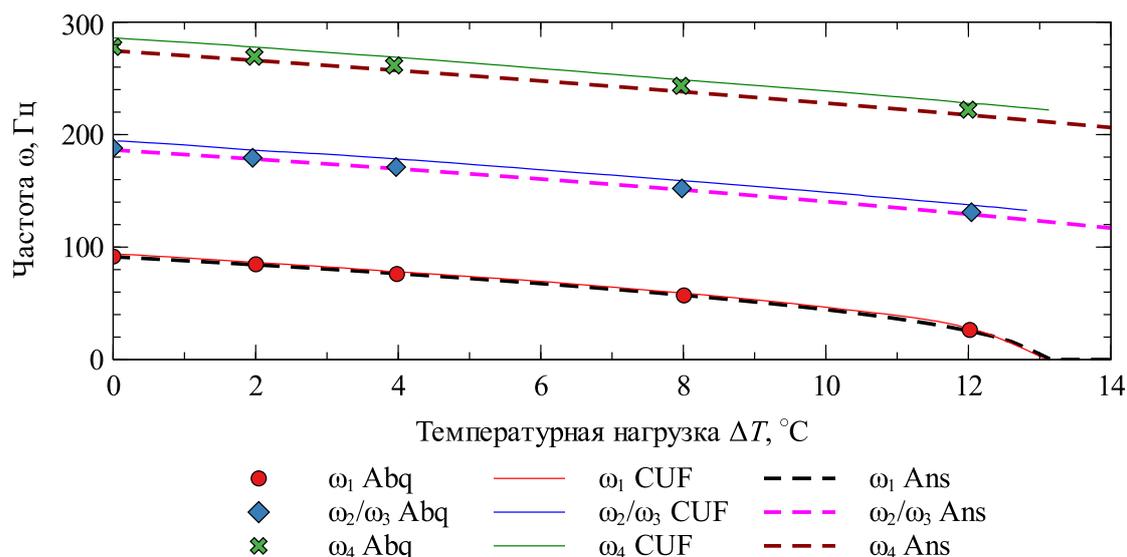


Рис. 1. Зависимость собственной частоты заземленной изотропной пластины от температурной нагрузки

## 2. Результаты расчетов

Рассмотрим трехслойную пластину (длина  $L = 300$  мм, ширина  $W = 200$  мм), состоящую из двух различных комбинаций слоев: АСА (дюралюминий-сталь-дюралюминий) и САС (сталь-дюралюминий-сталь). Механические и физические свойства материалов приведены в табл. 1. Предполагается, что между слоями реализуется идеальный контакт, а свойства материалов не зависят от температуры.

Таблица 1. Механические и физические свойства материалов

Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\alpha \cdot 10^{-6}$ , 1/°C
Сталь (С)	211	0.3	7800	11.0
Дюралюминий (А)	69	0.3	2700	22.9

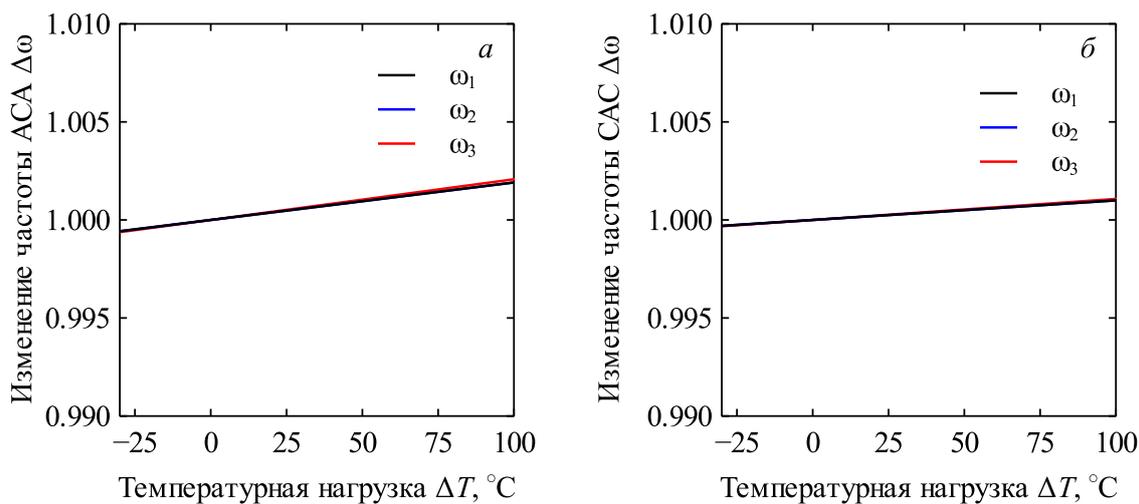
Граничные условия для пластины задаются следующими обозначениями: F – свободный торец; С – заземленный торец. Например, жестко заземленная с двух параллельных торцов пластина обозначается как CFCF.

Ниже представлены графические результаты серии расчетов, которые отражают зависимость относительного изменения собственной частоты от температурной нагрузки, изменяющийся в диапазоне от  $-30^\circ\text{C}$  до  $+100^\circ\text{C}$ . В основном будут приводиться результаты для первых трех собственных частот, так как низшие частоты являются наиболее опасными для тонкостенных конструкций ввиду их большей амплитуды колебаний и риска потери устойчивости по их формам. Также поведение более высоких форм колебаний слабее зависит от наведенного НДС.

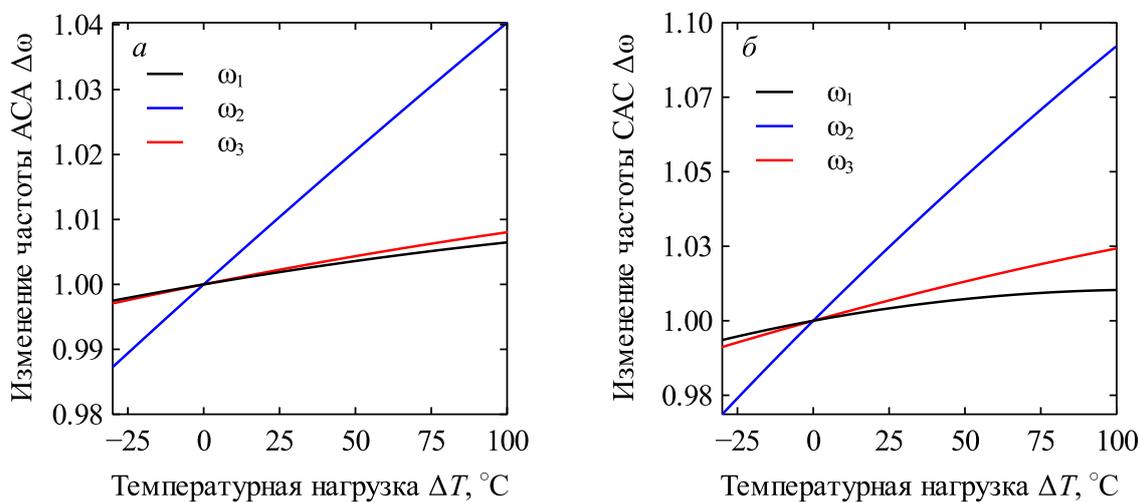
Относительное изменение  $i$ -ой частоты рассчитывалось по следующей формуле:

$$\Delta\omega_i(\Delta T) = \frac{\omega_i(\Delta T)}{\omega_i(0)} . \quad (11)$$

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов для пластин с граничными условиями типа FFFF и CFFF соответственно для двух компоновок при толщине каждого слоя  $h_s = 1$  мм.

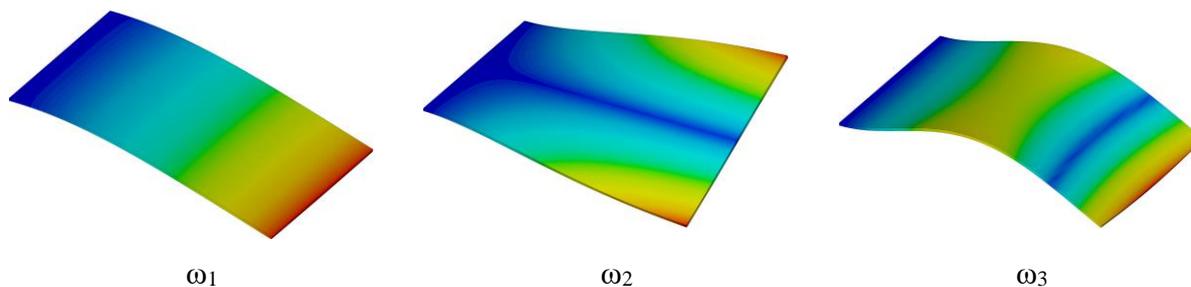


**Рис. 2.** Относительное изменение трех низших частот для пластины FFFF при  $h_s = 1$  мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка



**Рис. 3.** Относительное изменение трех низших частот для пластины CFFF при  $h_s = 1$  мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

Из анализа рис. 2, можно сделать вывод, что температурные напряжения и деформации, возникающие из-за разницы КЛТР  $\alpha$  материалов, не оказывают практически никакого влияния на собственные частоты FFFF пластины. При консольном же закреплении (рис. 3) вторая форма колебаний пластины (рис. 4) становится более восприимчивой к изменению температуры.



**Рис. 4.** Три низших формы колебаний для пластины CFFF

При граничных условиях вида CFCF пластина более чувствительна к температурной нагрузке, так как в этом случае уровень температурных напряжений в конструкции значительно повышается. Это связано не с отсутствием однородности у пластины, а с условиями ее закрепления.

На рис. 5 и 6 приводится относительное изменение частоты пластин с граничными условиями вида CFCF для двух видов компоновок при толщине каждого слоя  $h_s = 1$  мм и  $h_s = 2$  мм соответственно.

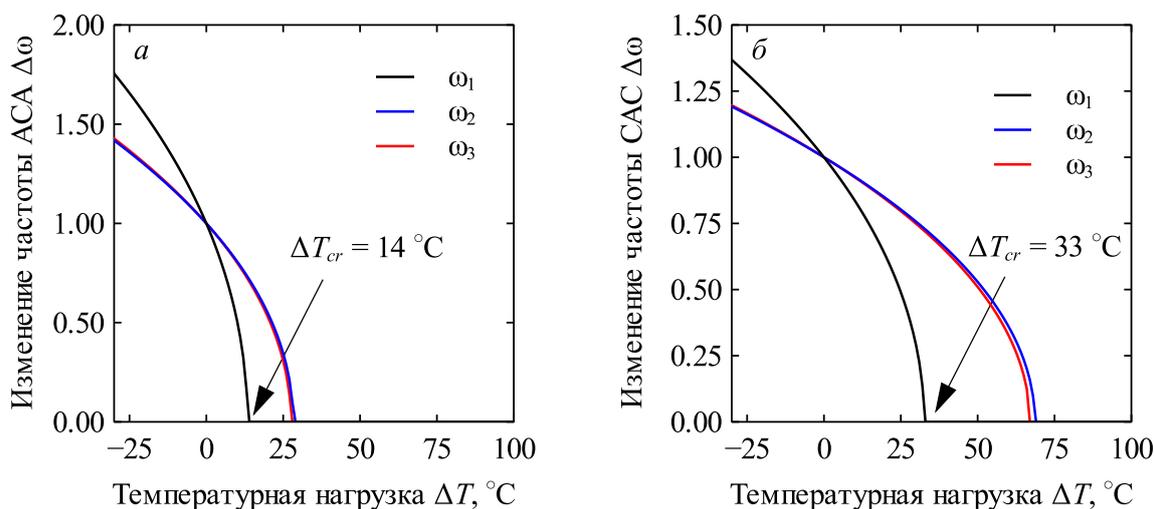


Рис. 5. Относительное изменение трех низших частот для пластины CFCF при  $h_s = 1$  мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

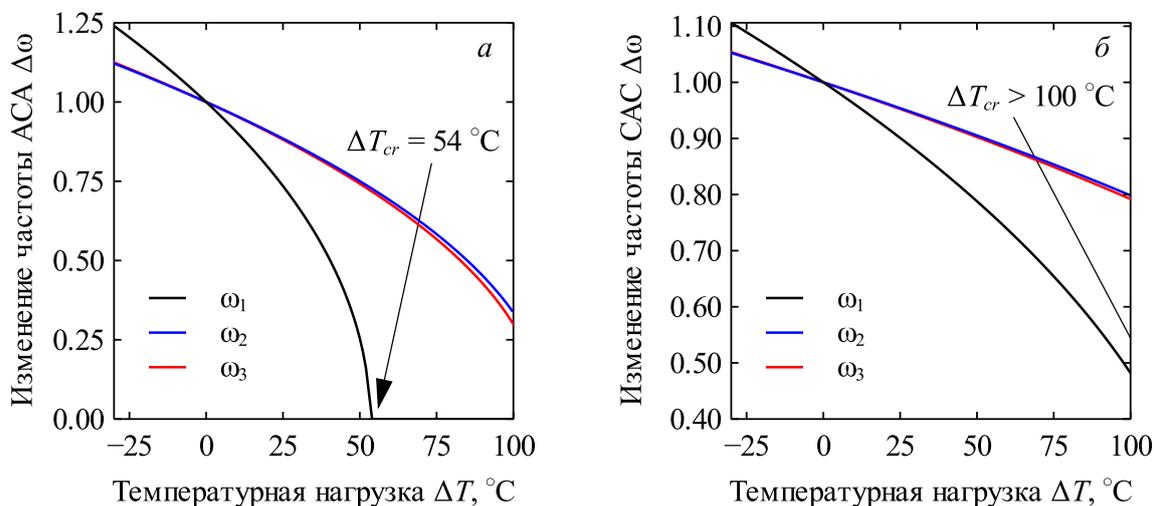


Рис. 6. Относительное изменение трех низших частот для пластины CFCF при  $h_s = 2$  мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

На представленных рисунках при определенной температурной нагрузке ( $\Delta T_{cr}$ ) низшая частота пластины обращается в ноль, что является признаком потери устойчивости [16] по первой форме колебаний (рис. 7).

Для подтверждения факта, что найденные критические температурные нагрузки являются достоверными, был проведен анализ устойчивости.

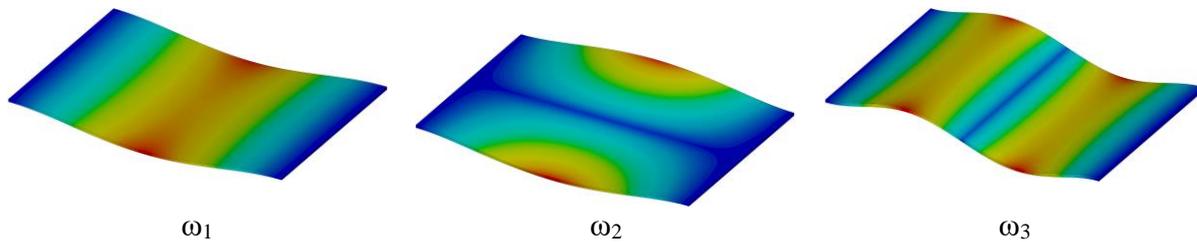
Критические температурные нагрузки, полученные из расчета устойчивости пластины ( $\Delta T_b$ ) и путем анализа ее собственных частот колебаний ( $\Delta T_{cr}$ ), а также их относительная разница приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** Сравнение критических температурных нагрузок

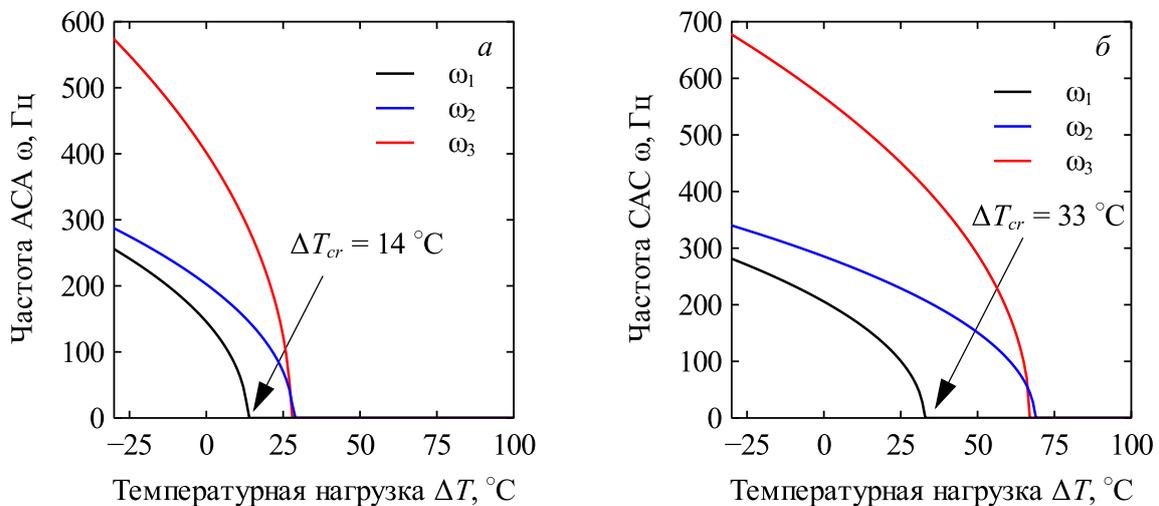
Параметры задачи	$\Delta T_b, ^\circ\text{C}$	$\Delta T_{cr}, ^\circ\text{C}$	$\left  \frac{\Delta T_{cr} - \Delta T_b}{\Delta T_{cr}} \right  \cdot 100\%$
CFCF, $h_s = 1$ мм, АСА	13.371	14	4.49
CFCF, $h_s = 1$ мм, САС	32.548	33	1.37
CFCF, $h_s = 2$ мм, АСА	53.330	54	1.24
CFCF, $h_s = 2$ мм, САС	129.08	>100	—

При изменении толщины слоев увеличиваются собственные частоты ненагруженной пластины, так как ее жесткость растет. Приведенные выше графики позволяют сделать вывод, что пластина при повышении жесткости (как по причине утолщения, так и при использовании жесткой компоновки с двумя слоями стали) остается устойчивой в более широком диапазоне температурных нагрузок. Следует отметить, что анализ закритического поведения необходимо проводить в нелинейной постановке, потому что линейная задача статики не описывает происходящие в действительности процессы.

Из-за приведенных выше зависимостей может показаться, что вторая и третья частоты являются кратными, однако это не так. Данный факт подтверждается рис. 8.



**Рис. 7.** Три низших формы колебаний для пластины CFCF



**Рис. 8.** Изменение трех низших частот для пластины CFCF при  $h_s = 1$  мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

## Заключение

В данной работе приведено исследование зависимости собственных частот колебаний трехслойной пластины от приращения температуры. Рассмотрены несколько вариантов граничных условий и две компоновки из материалов, с отличающимися в два раза КЛТР. Полученные результаты демонстрируют, что температурные напряжения, возникающие в незакрепленной пластине, слабо влияют на собственные частоты трех низших форм колебаний. При граничных условиях вида CFCF влияние температурных напряжений на собственные частоты пластины, возникающие из-за разницы КЛТР материалов, остаются незначительными. В этом случае основной вклад в изменение частот вносят сжимающие напряжения, возникающие из-за граничных условий.

Показано, что более жесткая компоновка конструкции из-за наличия большего количества слоев материала с высоким модулем упругости (стали) либо из-за утолщения пластины приводит к увеличению диапазона температурной устойчивости пластины.

## Список источников

1. Pradeep V., Ganesan N., Bhaskar K. Vibration and thermal buckling of composite sandwich beams with viscoelastic core // *Compos. Struct.* 2007. Vol. 81, № 1. P. 60–69.
2. Prokudin O.A. et al. Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic // *PNRPU Mech. Bull.* 2020. Vol. 2020, № 4. P. 260–270.
3. Meyers C.A., Hyer M.W. Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates // *J. Therm. Stress.* 1991. Vol. 14, № 4. P. 519–540.
4. Prabhu M.R., Dhanaraj R. Thermal buckling of laminated composite plates // *Comput. Struct.* 1994. Vol. 53, № 5. P. 1193–1204.
5. Chen L.W., Chen L.Y. Thermal buckling of laminated composite plates // *J. Therm. Stress.* 1987. Vol. 10, № 4. P. 345–356.
6. Azzara R., Carrera E., Pagani A. Nonlinear and linearized vibration analysis of plates and shells subjected to compressive loading // *Int. J. Non. Linear. Mech.* 2022. Vol. 141. P. 103936.
7. Álvarez J.G., Bisagni C. A study on thermal buckling and mode jumping of metallic and composite plates // *Aerospace.* 2021. Vol. 8, № 2. P. 1–17.
8. Tong B. et al. Free vibration analysis of fiber-reinforced composite multilayer cylindrical shells under hydrostatic pressure // *J. Sound Vib.* 2024. Vol. 587. P. 118511.
9. Kuo S.Y. Flutter of thermally buckled angle-ply laminates with variable fiber spacing // *Compos. Part B Eng.* 2016. Vol. 95. P. 240–251.
10. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Собственные колебания и устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек вращения под действием механических и температурных нагрузок // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2015. Vol. 21, № 2. P. 206–220.
11. Bochkaev S.A., Lekomtsev S.V. Natural vibrations of heated functionally graded cylindrical shells with fluid // *PNRPU Mech. Bull.* 2015. Vol. 2015, № 4. P. 19–35.
12. Bochkaev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydrothermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Containing a Fluid // *Mech. Compos. Mater.* 2016. Vol. 52, № 4. P. 507–520.
13. Azzara R. et al. Vibration analysis of thermally loaded isotropic and composite beam and plate structures // *J. Therm. Stress.* 2023. Vol. 46, № 5. P. 369–386.
14. Champneys A.R. et al. Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploi-

tation of Elastic Instability // *Front. Appl. Math. Stat.* 2019. Vol. 5. P. 1–30.

15. Reis P.M. A Perspective on the Revival of Structural (In) Stability with Novel Opportunities for Function: From Buckliphobia to Buckliphilia // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 2015. Vol. 82, № 11. P. 1–4.

16. Zienkiewicz O. The finite element method in structural and soil mechanics / O. Zienkiewicz, Y. Cheung Citation Key: zienkiewicz1967finite. – McGraw Hill, London, 1967.

## References

1. Pradeep, V., Ganesan, N. and Bhaskar, K. (2007), "Vibration and thermal buckling of composite sandwich beams with viscoelastic core", *Compos. Struct.*, vol. 81, no. 1, pp. 60–69.

2. Prokudin, O.A. et al. (2020), "Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic", *PNRPU Mech. Bull.*, vol. 2020, no. 4, pp. 260–270.

3. Meyers, C.A. and Hyer, M.W. (1991), "Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates", *J. Therm. Stress.*, vol. 14, no. 4, pp. 519–540.

4. Prabhu, M.R. and Dhanaraj, R. (1994), "Thermal buckling of laminated composite plates", *Comput. Struct.*, vol. 53, no. 5, pp. 1193–1204.

5. Chen, L.W. and Chen, L.Y. (1987), "Thermal buckling of laminated composite plates", *J. Therm. Stress.*, vol. 10, no. 4, pp. 345–356.

6. Azzara, R., Carrera, E. and Pagani, A. (2022), "Nonlinear and linearized vibration analysis of plates and shells subjected to compressive loading", *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 141, pp. 103936.

7. Álvarez, J.G. and Bisagni, C. (2021), "A study on thermal buckling and mode jumping of metallic and composite plates", *Aerospace*, vol. 8, no. 2, pp. 1–17.

8. Tong, B. et al. (2024), "Free vibration analysis of fiber-reinforced composite multi-layer cylindrical shells under hydrostatic pressure", *J. Sound Vib.*, vol. 587, pp. 118511.

9. Kuo, S.Y. (2016), "Flutter of thermally buckled angle-ply laminates with variable fiber spacing", *Compos. Part B Eng.*, vol. 95, pp. 240–251.

10. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V. and Matveenkov V.P. (2015), "Natural vibrations and stability of functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads", *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstrukcij*, vol. 21, no. 2, pp. 206–220. (In Russian)

11. Bochkarev, S.A. and Lekomtsev, S.V. (2015), "Natural vibrations of heated functionally graded cylindrical shells with fluid", *PNRPU Mech. Bull.*, vol. 2015, no. 4, pp. 19–35.

12. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V. and Matveenkov, V.P. (2016), "Hydrothermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Containing a Fluid", *Mech. Compos. Mater.*, vol. 52, no. 4, pp. 507–520.

13. Azzara, R. et al. (2023), "Vibration analysis of thermally loaded isotropic and composite beam and plate structures", *J. Therm. Stress.*, vol. 46, no. 5, pp. 369–386.

14. Champneys, A.R. et al. (2019), "Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploitation of Elastic Instability", *Front. Appl. Math. Stat.*, vol. 5, pp. 1–30.

15. Reis, P.M. (2015), "A Perspective on the Revival of Structural (In) Stability With Novel Opportunities for Function: From Buckliphobia to Buckliphilia", *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 82, no. 11, pp. 1–4.

16. Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. (1967), "The Finite Element Method in Structural and Soil Mechanics".

**Информация об авторе:**

*А. О. Каменских* – младший научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS Researcher ID: ААО-4133-2021 Scopus Author ID: 57216251699, РИНЦ Author ID: 1080399.

**Information about the author:**

*A. O. Kamenskikh* – Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academican Korolev St., Perm, Russia, 614018), WoS Researcher ID: ААО-4133-2021 Scopus Author ID: 57216251699, РИНЦ Author ID: 1080399.