Научная статья
УДК 519.17
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33

Об автоморфизмах графов с массивами пересечений $\{44,40,12;1,5,33\}$ и $\{48,35,9;1,7,40\}$

Минчжу Чень[1], Александр Алексеевич Махнёв[2], Василий Семенович Климин[3]

[1]Университет провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай
[1]mzchen@hainanu.edu.cn
[2]Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия
[2]makhnev@imm.uran.ru
[3]Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия
[3]kliminvasily@yandex.ru

Аннотация. Дистанционно регулярный граф Г диаметра 3 с сильно регулярными графами Г2 и Г3 имеет массив пересечений {r(c2+1)+a3, r c2, a3 + 1; 1, c2, r(c2 + 1)} (М.С. Нирова). Для дистанционно регулярного графа Г диаметра 3 и степени 44 имеется точно 7 допустимых массивов пересечений. Для каждого из них граф Г3 сильно регулярен. Для массива пересечений {44, 30, 5; 1, 3, 40} имеем a3 = 4, c2 = 3, r = 10, Г2 имеет параметры (540,440,358,360) и Г3 имеет параметры (540,55,10,5). Граф не существует (Кулен-Пак). Для массива пересечений {44, 35, 3; 1, 5, 42} имеем a3 = 2, c2 = 5, r = 7, Г3 имеет параметры (375,22,5,1) и не существует (его окрестность вершины является объединением изолированных 6-клик). В этой статье найдены возможные автоморфизмы графов с массивами пересечений {44,40,12; 1,5,33} и {48,35,9; 1,7,40}.

Ключевые слова: *дистанционно регулярный граф; сильно регулярный графа; массив пересечений*

Для цитирования: *Чень М., Махнёв А.А., Климин В.С.* Об автоморфизмах графов с массивами пересечений $\{44,40,12;1,5,33\}$ и $\{48,35,9;1,7,40\}$ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 26–33. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33.

Благодарности: работа выполнена при поддержке естественно-научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Статья поступила в редакцию 09.03.2024; одобрена после рецензирования 02.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

About Automorphisms of Graphs With Intersection Arrays $\{44,40,12;1,5,33\}$ and $\{48,35,9;1,7,40\}$

Minzhu Chen[1], Alexander A. Makhnev[2], Vasiliy S. Klimin[3]

[1]Hainan University, Haikou, China
[1]mzchen@hainanu.edu.cn
[2]Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
[2]makhnev@imm.uran.ru
[3]Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
[3]kliminvasily@yandex.ru

Abstract. Distance-regular graph Γ of diameter 3 with strongly regular graphs $Γ_2$ and $Γ_3$ has intersection array {r(c_2+1)+a_3, r c_2, a_3 + 1; 1, c_2, r(c_2 + 1)} (M.S. Nirova). For distance-regular graph Γ of diameter 3 and degree 44 there are exactly 7 feasible intersection arrays. For each of them graph $Γ_3$ is strongly regular. For intersection array {44, 30, 5; 1, 3, 40} we have a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10, $Γ_2$ has parameters (540,440,358,360) and $Γ_3$ has parameters (540,55,10,5). Graph does not exist (Koolen-Park). For intersection array {44, 35, 3; 1, 5, 42} graph $Γ_3$ has parameters (375,22,5,1) and does not exist (its neighbourhood of vertex is the union of isolated 6-cliques). In this paper it is found futomorphisms of graphs with intersection arrays {44,40,12; 1,5,33 and 48,35,9; 1,7,40}.

Keywords: *distance-regular graph; strongly regular graph; intersection array*

For citation: Chen, M., Makhnev, A.A. and Klimin, V.S. (2024), "About Automorphisms of Graphs With Intersection Arrays {44,40,12; 1,5,33} and {48,35,9; 1,7,40} ", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 26-33. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33.

Acknowledgments: the work was supported by the Natural Science Foundation of China (Project No. 12171126) and a grant from the Laboratory of Engineering Modeling and Statistical Computing of Hainan Province.

The article was submitted 09.03.2024; approved after reviewing 02.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ – граф, a,b ∈ Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через μ(a,b) (через λ(a,b)), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ*-подграфом* (λ-*подграфом*).

Если Γ – граф диаметра d и $i \le d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через b_i(u,w) (через c_i(u,w)) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения b_i(u,w) и c_i(u,w) не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого i=0,...,d [1]. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in$ {0,...,d} и для любых двух пар вершин (u,w) и (y,z) с d(u,w)=d(y,z)=i найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = $ (y,z).

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $Fix(X)$ обозначается подмножество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Имеется точно 7 допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов степени 44. В [2] доказано, что для пяти из них графы не существуют.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {44,40,12; 1,5,33}.

Теорема 1. *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* {44,40,12; 1,5,33}, $G = Aut(\Gamma)$, g – *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = Fix(g)$. *Тогда* Ω *не является кокликой,* Ω *не является объединением по крайней мере двух изолированных клик и верно одно из утверждений:*

(1) Ω – пустой граф, либо (i) p=7, $\alpha_3(g) = 35s'$, $\alpha_1(g) = 35t'$, $\alpha_2(g) = 35(175 - s' - t')$ и

t'+3s'+1 делится на 8, либо

(ii) p=5, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 5(105 - s - t)$ и 3t+s $- 3$ делится на 8, либо

(iii) p=3, $\alpha_3(g) = 15$s', $\alpha_1(g) = 15$t', $\alpha_2(g) = 15(35 -$ s' $-$ t') и $3t' + s' - 1$ делится на 8;

(2) Ω является m-кликой, m=5, p=2, $\alpha_3(g) = 320$ и $\alpha_1(g) = 10$t', где $t' = 4{,}8{,}12{,}16{,}20$;

(3) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 5$.

Следствие 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44{,}40{,}12; 1{,}5{,}33\}$ *не являются реберно симметричным.*

Проведем ревизию результатов из [3] об автоморфизмах дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{48{,}35{,}9; 1{,}7{,}40\}$ с помощью теории характеров, примененной к группам автоморфизмов графов Γ_2 и Γ_3.

Теорема 2. *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{48{,}35{,}9; 1{,}7{,}40\}$, $G = Aut(\Gamma)$, g – *элемент из G простого порядка p и $\Omega = Fix(g)$. Тогда Ω не является кликой,* $\pi(G) \subseteq \{2{,}3{,}5{,}7\}$ *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω – пустой граф, p=7, $\alpha_3(g) = 35$s', $\alpha_1(g) = 35$t' и t'+3s'+1 делится на 8, либо

(2) Ω является 4-кокликой и состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, p=3, $\alpha_1(g) = 21$t'+3, $\alpha_3(g) = 21$s'+6 и $-1 - 2$t'+s' делится на 6;

(3) Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ и $p \leq 7$.

Следствие 2. *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{48{,}35{,}9; 1{,}7{,}40\}$, $G = Aut(\Gamma)$ – *неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ,* K=$O_7(G)$, $\bar{T}$ – *цоколь группы* G=G/K. *Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K,* $\bar{L} \simeq L_2(7)$, $|K| = 7^3$ *или* $\bar{L} \simeq SL_2(7)$, $|K| = 7^2$.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с целыми собственными значениями, g – автоморфизм графа Γ простого порядка p, и χ – характер проекции мономиального представления на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g)$=$\alpha_i(g^l)$ *для любого l, не кратного p и $m - \chi(g)$ делится на p.*

Доказательство. Это лемма 2 из [4].

Лемма 1.2. *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44{,}40{,}12; 1{,}5{,}33\}$. *Тогда Γ имеет спектр* $\{44^1, 9^{132}, -1^{308}, -11^{84}\}$, *для чисел пересечения графа Γ верны равенства*

$p_{11}^1 = 3, p_{21}^1 = 40, p_{32}^1 = 96, p_{22}^1 = 216, p_{33}^1 = 32$, $p_{11}^2 = 5$, $p_{12}^2 = 27$, $p_{13}^2 = 12$, $p_{32}^2 = 84$, $p_{22}^2 = 240$, $p_{33}^2 = 32$, $p_{12}^3 = 33$, $p_{22}^3 = 231$, $p_{13}^3 = 11$, $p_{23}^3 = 88$, $p_{33}^3 = 28$;

и Γ имеет дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 132 & 27 & 3/4 & -99/8 \\ 308 & -7 & -7 & 77/4 \\ 84 & -21 & 21/4 & -63/8 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Прямые вычисления.

Ввиду леммы 1.2 граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами (525,128,28,32).

2. Характеры конечных групп и автоморфизмы дистанционно регулярных графов

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathfrak{R})$ с d классами, где X – множество вершин графа, R_0 – отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что d(u,w)=i. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, v=$|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если (u,w) $\in R_i$.

Пусть A_i – матрица смежности графа Γ_i для i>0 и A_0=I – единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_k$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i – матрица, в которой на месте (j,k) стоит p_{ij}^k. Тогда собственные значения $p_1(0)$,...,$p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1$,...,m_d. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)$=$m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй (дуальной) матрицей собственных значений схемы и связаны равенством PQ=QP=$|X|I$.

Предложение 2.1. *Пусть u_j и w_j – левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна* $v/\langle u_j, w_j \rangle$.

Доказательство. См. теорему 17.12 из [6]. Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = Aut(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, C)$. Пространство C^v является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0,\ldots,W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным.

Пусть χ_i – характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [5]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\, \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ – число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ – число рациональное, то $\chi_i(g)$ – целое число.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,40,12; 1,5,33\}$, $G = Aut(\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности* 132 , χ_2 – *характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности* 308. *Тогда*

$$\chi_1(g) = \big(11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g)\big)/40 - 99/8,$$
$$\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g)/4)/5 - 7.$$

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 132 & 27 & 3/4 & -99/8 \\ 308 & -7 & -7 & 77/4 \\ 84 & -21 & 21/4 & -63/8 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = 1/525\,(132\alpha_0(g) + 27\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g)/4 - 99\alpha_3(g)/8)$.

Так как $\alpha_3(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_1 - \alpha_3(g)$, то $\chi_1(g) = \big(11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g)\big)/40 - 99/8$.

Далее, $\chi_2(g) = 1/525$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g)/4)/5 - 7$. Лемма доказана.

Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами (525,128,28,32) и спектром $128^1, 8^{308}, -12^{216}$, $G = Aut(\Gamma)$.

Лемма 2.2. *Пусть $g \in G$, φ – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности* 216. *Тогда*

$$\varphi(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha'_1(g)/4)/5 + 6.$$

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 308 & 77/4 & -7 \\ 216 & -81/4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi(g) = 1/525$. Так как $\alpha_2(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\varphi(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/4)/5 + 6$. Лемма доказана.

Если $\Gamma = \bar{\Gamma}_2$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,40,12; 1,5,33\}$, то $\alpha'_1(g) = \alpha_1(g) + \alpha_3(g)$.

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {44,40,12; 1,5,33}

В этом параграфе предполагается, что Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,40,12; 1,5,33\}$, g – автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = Fix(g)$.

Из равенств $\chi_1(g) = \big(11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g)\big)/40 - 99/8$, $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g)/4)/5 - 7$, $\varphi(g) = \big(8\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)\big)/20 + 6$ следует, что $\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g)$ и $2\alpha_0(g) + \alpha_3(g)$ делятся на 5 и $8\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 20.

Сложив два последних равенства, получим, что $10\alpha_0(g) - 1\alpha_1(g)$ делится на 5, в частности, $\alpha_1(g)$ делится на 5.

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $\alpha_0(g)$ делится на 5.

Итак, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_0(g) = 5r$, t+r делится на 4.

Лемма 3.1. *Если Ω является пустым графом, то либо*

(1) p=7, $\alpha_3(g) = 35s'$, $\alpha_1(g) = 35t'$, $\alpha_2(g) = 35(175 - s' - t')$ и $t' + 3s' + 1$ делится на 8,

либо (2) p=5, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 5(105 - s - t)$ и 3t+s − 3 делится на 8, 3t+s делится на 5, либо
(3) p=3, $\alpha_3(g) = 15s'$, $\alpha_1(g) = 15t'$, $\alpha_2(g) = 15(35 - s' - t')$ и $3t'+s' - 1$ делится на 8.

Доказательство. Так как $525 = 21 \cdot 25$, то $p \in \{3,5,7\}$.

Если p=7, то $525 - 5r$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 35t'$, $\alpha_3(g) = 35s'$ и $\alpha_2(g) = 35(175 - s' - t')$. Далее, $\chi_1(g) = (21t'+7s' - 99)/8$, поэтому $5t'+15s'+5$ делится на 8. По лемме 1.1 $132 - (21t'+7s' - 99)/8$ делится на 7.

Если p=5, то $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_0(g) = 5r$. Далее, $\chi_1(g) = (3t+s - 99)/8$, поэтому $3t+s - 3$ делится на 8 и $132 - (3t+s - 99)/8$ делится на 5, поэтому 3t+s делится на 5.

Если p=3, то $\alpha_3(g) = 15s'$, $\alpha_1(g) = 15t'$ и $\alpha_2(g) = 15(35 - t' - s')$. Далее, $\chi_1(g) = (9t'+3s' - 99)/8$, поэтому $3t'+s' - 1$ делится на 8.

Лемма 3.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) если Ω является m-кликой, то m=5, p=2, $\alpha_3(g) = 320$ и $\alpha_1(g) = 10t'$, где t'=4,12,20;

(2) Ω не является кокликой;

(3) Ω не является объединением по крайней мере двух изолированных клик.

Доказательство. Пусть Ω является m-кликой. Тогда m=5, p делит 520 и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5 \cdot 40 = 200$. Поэтому имеется 200 вершин, смежных с единственной вершиной из Ω и 320 вершин, несмежных с вершинами из Ω. Таким образом, p=2,5.

Так как $p_{33}^1 = 32$, то $p \neq 5$. Из равенств $p_{11}^1 = 3$, $p_{11}^2 = 5$ следует, что $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = 200$, $\alpha_3(g) = 320$. С другой стороны, $\alpha_3(g) = 10s'$, $\alpha_1(g) = 10t'$ и $\alpha_2(g) = 520 - 10t' - 10s'$, поэтому s'=32. Наконец, $\chi_1(g) = (11 + 6t'+2s' - 99)/8$, число $132 - (11 + 6t'+2s' - 99)/8$ четно и t'=4,12,20.

Пусть Ω является n-кокликой. Тогда p=2,11. Если Ω содержит две вершины на расстоянии 2, то p =5, противоречие. Значит, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3.

Так как, $p_{22}^3 = 231$, $p_{33}^3 = 28$, то p=7, противоречие.

Пусть Ω является объединением по крайней мере двух изолированных клик. Тогда порядки максимальных клик из Ω равны m, p делит 40 и $4 - m$, поэтому p=2, m=2,4. Противоречие с тем, что λ=3.

Лемма 3.3. *Если Ω содержит геодезический 2-путь, то $p \leq 5$.*

Доказательство. Пусть $p \geq 7$. В графе Ω имеем λ=3, μ=5, поэтому Ω является вполне регулярным графом с параметрами v',k', λ'=3, μ'=5 и $k'(k' - 4) = 5k_2'$.

Число ребер в Γ между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $v'(44 - k')$, но не больше $525 - v'$.

Если p=7, то k'=7l+2, v' делится на 7. Допустим, что k' делится на 5. Тогда k'=30 и $14v' \leq 525 - v'$, поэтому $v' \leq 35$, противоречие. Если же $k' - 4$ делится на 5, то k'=9, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно.

Если p=11, то k'=$11l$, $v' + 3$ делится на 11. Далее, $k' - 4$ делится на 5 и k'=44, противоречие.

Если p=13, то $k' = 13l + 5$, $v' - 5$ делится на 13. Далее, либо k'=5, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае k'=44, противоречие.

Если p=17, то $k' = 17l + 10$, $v' + 2$ делится на 17. Далее, либо k'=10, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае k'=44, противоречие. В первом случае k_2'=12, число ребер в Γ между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $34v'$, но не больше $525 - v'$ и $v' \leq 15$, противоречие.

Если p=19, то $k' = 19l + 5$, $v' - 5$ делится на 19. Далее, либо k'=5, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае k'=24, k_2'=96 и $20v' \leq 525 - v'$, противоречие.

Ввиду лемм 3.1–3.3 имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7\}$ и Γ не является реберно симметричным графом. Следствие 1 доказано.

4. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {48,35,9; 1,7,40}

В этом параграфе предполагается, что - дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {48,35,9; 1,7,40}.

Этот граф имеет $v = 1 + 48 + 240 + 54 = 343 = 7^3$ вершин и спектр $48^1, 13^{56}, -1^{216}, -8^{70}$.

Для этого графа имеем $\chi_1(g) = \big(7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g)\big)/42 - 7/6$, $\chi_2(g) = \big(9\alpha_0(g)+\alpha_3(g)\big)/14 - 9/2$, где χ_1 – проекция ψ на подпространство размерности 56,

χ_2 – проекция ψ на подпространство размерности 216.

Числа пересечений графа Γ равны
$p^1_{11} = 12$, $p^1_{21} = 35$, $p^1_{32} = 45$, $p^1_{22} = 160$, $p^1_{33} = 9$,
$p^2_{11} = 7$, $p^2_{12} = 32$, $p^2_{13} = 9$, $p^2_{32} = 36$, $p^2_{22} = 171$, $p^2_{33} = 9$,
$p^3_{12} = 40$, $p^3_{22} = 160$, $p^3_{13} = 8$, $p^3_{23} = 40$, $p^3_{33} = 5$.

Отсюда Γ_2 – сильно регулярный граф с параметрами (343,102,21,34) и спектром $102^1, 4^{272}, -17^{70}$.

Пусть Δ – сильно регулярный граф с параметрами (343,102,21,34)

Лемма 4.1. *Пусть $G = Aut(\Delta)$, $g \in G$, φ – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 70.*

Тогда $\varphi(g) = \big(4\alpha_0(g) - \alpha'_1(g)\big)/21 + 14/3$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 272 & 32/3 & -17/3 \\ 70 & -35/3 & 14/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi(g) = 1/343$.

Так как $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\varphi(g) = \big(4\alpha_0(g) - \alpha_1(g)\big)/21 + 14/3$. Лемма доказана.

Если $\Delta=\Gamma_2$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$, то $\alpha'_1(g)=\alpha_1(g)+\alpha_3(g)$. Далее, Γ_3 – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9) и спектром $54^1, 5^{216}, -9^{126}$. Пусть Σ – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9).

Лемма 4.2. *Пусть $g \in G$, $G = Aut(\Sigma)$, ω – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 126.*

Тогда $\omega(g) = \big(5\alpha_0(g) - \alpha''_1(g)\big)/14 + 7/2$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 216 & 20 & -9/2 \\ 126 & -21 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\omega(g) = 1/343$.

Так как $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\omega(g) = \big(5\alpha_0(g) - \alpha_1(g)\big)/14 + 7/2$. Лемма доказана.

Если $\Sigma=\Gamma_3$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$, то $\alpha''_1(g)=\alpha_3(g)$.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$, $G = Aut(\Sigma)$, g – элемент простого порядка p из G, $\Omega = Fix(g)$.

Тогда
$\varphi(g) = \big(4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)\big)/21 + 14/3$,
$\omega(g) = \big(5\alpha_0(g) - \alpha_3(g)\big)/14 + 7/2$.

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) если Ω – пустой граф, то p=7, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g) = 49$;

(2) подграф Ω не является кликой;

(3) если Ω является m-кокликой, то p=3, m=4, $\mathrm{alpha}_1(g) = 21t'+3$, $\alpha_3(g) = 21s'+6$ и $-1 - 2t'+s'$ делится на 6;

(4) если Ω содержит ребро, то Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ.

Доказательство. Если Ω – пустой граф, то с учетом равенства $v = 7^3$ имеем p=7. По лемме 4 из [3] имеем $\alpha_1(g) = 49(2s+1)$. Для $\alpha_3(g) = 7t$ получим $\chi_1(g) = (28s+14 - t - 7)/6$, $-2s - t+1$ делится на 6 и $56 - \chi_1(g) = 56 - (28s+14 - t - 7)/6$ делится на 7. Отсюда t=7t', $\alpha_3(g) = 49t'$, $2s+1+t' \le 7$ и $-2s - t'+1$ делится на 6, поэтому s=0,t'=1.

Аналогично, $\chi_2(g) = (t - 9)/2$ и t нечетно.

Пусть Ω является n-кликой. По лемме 4 из [3] имеем p=2, n=7 и $\alpha_1(g) = 28l$. Для различных вершин d,e $\in \Omega$ из равенства $p^1_{33} = 9$ следует, что $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(e)$ пересекает Ω, противоречие.

Пусть Ω является m-кокликой. Если две вершины d,e $\in \Omega$ находятся на расстоянии 2 в Γ, то равенство $p^2_{11} = 7$ влечет p=7. Возникает противоречие с тем, что тогда k=44 должно делиться на 7. Значит, любые две вершины d,e $\in \Omega$ находятся на расстоянии 3 в Γ.

Так как Γ_3 – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9), то либо p=5, m=2, противоречие, либо $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(e)$ содержит 2 вершины из Ω, p=3 и m=4. Положим $\alpha_3(g) = 3s$.

Тогда $\chi_2(g) = \big(36+\alpha_3(g)\big)/14 - 9/2$, поэтому s=7s'+2 и s' нечетно. Далее, $\chi_1(g) = (28 + 2\alpha_1(g) - 21s' - 6)/42 - 7/6$, $\alpha_1(g) = 7t + 3$, $2t - 3s' - 3$ делится на 6 и t=3t'. Отсюда $\chi_1(g) = (2t' - s' - 1)/2$ и $56 - \chi_1(g) = 56 - (2t' - s' - 1)/2$ делится на 3.

Итак, $\alpha_1(g) = 21t' + 3$, $\alpha_3(g) = 21s'+6$ и $-1 - 2t'+s'$ делится на 6.

Пусть Ω содержит ребро $\{e, f\}$. Если в Ω нет двух вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ, то Ω является объединением l изолированных клик, и любые две вершины из разных максимальных клик находятся на расстоянии 3 в Γ.

Пусть d,e $\in \Omega$ – вершины на расстоянии 3. Тогда равенство $p^3_{33} = 5$ влечет l=2, p=5 или l=3, p=2,3.

Если p=3, то равенство $p^3_{33} = 5$ влечет, что порядки максимальных клик из Ω равны 3. Противоречие с тем, что $|\Gamma - \Omega| = 343 - 9$ не делится на 3.

Если p=5 , то из действия g на $[d]$ следует, что порядки максимальных клик из Ω равны 5, а из равенства $p^1_{33} = 9$ следует, что порядки максимальных клик из Ω равны 4, противоречие.

Если p=2, то равенство $p^1_{11} = 12$ влечет, что порядки максимальных клик из Ω четны, противоречие с действием g на $[e]$.

Лемма 4.4. *Если Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, то $p \leq 7$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ. По лемме 7 из [3] имеем $p \leq 11$.

Пусть p=11. Тогда Γ_3 индуцирует на Ω вполне регулярный граф с параметрами (v',k',5,9), где 54 − k' и $343 - v'$ делятся на 11.

Так как k'(k' − 6) $= 9k_2'$, то 9 делит k'(k' − 6). Отсюда 3 делит k' и 18 − k'/3 делится на 11, поэтому k'=21, k_2'=35.

Число ребер в графе Γ_3 между Ω и $\Gamma_3 - \Omega$ не меньше $57 \cdot 33$, но не больше 343-57=286, противоречие. Теорема 2 доказана.

Докажем следствие 2.

Пусть Γ – граф, удовлетворяющий условиям следствия 2, $G = Aut(\Gamma)$ – неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ, K=O$_7(G)$, $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G} = G/K$.

Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K. Применим следствие 1 из [3]. Если группа $\bar{L}$ изоморфна A_5,A$_6$ или PSp$_4(3)$, то $|K| = 7^4$, $|\bar{T}{:}\bar{T}_a| = 7^3$. Противоречие с действием $\bar{T}_a$ на K_a. Итак, группа $\bar{L}$ изоморфна либо $L_2(7)$ и $|K| = 7^3$, либо SL$_2$(7) и $|K| = 7^2$ (см. [6]). Следствие 2 доказано.

Список источников

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1989.
2. *Чень Минчжу, Махнев А.А., Климин В.С.* О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и степени 44.
3. *Makhnev A.A., Bitkina V.V., Gutnova A.K.*, Automorphisms of a distance regular graph with intersection array {48,35,9; 1,7,40} // Vladi-kavkaz. Mat. Zh. 2020. Vol. 22, №. 2. P. 24–33.
4. *Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {56,45,1; 1,9,56} // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
5. *Cameron P.J.* Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
6. *Cameron P.J., van Lint J.* Graphs, Codes and Desidns. London Math. Soc. Student Texts № 22. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
7. *Wilson R., Walsh P., Tripp J., Suleiman I., Parker R., Norton S., Nickerson S., Linton S., Bray J., Abbott R.* ATLAS of Finite Group Representations – Version 3, 2008.

References

1. Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York.
2. Chen, Minzhu, Makhnev, A.A. and Klimin V.S., "On distance-regular graphs of diameter 3 and degree 44".
3. Makhnev, A.A., Bitkina, V.V. and Gutnova A.K. (2020), "Automorphisms of a distance regular graph with intersection array {48,35,9; 1,7,40}", *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, vol. 22, no. 2, pp. 24–33.
4. Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A. (2010), "On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array {56, 45, 1; 1, 9, 56}", *Doklady Mathematics*, vol. 432, no. 5, pp. 583-587.
5. Cameron, P.J. (1999), *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts № 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press.
6. Cameron, P.J. and van Lint J. Graphs (1991), *Codes and Desidns*. London Math. Soc. Student Texts № 22, Cambridge, Cambridge Univ. Press.

7. Wilson, R., Walsh, P., Tripp, J., Suleiman, I., Parker, R., Norton, S., Nickerson, S., Linton, S., Bray, J. and Abbott, R. (2008), "ATLAS of Finite Group Representations – Version 3".

Информация об авторах:

М. Чень – кандидат физико-математических наук, доцент Университета провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай;

А. А. Махнев – доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН, главный научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН (620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16), AuthorID: 2970;

В. С. Климин – аспирант Уральского федерального университета (620075, Россия, г. Екатеринбург, просп. Ленина, д. 51).

Information about the authors:

Minzhu Chen – Candidate of Sciences (physical and mathematical), associate professor at Hainan University, Haikou, China;

Alexander A. Makhnev – Doctor of Sciences (physical and mathematical), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher at the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg, Russia, 620990), AuthorID: 2970;

Vasiliy S. Klimin – postgraduate student at Ural Federal University (51, prosp. Lenina, Yekaterinburg, Russia, 620075).