«Математика»

Научная статья
УДК 517.977.56
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16

# Об одной задаче управления переменной структурой с дробными производными Капуто

**Жаля Билал кызы Ахмедова**
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан
Институт Систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан
jaleahmadova23@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Применяя аналог метода приращений, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка. В случае выпуклости областей управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

**Ключевые слова:** *задача оптимального управления; функционал качества; функция Гамильтона–Понтрягина; аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина; необходимое условие оптимальности; допустимое управление, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения Эйлера*

**Для цитирования:** *Ахмедова Ж.Б.* Об одной задаче управления переменной структурой с дробными производными Капуто // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 5–16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.

*Статья поступила в редакцию 08.04.2024; одобрена после рецензирования 25.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.*

«Mathematics»

Research article

# On one Control Problem of a Variable Structure With Fractional Caputo Derivatives

**Zhalya B. Ahmedova**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
jaleahmadova23@gmail.com

**Abstract.** We consider an optimal control problem with a variable structure, described in different time intervals by various ordinary nonlinear fractional differential equations. Using an analogue of the incremental method, a necessary condition for first-order optimality is proved. In the case of convex control domains, a linearized maximum condition is proved, and in the case of open control domains, an analogue of the Euler equation is obtained.

**Keywords:** *optimal control problem; quality functionality; Hamilton-Pontryagin function; analogue of the maximum principle of L.S. Pontryagin; necessary condition for optimality; admissible control, linearized maximum condition, analogue of Euler's equation*

**For citation:** Ahmedova, Zh. B. (2024), "On one Control Problem of a Variable Structure With Fractional Caputo Derivatives", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 5-16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.

*The article was submitted 08.04.2024; approved after reviewing 25.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.*

## Введение

Задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями с переменной структурой, или же задачи оптимального управления многоэтапными процессами или же задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями постоянной структурой, широко исследованы. В этом направлении можно отметить работы [1–4].

В работе [5] рассмотрена одна задача оптимального управления с переменной структурой, но многоточечным функционалом качества. При различных предположениях на параметры рассматриваемой задачи доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.

Многочисленные свойства дробных операторов вызвали в последние годы большой интерес к дробному исчислению, а также к широкому кругу приложений, связанных моделированием областей подобных физических проблем. В последние годы особенно широко применяются дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто. Простота применения этих производных привлекла внимание многих ученых. К настоящему времени задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными уравнениями с дробными производными, интенсивно исследуются (см. например, [6, 7]).

В работах, например [6–9], изучены различные задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными.

В работе [10] исследована задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, где функционал качества является многоточечным функционалом. Установлен аналог принципа максимума Понтрягина.

В предлагаемой работе рассмотрена дробная задача оптимального управления с переменной структурой, описываемой двумя системами дифференциальных уравнений.

Получен аналог принципа максимума Понтрягина.

В случае выпуклых областей управления доказан линеаризованный принцип максимума, а в случае открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

## 1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных уравнений:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x = f(t,x,u), t \in T_1 = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$ {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha} y = g(t,y,v), t \in T_2 = [t_1, t_2] \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(t_1) = G\big(x(t_1)\big), \quad (4)$$

где

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} d\tau,$$

$$n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+$$

левая дробная производная Капуто [9, 11, 12].

Здесь $\alpha \in [0,1]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ – состояния управляемого объекта, $x(t) \in C^n([t_0, t_1]), y(t) \in C^n([t_1, t_2])$, $x_0$ – заданный постоянный вектор, $f(t,x,u)\Big(\big(g(t,x,v)\big)\Big)$ – заданная $n\ (m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $x\ (y)$, $G(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая $m$-мерная вектор-функция, $u(t)$ и $v(t)$ – соответственно $r$ и $q$-мерные кусочно-непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функции, управляющих воздействий, принимающие свои значения из заданных непустых и ограниченных множеств $U$ и $V$, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T_1,$$
$$v(t) \in V \subset R^q, t \in T_2. \quad (5)$$

Требуется минимизировать следующий функционал качества:

$$J(u,v) = \varphi_1\big(x(t_1)\big) + \varphi_2\big(y(t_2)\big), \quad (6)$$

определенный на решениях задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые скалярные функции.

Пару $(u^o(t), v^o(t))$, удовлетворяющую вышеприведенным свойствам, *назовем допустимым управлением.*

## 2. Вычисление приращения функционала качества

Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – некоторый фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t),\ \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – произвольный допустимые процессы.

Тогда приращение функционала качества записывается следующим образом:

$$\Delta J(u^o, v^o) = J(\bar{u}, \bar{v}) - J(u^o, v^o) = \\ = [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))]. \tag{7}$$

Ясно, что $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ является решением следующей задачи:

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \\ - f(t, x^0(t), u^0(t)), \tag{8}$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \tag{9}$$

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - \\ - g(t, y^0(t), v^0(t)), \tag{10}$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \tag{11}$$

Пусть $\psi(t)$ и $p(t)$ пока произвольные $n$ и $m$-мерные, соответственно, вектор-функции.

Умножая обе стороны уравнений (8) и (10) скалярно на $\psi(t)$ и $p(t)$, соответственно, и интегрируя обе стороны полученных соотношений по $t$ от $t_0$ до $t_1$ и от $t_1$ до $t_2$ соответственно, введя аналоги функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),$$

$$M(t, y, v, p) = p' g(t, y, v),$$

далее, применяя формулу интегрирования по частям для интегралов Римана–Лиувилля [8, 9], а также учитывая условие (9), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + \\ + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t)\Delta x(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + \\ + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)\Delta x(t_1) + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_0)\Delta x(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + \\ + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)\Delta x(t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))]dt. \tag{12}$$

Аналогично получим

$$\int_{t_1}^{t_2} p'(t)\, {}_{t_1}^{C}D_t^{\alpha}\Delta y(t)dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} {}_{t}^{C}D_{t_2}^{\alpha}p'(t)\Delta y(t)dt + \\ + {}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p(t_2)\Delta y(t_2) + {}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p(t_1)\Delta y(t_1) = \\ = \int_{t_1}^{t_2} {}_{t}^{C}D_{t_2}^{\alpha}p'(t)\Delta y(t)dt + \\ + {}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_2)\Delta y(t_2) + \\ + {}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_1)[G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)]dt. \tag{13}$$

С учетом (12), (13) из формулы приращения (7) получим, что

$$\Delta J(u, v) = [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \\ + \int_{t_0}^{t_1} {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + \\ + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)\Delta x(t_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))]dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} {}_{t}^{C}D_{t_2}^{\alpha}p'(t)\Delta y(t)dt + \\ + {}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_2)\Delta y(t_2) +$$

$$+{}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_1)\big[G(\bar{x}(t_1))-G(x^o(t_1))\big]-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\big[M(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\big]dt. \qquad (14)$$

Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1))-\varphi(x^o(t_1))=$$
$$=\varphi_x'(x^o(t_1))\Delta x(t_1)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \quad (15)$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2))-\varphi_2(y^o(t_2))=$$
$$=\varphi_y'(y^o(t_2))\Delta y(t_2)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|) \quad (16)$$

и

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))=$$
$$=H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))+$$
$$+H(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))=$$
$$=H_x'(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))\Delta x(t)+$$
$$+o_3(\|\Delta x(t)\|)+H(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))=$$
$$=H_x'(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))\Delta x(t)+$$
$$+H_x'(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))\Delta x(t)-$$
$$-H_x'(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))\Delta x(t)+$$
$$+H(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))+$$
$$+o_3(\|\Delta x(t)\|), \qquad (17)$$

$$M(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))=$$
$$=M(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p(t))+$$
$$-M(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))+$$
$$+M(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))=$$
$$=M_y'(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))\Delta y(t)+$$
$$+o_4(\|\Delta y(t)\|)+$$
$$+M(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))=$$
$$=M_y'(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))\Delta y(t)+$$
$$+M_y'(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\Delta y(t)-$$
$$-M_y'(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\Delta y(t)+$$
$$+M(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))+$$
$$o_4(\|\Delta y(t)\|). \qquad (18)$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^n|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$, есть величина более высокого порядка чем $\alpha$, т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Тогда формулу приращения (14) можно записать как

$$\Delta J(u,v)=\varphi_x'(x^o(t_1))\Delta x(t_1)+$$
$$+\varphi_y'(y^o(t_2))\Delta y(t_2)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+$$
$$+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+\int_{t_0}^{t_1}{}_t^CD_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt+$$
$$+{}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)\Delta x(t_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}H_x'(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))\big]dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H_x(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t))-$$
$$-H_x(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t))\big]'\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_3(\|\Delta x(t)\|)dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}{}_t^CD_{t_2}^{\alpha}p'(t)\Delta y(t)dt+$$
$$+{}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_2)\Delta y(t_2)+$$
$$+{}_tI_{t_2}^{1-\alpha}p'(t_1)\big[G(\bar{x}(t_1))-G(x^o(t_1))\big]-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\big[M(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\big]dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}M_y'(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\Delta y(t)dt-$$
$$\int_{t_1}^{t_2}o_4(\|\Delta y(t)\|)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\big[M_y(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t))-$$
$$-M_y(t,y^0(t),v^0(t),p(t))\big]'\Delta y(t)dt. \quad (19)$$

Ведем обозначение:

$$N(p(t_1),x)=p'(t_1)\,G(x).$$

Используя формулу Тейлора, имеем

$$N\big(p(t_1),\bar{x}(t_1)\big)-N\big(p(t_1),x^0(t_1)\big)=$$
$$=N'_x\big(p(t_1),x^0(t_1)\big)\Delta x(t_1)+o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Предположим, что векторы функций $\psi(t)$ и $p(t)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$${}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)=-H_x\big(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t)\big), \quad (20)$$

$${}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)=-\varphi_x\big(x(t_1)\big)+$$
$$+N'_x\big(p(t_1),x^0(t_1)\big), \quad (21)$$

$${}_{t}^{C}D_{t_2}^{\alpha}p(t)=-M_y\big(t,y^0(t),v^0(t),p(t)\big), \quad (22)$$

$${}_{t}I_{t_2}^{1-\alpha}p(t_2)=-\varphi_y\big(y(t_2)\big). \quad (23)$$

Задачу (20)–(23) назовем *сопряженной системой для рассматриваемой задачи*.

Учитывая систему (20)–(23) из (19), получим, что

$$\Delta J(u,v)=-\int_{t_0}^{t_1}\big[H\big(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H\big(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t)\big)\big]dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\big[M\big(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t)\big)-$$
$$-M\big(t,y^0(t),v^0(t),p(t)\big)\big]dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H_x\big(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H_x\big(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t)\big)\big]'\,\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\big[M_y\big(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t)\big)-$$
$$-M_y\big(t,y^0(t),v^0(t),p(t)\big)\big]'\Delta y(t)dt+$$
$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_3(\|\Delta x(t)\|)dt-\int_{t_1}^{t_2}o_4(\|\Delta y(t)\|)dt-$$
$$-o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Введем обозначения

$$\Delta_{\bar{u}}H[t,\psi]\equiv H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)$$
$$--H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big),$$
$$\Delta_{\bar{u}}M[t,p]\equiv M\big(t,y(t),\bar{v}(t),p(t)\big)-$$
$$-M\big(t,y(t),v(t),p(t)\big).$$

Тогда приращение функционала качества может быть представлено в виде

$$J\big(u(t)+\Delta u(t),v(t)+\Delta v(t)\big)-$$
$$-J\big(u(t),v(t)\big)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar{u}}H[t,\psi]dt-\int_{t_1}^{t_2}\Delta_{\bar{v}}M[t,p]dt+$$
$$+\eta_1(\Delta u,\Delta v)+\eta_2(\Delta u,\Delta v). \quad (24)$$

Здесь $\eta_1(\Delta u,\Delta v)$ и $\eta_2(\Delta u,\Delta v)$ остаток формулы приращения, т.е.

$$\eta_1(\Delta u,\Delta v)=-\int_{t_0}^{t_1}\big[H_x\big(t,x^0(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H_x\big(t,x^0(t),u^0(t),\psi(t)\big)\big]'\,\Delta x(t)dt+$$
$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)-\int_{t_0}^{t_1}o_3(\|\Delta x(t)\|)dt,$$

$$\eta_2(\Delta u,\Delta v)=$$
$$=-\int_{t_1}^{t_2}\big[M_y\big(t,y^0(t),\bar{v}(t),p(t)\big)-$$
$$-M_y\big(t,y^0(t),v^0(t),p(t)\big)\big]'\Delta y(t)dt+$$
$$+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)-\int_{t_1}^{t_2}o_4(\|\Delta y(t)\|)dt-$$
$$-o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Пусть $\Delta u(t)\neq 0,\Delta v(t)=0$. Тогда получим

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)=f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-$$
$$-f\big(t,x^0(t),u^0(t)\big), \quad (25)$$

$$\Delta x(t_0)=0, \quad (26)$$

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta y(t)=g\big(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\big)-$$
$$-g(t,y^0(t),v^0(t)), \quad (27)$$

$$\Delta y(t_1)=G\big(\bar{x}(t_1)\big)-G\big(x^0(t_1)\big). \quad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\frac{f\big(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\big[f\big(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-$$
$$-f\big(\tau,x^0(\tau),\bar{u}(\tau)\big)+$$
$$+f\big(\tau,x^0(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\big)\big]d\tau=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\big[f\big(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-$$

$$-f\big(\tau,x^0(\tau),\bar{u}(\tau)\big)\big]d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\,\Delta_{\bar{u}}f\big(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\big)d\tau, \quad (29)$$

$$\Delta y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t}\frac{g\big(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{v}(\tau)\big)-g\big(\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

$$+G\big(\bar{x}(t_1)\big)-G\big(x^0(t_1)\big)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\big[g\big(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{v}(\tau)\big)-$$

$$-g\big(\tau,y^0(\tau),\bar{v}(\tau)\big)+$$

$$+g\big(\tau,y^0(\tau),\bar{v}(\tau)\big)-g\big(\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)\big)\big]d\tau+$$

$$+G\big(\bar{x}(t_1)\big)-G\big(x^0(t_1)\big)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\big[g\big(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{v}(\tau)\big)-$$

$$-g\big(\tau,y^0(\tau),\bar{v}(\tau)\big)\big]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\,\Delta_{\bar{v}}g\big(\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)\big)d\tau$$

$$+G\big(\bar{x}(t_1)\big)-G\big(x^0(t_1)\big). \quad (30)$$

Так как, в силу сделанных предположений, функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липщица по $x$, то, переходя к норме в (29), получаем, что

$$\|\Delta x(t)\|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\big\|f\big(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(\tau,x(\tau),\bar{u}(\tau)\big)\big\|d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\big\|\Delta_{\bar{u}}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\big\|d\tau$$

$$\le L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\|\Delta x(\tau)\|d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\big\|\Delta_{\bar{u}}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\big\|d\tau, \quad (31)$$

где $L_1=const>0$ некоторая постоянная.

А из (30) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\|\le L_2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\|\Delta y(\tau)\|d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\big\|\Delta_{\bar{v}}g\big(\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)\big)\big\|d\tau+$$

$$+L_3\|\Delta x(t_1)\|, \quad (32)$$

где $L_2,L_3=const>0$ некоторые постоянные. Применяя к неравенству (31) аналог леммы Гронуолла–Беллмана [13], приходим к оценке

$$\|\Delta x(t)\|\le L_4\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\big\|\Delta_{\bar{u}}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\big\|d\tau. \quad (33)$$

Аналогично из (32) получим

$$\|\Delta y(t)\|\le$$

$$\le L_5\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}[\|\Delta y(\tau)\|+\right.$$

$$\left.+\|\Delta v(\tau)\|]d\tau+\|\Delta x(t_1)\|\right], \quad (34)$$

где $L_4,L_5=const>0$ некоторые постоянные.

Теперь пусть $\Delta u(t)=0$, а $\Delta v(t)\neq0$. При этом получим, что $\Delta x(t)=0$, а $\Delta y(t)$ является решением задачи

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta y(t)=g\big(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\big)-$$

$$-g\big(t,y(t),v(t)\big), \quad (35)$$

$$\Delta y(t_1)=0. \quad (36)$$

По аналогии с доказательством оценки (34) доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta y(t)\|\le$$

$$\le L_6\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\|\Delta_{\bar{v}}g[\tau]\|d\tau \quad (37)$$

где $L_6=const>0$ некоторая постоянная.

## 3. Основной результат

Пусть $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u(t)$, $w_1\in U-$ произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$ .

Специальное приращение управляющей функции $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u(t;\varepsilon)=\begin{cases}w_1-u(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\in T_1\setminus[\theta,\theta+\varepsilon).\end{cases} \quad (38)$$

Пусть $\big(\Delta x(t;\varepsilon),\Delta y(t;\varepsilon)\big)-$ специальное приращение траектории, отвечающее специальному приращению (38) управляющей функции $u(t)$.

Тогда из оценок (33), (34) следует, что

$$\|\Delta x(t;\varepsilon)\| \le L_7\varepsilon, t \in T_1,$$
$$\|\Delta y(t;\varepsilon)\| \le L_8\varepsilon, t \in T_2, \qquad (39)$$

где $L_7, L_8 = const$ некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание формулу (38) и оценки (39), из формулы приращения (24) получаем, что

$$J\big(u(t)+\Delta u(t;\varepsilon), v(t)\big) - J\big(u(t), v(t)\big) = \\ = -\varepsilon\Delta_{w_1}H[\theta,\psi] + o(\varepsilon). \qquad (40)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\Delta v(t;\mu) = \\ = \begin{cases} w_2 - v(t), & t \in [\xi, \xi+\mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\xi,\xi+\mu). \end{cases} \qquad (41)$$

Здесь $w_2 \in V -$ произвольный вектор, $\xi \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $v(t)$, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \mu < t_2$ .

Ясно, что в этом случае специальное приращение $\Delta x(t;\mu)$ траектории $x(t)$ равно нулю, а для $\Delta y(t;\mu)$, т.е. для специального приращения траектории $y(t)$, отвечающее приращению (41) в силу оценки (37) имеет место оценка

$$\|\Delta y(t;\mu)\| \le L_9\varepsilon, t \in T_2, \qquad (42)$$

где $L_9 = const > 0$ некоторая постоянная.

Учитывая формулу (41) и оценку (42), из формулы приращения (24) получаем, что

$$J\big(u(t), v(t)+\Delta v(t;\mu)\big) - J\big(u(t), v(t)\big) = \\ = -\mu\Delta_{w_2}M[\xi,p] + o(\mu). \qquad (43)$$

Из разложений (40), (43) следует

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления $\big(u(t), v(t)\big)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\max_{w_1\in U} H\big(\theta, x(\theta), w_1, \psi(\theta)\big) = \\ = H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big),$$

$$\max_{w_2\in V} M\big(\xi, y(\xi), w_2, p(\xi)\big) = \\ = M\big(\xi, y(\xi), v(\xi), p(\xi)\big)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $\xi \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Теперь предположим, что множества $U, V$ выпуклы, а $f(t,x,u), g(t,y,v)$ имеют непрерывные производные также по $u, v$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$\frac{\partial H[t,\psi]}{\partial u} = \frac{\partial H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u},$$
$$\frac{\partial M[t,p]}{\partial v} = \frac{\partial M\big(t, y(t), v(t), p(t)\big)}{\partial v}.$$

Тогда, по аналогии с доказательством формулы приращения (24), доказывается, что

$$J(\bar{u}, v) - J(u, v) = \\ = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t,\psi]}{\partial u}\Delta u(t)dt + \eta_3(\Delta u, \Delta v), \qquad (44)$$

$$J(u, \bar{v}) - J(u, v) = \\ = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t,p]}{\partial v}\Delta v(t)dt + \eta_4(\Delta u, \Delta v). \qquad (45)$$

Здесь $\eta_3(\Delta u, \Delta v)$ и $\eta_4(\Delta u, \Delta v)$ являются остаточными членами формулы приращения функционала, т.е.

$$\eta_3(\Delta u, \Delta v) = \\ = -\int_{t_0}^{t_1} \big[H_x\big(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - \\ - H_x\big(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)\big)\big]' \Delta x(t)dt + \\ + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|)dt,$$

$$\eta_4(\Delta u, \Delta v) = \\ = -\int_{t_1}^{t_2} \big[M_y\big(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)\big) - + \\ - M_y\big(t, y^0(t), v^0(t), p(t)\big)\big]' \Delta y(t)dt + \\ + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|)dt - \\ - o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Далее из оценок (31) и (32) получаем, что

$$\|\Delta x(t)\| \le L_{10}\int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\|dt,$$

$$\|\Delta y(t)\| \le L_{11}\int_{t_0}^{t_1} \|\Delta v(t)\|dt, \qquad (46)$$

где $L_i = const > 0, i = 10,11$ некоторые постоянные.

А из оценки (37) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\| \le L_{12} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta v(t)\| dt, \quad (47)$$

где $L_{12} = const > 0 -$ некоторая постоянная.

Пусть $w_1(t) \in U -$ произвольная допустимая управляющая функция, а $\varepsilon \in [0,1]-$ произвольное число.

Тогда специальное приращение управляющей функции $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t;\varepsilon) = \varepsilon[w_1(t) - u(t)], t \in T_1. \quad (48)$$

Через $\big(\Delta x(t;\varepsilon), \Delta y(t;\varepsilon)\big)$ обозначим специальное приращение траектории $\big(x(t), y(t)\big)$, отвечающее специальному приращению (48) управляющей функции $u(t)$.

Тогда, учитывая оценки (46) и формулу (44) из частичной формулы приращения, получаем, что

$$J\big(u(t) + \Delta u(t;\varepsilon), v(t)\big) - J\big(u(t), v(t)\big) = \\ = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t,\psi]}{\partial u}[w_1(t) - u(t)]dt + \\ +o(\varepsilon). \quad (49)$$

Если специальное приращение $\Delta v(t;\mu)$ допустимой управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\Delta v(t;\mu) = \mu[w_2(t) - v(t)],$$

где $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $w_2(t) \in V$ произвольная допустимая управляющая функция, то, учитывая также оценку (47) из формулы приращения (45), получаем, что

$$J\big(u(t), v(t) + \Delta v(t;\mu)\big) - J\big(u(t), v(t)\big) = \\ = -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t,p]}{\partial v}[w_2(t) - v(t)]dt + \\ +o(\mu). \quad (50)$$

С помощью разложений (49) и (50) доказывается

**Теорема 2 (линеаризованный принцип максимума).**

Если множества $U$ и $V$ открыты, а вектор-функции $f(t,x,u)$ и $g(t,y,v)$ непрерывно-дифференцируемы по $(x,u)$ и $(y,v)$ соответственно, то для оптимальности допустимого управления $\big(u(t), v(t)\big)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t,\psi]}{\partial u}[w_1(t) - u(t)]dt \le 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t,p]}{\partial v}[w_2(t) - v(t)]dt \le 0$$

выполнялись для всех $w_1(t) \in U, t \in T_1$ и $w_2(t) \in V, t \in T_2$ соответственно.

Предположим, что множества $U$ и $V$ являются открытыми множествами.

В этом случае, используя формулы приращения (44) и (45), в случае открытости областей управления $U$ и $V$ получается аналог уравнения Эйлера, а также аналог условия Лежандра–Клебша.

Для этого вычислим первую вариацию функционала качества.

Пусть $\varepsilon$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$ произвольная $r$-мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $u(t)$). Специальное приращение управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t;\varepsilon) = \varepsilon \delta u(t), \\ \Delta v(t;\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Далее из формул (9), (11) получим, что

$$\Delta x(t) = \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{f_x\big(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\big)\Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{f_u\big(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\big)\Delta u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right] d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times o_6([\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|])d\tau, \quad (52)$$

$$\Delta y(t) = \\ = G_x\big(x^o(t_1)\big)\Delta x(t_1) \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t} \frac{g_y\big(t,\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)\big)\Delta y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|)d\tau + \\ + o_8(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (53)$$

Через $(\Delta x(t;\varepsilon), \Delta y(t;\varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x(t), y(t))$, отвечающее специальному приращению (51), и определим их следующим образом:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t), \quad (54)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon; t). \quad (55)$$

Здесь $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ вариации траекторий (см., например, [14]), которые являются решениями, соответственно, следующих задач,

$$\varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \left[ \frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} \times$$

$$\times\, o_6([\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|]) d\tau + o(\varepsilon, t),$$

$$\varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon, t) = \varepsilon G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t} \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Delta y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|) d\tau +$$

$$+ o_8(\|\Delta x(t_1)\|) + o(\varepsilon, t).$$

Разделив обе стороны этих соотношений на $o(\varepsilon, t)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что вектор-функции $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \left[ \frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau, \quad (56)$$

$$\delta y(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t} \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau +$$

$$+ G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1). \quad (57)$$

Из интегральных уравнений (56) и (57) получаем, что $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ является решением следующих линейных неоднородных дифференциальных систем уравнений дробного порядка:

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \delta x(t) = f_x(t, x^o(t), u^o(t)) \delta x(t) +$$

$$+ f_u(t, x^o(t), u^o(t)) \delta u(t), \quad (58)$$

$$\delta x(t_0) = 0. \quad (59)$$

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \delta y(t) = G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) +$$

$$+ g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau), \quad (60)$$

$$\delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (61)$$

Уравнения (56) и (57) и задачи Коши (58)–(59) и (60)–(61) называются *уравнениями в вариациях для рассматриваемой задачи*.

А теперь, используя разложения (54) и (55) из формулы приращения (24), получим, что

$$J(u^o(t) + \varepsilon \delta u(t), v^o(t)) - J(u^o(t), v^o(t)) =$$

$$= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) dt +$$

$$+ o(\varepsilon). \quad (62)$$

А теперь специальное приращение допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t; \mu) = 0, \\ \Delta v(t; \mu) = \mu \delta v(t), t \in T_2. \end{cases} \quad (63)$$

Здесь $\mu -$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$ произвольная $q$-мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $v(t)$).

Далее через $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, отвечающее специальному приращению (63) допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Ясно, что в этом случае $\Delta x_\mu(t) = 0$, а специальное приращение $\Delta y_\mu(t)$ траектории $y^o(t)$ удовлетворяет равенству

$$\Delta y_\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha-1} [g_y(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta y_\mu(s) +$$

$$+ g_v(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta v(s; \mu)] ds + o(\varepsilon; \mu).$$

Используя выше использованные рассуждения, имеем

$$\Delta y_\mu(t) = \mu \delta z(t) + o(t; \mu), \quad (64)$$

где $\delta z(t)$ является решением следующего вариационного уравнения:

$$\delta z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \left[ g_y\left(t,s,y^o(s),v^o(s)\right)\delta y_\mu(s) + \right.$$
$$\left. + g_v\left(t,s,y^o(s),v^o(s)\right)\delta v(s;\mu)\right] ds. \quad (65)$$

Используя формулы (64), (65) из формулы приращения функционала (24) получим

$$J\left(u(t),v(t)+\Delta v(t;\mu)\right) - J\left(u(t),v(t)\right) =$$
$$= -\mu \int_{t_1}^{t_2} M_u'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\delta v(t)dt +$$
$$+ o(\mu). \quad (66)$$

Из разложений (62), (66) следует, что первые вариации функционала качества (6) имеют соответственно вид

$$\delta^1 J(u^o,v^o;\delta u) =$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\delta u(t)dt\,, (67)$$

$$\delta^1 J(u^o,v^o,\delta v) =$$
$$= -\left[\int_{t_1}^{t_2} M_u'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\delta v(t)dt\,. (68)\right.$$

Учитывая основной результат вариационного исчисления (см., например, [14, 15]), получаем, что для оптимальности допустимого управления $\left(u_1(t),u_2(t)\right)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$\delta^1 J(u,v;\delta u) = 0, \quad (69)$$

$$\delta^1 J(u,v;\delta v) = 0, \quad (70)$$

выполнялись для всех $\delta u$ и $\delta v$ соответственно.

Тождества (69) и (70) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого порядка.

Используя произвольность $\delta u$ и $\delta v$, из тождеств (69) и (70), получаем справедливость условия оптимальности первого порядка, типа аналога уравнения Эйлера [14, 15].

**Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера).** Если множества $U$ и $V$ открыты, то для оптимальности допустимого управления $\left(u(t),v(t)\right)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H[\theta,\psi]}{\partial u} = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial M[\xi,p]}{\partial v} = 0, \quad (72)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0,t_1)$ и $\xi \in [t_1,t_2)$ соответственно.

Каждое допустимое управление, которое является решением уравнения Эйлера, называется *классической экстремалью*. Как видно уравнения Эйлера (71)–(72), конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности при сделанных предположениях и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

## Заключение

В статье рассматривается одна двухэтапная (с переменной структурой) задача оптимального управления, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробным производным Капуто.

С помощью модифицированного варианта метода приращений, в рассматриваемой задаче построена формула приращения первого порядка минимизируемого функционала, учитывающа я его особенности и с помощью специальной вариации управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ вычислена его первая вариация и, используя ее, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

В случае выпуклости областей управления для рассматриваемой задачи управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

## Список источников


1. *Мансимов К.Б., Рзаева В.Г.* Квазиособые управления в задачах оптимального управления, описываемых гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 13–20.
2. *Габелко К.Н.* Оптимизация многоступенчатых процессов. Аннотация дисс. на конкурс уч. канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1975. 17 с.
3. *Масталиев Р.О.* О задаче оптимального управления линейной системой с переменной структурой // Владикавказский математический журнал. 2016. Вып. 1. С. 63–70.
4. *Муслумов В.Б.* Условия оптимальности в одной системе с распределенными параметрами: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Баку, 2006. 21 с.
5. *Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б.* Об одной задаче оптимального управления с переменной структурой // Вестник Бакинского гос. университета. Серия физико-математических наук. 2022. № 3. С. 5–16.

6. *Постнов С.С.* Исследование задач оптимального управления динамическими системами дробного порядка методом моментов: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 26 с.
7. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advances in Difference Equations. 2017. № 1. P. 32–51.
8. *Agrawal O.P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems. Nonlinear Dynamics. 2004. № 38. P. 323–337.
9. *Ali H.M., Pereira F.L., Gama S.M. A.* A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. № 39. P. 3640–3649.
10. *Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б.* Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. 2022. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3(58). С. 5–10.
11. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993. 780 p.
12. *Ахмедова Ж.Б.* Принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 1(20). С. 5–11.
13. *Lin S.Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 2013. No 1.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
15. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.


## References


1. Mansimov, K.B. and Rzaeva, V.G. (2020), "Quasi-osome controls in optimal control problems described by hyperbolic integro-differential equations", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(48), pp. 13-20.
2. Gabelko, K.N. (1975), "Optimization of multistu-penchat processes", *Abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*. Irkutsk, 17 p.
3. Mastaliev, R.O. (2016), "On the problem of optimal control of a linear system with a variable structure" *Vladikavkaz Mathematical Journal*, no. 1, pp. 63-70.
4. Muslumov, V.B. (2006), "Optimality conditions in one system with distributed parameters", *Abstract of dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*, Baku, 2006, 21 p.
5. Mansimov, K.B. and Ahmedova, J.B. (2022), "About one task of optimal control with a variable structure", *Bulletin of Baku State University, series of physical and mathematical sciences*, no. 3, pp. 5-16.
6. Postnov, S.S. (2015), "Research of the optimum control tasks of the dynamic systems of the fractional order by the method of moments", *Author's abstract of the dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Moscow, 26 p.
7. Bahaa, G.M. (2017), "Fractional optimal control problem for differential system with delay argument", *Advances in Difference Equations*, no. 1, pp. 32-51.
8. Agrawal, O.P. (2004), "A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems", *Nonlinear Dynamics*, no. 38, pp. 323–337.
9. Ali H.M., Pereira F.L. and Gama S.M. (2016), "A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, no. 39, pp. 3640-3649.
10. Mansimov, K.B. and Akhmedova, J.B. (2022) "Analog of Pontryagin's maximum principle in the problem of optimal control of the system of differential equations with fractional Caputo derivative and multipoint quality criterion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(58). pp. 5-10.
11. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev O.I. (1993), *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland.
12. Akhmedova, J.B. (2021), "Pontryagin's maximum principle for one nonlinear fractional optimal control problem", *Mathematical Bulletin of Vyatka State University*, no. 1(20), pp. 5-11.

13. Lin, S.Y. (2013), "Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations", *Journal of Inequalities and Applications*, 549, no. 1.
14. Gabasov, R. and Kirillova, F.M. (2011), "*Osobye optimal'nye upravleniya*" [Special optimal controls], Librocom, Moscow, Russia.
15. Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M. and Fomin, S.V. (2018), "Optimalnoe upravlenie" [*Optimal control*]. Fizmatlit, Moscow, Russia.

**Информация об авторе:**

*Ж. Б. Ахмедова* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), AuthorID: 1229288.

**Information about the author:**

*Zhalya B. Ahmedova* – Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department, the Applied Mathematics and Cybernetics Faculty, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), AuthorID: 1229288.