МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.938
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54
https://elibrary.ru/burdzi

О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах

Ильмира Жаватовна Мустафина
Учалинсий колледж горной промышленности, г. Учалы, Россия
e-mail: fanina84@bk.ru

Аннотация. В статье безопасные и опасные точки бифуркации изучаются для периодических дифференциальных уравнений со скалярным параметром. Определяются типы точек бифуркации (безопасные или опасные), изучается поведение системы при переходе ее параметров через точку бифуркации в случаях возникновения сценария бифуркации вынужденных колебаний и бифуркации Андроново–Хопфа. Основные формулы получены в терминах исходных уравнений и не требуют перехода к нормальным формам и использования теорем о центральном многообразии.

Ключевые слова: *бифуркация; безопасная и опасная точка бифуркации; область устойчивости; бифуркация вынужденных колебаний; седло-узловая бифуркация; транскритическая бифуркация; бифуркация типа вилки; бифуркация Андронова–Хопфа*

Для цитирования: *Мустафина И. Ж.* Безопасные и опасные точки бифуркации в нелинейных динамических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 47–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54. https://elibrary.ru/burdzi.

Статья поступила в редакцию 04.06.2024; одобрена после рецензирования 04.09.2024; принята к публикации 07.10.2024.

MECHANICS

Research article

Safe and Dangerous Bifurcation Points in Non-Autonomous Dynamical Systems

Ilmira Zh. Mustafina
Uchaly College of Mining Industry, Uchaly, Russia
e-mail: fanina84@bk.ru

Abstract. Dynamical systems described by periodic differential equations depending on a scalar parameter are considered. The types of bifurcation points (safe or dangerous) are determined and the behavior of the system when its parameters pass through the bifurcation point is studied. The basic formulas are obtained in terms of the initial equations and do not require a transition to normal forms and the use of theorems about the central manifold.

Keywords: *bifurcation scenario; safe and dangerous bifurcation point; boundary point of the stability region; bifurcation of forced oscillations; saddle-node bifurcation; trans-critical bifurcation; fork-type bifurcation; Andronov–Hopf bifurcation*

For citation: Mustafina, Il. Zh. (2024), "Safe and Dangerous Bifurcation Points in Non-Autonomous Dynamical Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 47-54. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54. https://elibrary.ru/burdzi.

The article was submitted 04.06.2024; approved after reviewing 04.09.2024; accepted for publication 07.10.2024.

Введение

В статье изучаются типы границ областей устойчивости динамических систем при переходе параметрами систем этих границ. Границы области устойчивости могут быть принципиально двух разных типов: безопасные и опасные. Следуя Н.Н. Баутину [1, 2], под термином *безопасные* границы области устойчивости системы понимают такие границы (или части границ), пересечение которых параметрами системы приводит лишь к малым обратимым изменениям состояния системы; соответственно, под *опасными* понимают такие границы, пересечение которых параметрами системы приводит к значительным и необратимым изменениям в поведении системы.

Основным объектом исследования статьи является неавтономная нелинейная динамическая система, зависящая от скалярного параметра μ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\mu), \qquad x \in R^N, \tag{1}$$

где функция $f(x,t,\mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных и $T-$ периодической по t, т. е. $f(x,t+T,\mu) \equiv f(x,t,\mu)$.

Так как предполагается, что функция $f(x,t,\mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных, то ее можно разложить в ряд Тейлора. Тогда систему (1) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\mu)x + b(x,t,\mu) + d(t,\mu), \; x \in R^N, \tag{2}$$

где $A(t,\mu) = f_x'(x^*(\mu),t,\mu)-$ матрица Якоби правой части системы (1) в точке $x^*(\mu)$, матрица $A(t,\mu)$, нелинейность $b(x,t,\mu)$ и вектор-функция $d(t,\mu)$ являются T-периодическими по t.

Предположим, что все три слагаемые в правой части системы (2) при $x = x^*(\mu)$ являются линейно зависимыми. Тогда система $f(x,t,\mu) \equiv 0,$ имеет стационарное решение $x^*(\mu)$. Предположим, что это решение единственно при всех μ, при этом пусть функция $x^*(\mu)$ является непрерывно дифференцируемой.

Рассмотрим линейную часть системы (2):

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\mu)x, \;\; x \in R^N. \tag{3}$$

Свойства устойчивости точки равновесия $x^*(\mu)$ системы (1) определяются по свойствам системы (3).

Обозначим через $X(t,\mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР) линейной системы (3). Тогда $V(\mu) = X(T,\mu)$ является матрицей монодромии системы (3).

Областью устойчивости решения $x^*(\mu)$ уравнения (1) будем называть область Ω в пространстве Π параметров μ этой системы, при которых решение $x^*(\mu)$ асимптотически устойчиво; другими словами, $\mu \in \Omega$, если и только если все собственные значения матрицы $V(\mu)$ по модулю меньше 1 (см. [3]). Некоторую точку μ_0 будем называть *граничной точкой области устойчивости* Ω, если в любой окрестности точки μ_0 содержатся точки как из области устойчивости Ω, так и из области неустойчивости. Множество всех граничных точек области устойчивости Ω будем называть *границей области устойчивости* Ω.

Значение μ_0 является точкой бифуркации, если матрица $V(\mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное единице по модулю и не имеет собственных значений больших одного по модулю (см. [3]). В соответствии с общей теорией бифуркаций каждая граничная точка области устойчивости является точкой бифуркации динамической системы.

Шильниковым Л.П. [1] приводятся определения безопасной и опасной точки бифуркации для автономных динамических систем. По аналогии с ним приведем определения тех же понятий для периодических динамических систем. Будем говорить, что точка бифуркации μ_0 является *безопасной*, если решение $x^*(\mu)$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво; точка μ_0 является *опасной*, если решение $x^*(\mu)$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ неустойчиво.

Случай, когда решение $x^*(\mu)$ будет устойчивым (по Ляпунову), но не асимптотически, в приведенных в конце статьи источниках не рассматривается. В данной статье этот случай также не приводится.

Задача исследования границ областей устойчивости является одной из важных и интересных задач теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и их приложений. Изучению этой задачи посвящены работы многих авторов (см. [1−9]). Детальное исследование этого вопроса проведено в работах [1, 3], в которых дана достаточно полная классификация границ областей устойчивости точек равновесия и периодических траекторий динамических систем, приведены списки безопасных и опасных границ, а также описаны сценарии бифуркационного поведения системы при переходе ее параметров через указанные границы. Отметим, что полученные в указанных работах результаты относятся к автономным дифференциальным уравнениям, которые предварительно редуцированы на соответствующие центральные многообразия и преобразованы с помощью метода нормальных форм (см. [1]).

В работе [10] предложены новые результаты в задаче исследования границы области устойчивости динамических систем, описываемых двупараметрическими неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями. В настоящей работе предлагаются достаточные условия опасных и безопасных границ области устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями, зависящие от скалярного параметра.

Основные результаты получены в терминах самих уравнений и не требуют перехода к нормальным формам и использования теоремы о центральном многообразии.

Основные результаты

Предположим, что функция $b(x,t,\mu)$ имеет вид:

$$b(x,t,\mu) = b_2(x,t,\mu) + b_3(x,t,\mu) + +\tilde{b}_4(x,t,\mu), \qquad (4)$$

где $b_2(x,t,\mu)$ и $b_3(x,t,\mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{b}_4(x,t,\mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{b}_4(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по t и μ.

Также будем рассматривать случай, когда $d(t,\mu) \equiv 0$. Тогда уравнение (2) представится в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\mu)x + b(x,t,\mu),\ x \in R^N. \tag{5}$$

Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ точка равновесия $x^* = x^*(\mu_0)$ системы (2) является негиперболической, т.е. матрица монодромии $V_0 = V(\mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное одному по модулю.

Ниже будем рассматривать следующие основные случаи негиперболичности, когда матрица V_0 имеет:

U1. простое собственное значение 1;

U2. пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$.

В этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы V_0 меньше 1 по модулю.

Замечание 1. Случаи $\theta_0 = \frac{1}{4}$ и $\theta_0 = \frac{1}{3}$ соответствуют сильному резонансу и здесь не рассматриваются.

Замечание 2. Предлагаемый в статье подход может быть модифицирован и для решения поставленных задач в более общих чем в U1 и U2 условиях. Например, для ситуаций, когда матрица V_0 имеет кратные полупростые собственные значения, равные 1 или кратные полупростых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$.

Случай U1. В этом случае качественная перестройка поведения системы (2) в окрестности точки $x^*(\mu_0)$ при переходе параметра μ через μ_0, как правило, состоит в возникновении нестационарных *T*-периодических решений малой амплитуды в окрестности точки $x^*(\mu_0)$ (см., например, [3, 8]). Такую перестройку поведения системы обычно называют *бифуркацией вынужденных колебаний* системы (2).

Бифуркация вынужденных колебаний систем (2) и (5) может реализовываться по различным сценариям, основными из которых являются седло-узловая бифуркация вынужденных колебаний (для системы (5)), транскритическая бифуркация вынужденных колебаний и бифуркация вынужденных колебаний типа вилки (для системы (2)). Более детально эти сценарии описаны, например, в [3, 8].

Здесь мы ограничимся приведением признаков безопасности (опасности) точки бифуркации μ_0. С этой целью обозначим через e и g собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^*, соответственно, отвечающие собственному значению 1. Эти векторы можно считать нормированными равенствами $\|e\| = 1,\ (e,g) = 1$.

Обозначим через P_0 и P^0 действующие в R^N линейные операторы, определенные равенствами:

$$P_0 x = (x,g)e,\ \ P^0 = I - P_0. \tag{6}$$

Если $N=1$, то $P_0x=x$ и $P^0x=0$. Положим $B_0=I-V_0+P_0$. По построению оператор $B_0:R^N\to R^N$ обратим.

Положим $$l_2=\int_0^T(X^{-1}(\tau,\mu_0)b_2(\varphi_0(\tau),\tau,\mu_0),g)d\tau, \tag{7}$$

$$l_3=\int_0^T(b'_{2x}(\varphi_0(\tau),\tau,\mu_0)B_0^{-1}P^0b_2(\varphi_0(\tau),\tau,\mu_0),g)d\tau+\int_0^T(X^{-1}(\tau,\mu_0)b_3(\varphi_0(\tau),\tau,\mu_0),g)d\tau, \tag{8}$$

$$\zeta=\int_0^T(A'_\mu(\tau,\mu_0)e,g)d\tau,$$

здесь $b'_{2x}-$ матрица Якоби квадратичной нелинейности $b_2(x,t,\mu)$, $\varphi_0(t)=X(t,\mu_0)e$, т.е. $\varphi_0(t)-$это T-периодическое решение линейной системы (3) при $\mu=\mu_0$, стартующее при $t=0$ из точки $x=e\in R^N$ (такое решение системы (3) существует в силу условия U1).

В частном случае, когда матрица $A(t,\mu_0)$ является постоянной, формулы (7) и (8) упрощаются:

$$l_2=\int_0^T(b_2(e,\tau,\mu_0),g)d\tau,$$

$$l_3=\int_0^T(b'_{2x}(e,\tau,\mu_0)B_0^{-1}P^0b_2(e,\tau,\mu_0),g)d\tau+$$
$$+\int_0^T(b_3(e,\tau,\mu_0),g)d\tau.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие случая U1 и верно соотношение $l_2\zeta\neq0$. В этом случае точка μ_0 является опасной точкой бифуркации системы (2).

Доказательство. Систему (2) будем ассоциировать с дискретной динамической системой:

$$x_{n+1}=V(\mu)x_n+\ +V(\mu)\int_0^T X^{-1}(s,\mu)[b(x_n(s,\mu)+d(s,t),s,\mu)]ds,$$
$$n=0,1,2,\dots\ x\in R^N, \tag{9}$$

где $x_{n+1}(t,\mu)$ это решение уравнения (2) с начальным условием $x^*(\mu_0)=x_n$. Отметим, что неподвижные точки системы (9) определяют T-периодические решения исходной системы (2), а циклы периода q определяют qT-периодические решения системы (5).

Система (9) при $\mu=\mu_0$ имеет точку равновесия $x^*=x^*(\mu_0)$. Значение $\mu=\mu_0$ будем называть *точкой бифуркации дискретной динамической системы* (9), если матрица монодромии $V(\mu)$ в уравнений (9) при $\mu=\mu_0$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю и не имеет собственных значений больших одного по модулю. Согласно этому определению, значение $\mu=\mu_0$ является точкой бифуркации системы (9).

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что решение $x^*=x^*(\mu_0)$ уравнения (2) при $\mu=\mu_0$ является неустойчивым. В свою очередь, для этого достаточно показать, что решение $x=x^*(\mu_0)$ дискретной системы (9) является неустойчивым.

Согласно теореме о центральном многообразии (см. [11] стр. 186) и методу нормальных форм (см. [11] стр. 198), задача о локальных бифуркациях для $N-$мерной системы (9) может быть сведена (см. [1, 3]) к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для одномерного уравнения:

$$u_{n+1}=u_n+l_2u_n^2+o(u_n^3), \tag{10}$$

где число l_2 определяется равенством (7).

В уравнении (10) коэффициент перед u_n равен 1, поэтому устойчивость решения u_n определяется знаком коэффициента перед u_n^2. Так как $l_2 \neq 0$ и $l_2 > 0$, то решение u_n уравнения (10) является неустойчивым.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть имеет место случай U1 и выполнено соотношение $l_2\zeta \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является опасной точкой бифуркации системы (5).

Таким образом, для систем (2) и (5) значение μ_0, как правило, является опасной точкой бифуркации.

Теорема 3. Пусть имеет место случай U1 и выполнено соотношение $l_2 = 0$ и $l_3\zeta \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации системы (5), если $l_3 < 0$ $(l_3 > 0)$.

Теоремы 2 и 3 доказываются по такой же схеме, что и теорема 1.

Таким образом, если $l_2 \neq 0$ (в частности нелинейность (4) начинается с квадратичных по x слагаемых), то значение μ_0 параметра μ, как правило, является опасной точкой бифуркации системы (5). Если же $l_2 = 0$ (в частности нелинейность (4) начинается с кубических по x слагаемых), то значение μ_0 параметра μ может быть как безопасной, так и опасной точкой бифуркации системы (5).

Случай U2. В этом случае, как правило, при переходе параметра μ через точку μ_0 в системе (5) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа. Более детально этот сценарий описан, например, в [7].

Приведем признаки безопасности (опасности) точки бифуркации μ_0. С этой целью обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства:

$$V_0(e+ig) = e^{2\pi\theta_0 i}(e+ig), \qquad V_0^*(e^*+ig^*) = e^{-2\pi\theta_0 i}(e^*+ig^*). \tag{11}$$

Далее в этом подразделе для простоты будем считать, что система (5) двумерна, т.е. $N = 2$, а матрица V_0 имеет вид $V_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta_0 & \sin 2\pi\theta_0 \\ -\sin 2\pi\theta_0 & \cos 2\pi\theta_0 \end{bmatrix}$.

Пусть также для простоты нелинейность $b_2(x,t,\mu)$ в равенстве (4) является нулевой $b_2(x,t,\mu) \equiv 0$. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но приводит к более громоздким формулам.

Положим

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{T}(b_3(h(t,\varphi),t,\mu_0),h(t,\varphi))dtd\varphi, \tag{12}$$

где $h(t,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta_0 t+\varphi) \\ \sin(2\pi\theta_0 t+\varphi) \end{bmatrix}$.

Теорема 4. Пусть имеет место случай U2 и выполнено соотношение $\kappa_0 \neq 0$. Тогда точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации системы (5), если $\kappa_0 < 0$ ($\kappa_0 > 0$).

Теорема 4 следует из общих теорем о локальных бифуркациях в динамических системах [6, 9].

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + u^2 u' + [(2\pi\theta_0)^2 + (1+\cos t)\mu]u = 0, \qquad (13)$$

где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, при этом $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$.

Уравнение (13) может быть сведено к уравнению вида (5) при $T = 2\pi$ и $x \in R^2$ и в котором:

$$b_2(x,t,\mu) \equiv 0, \; b_3(x,t,\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

При $\mu = 0$ имеет место случай U2, т.е. имеет место сценарий бифуркаций Андронова–Хопфа.

Проведя вычисления по формуле (12) получим, что $\kappa_0 = -0,25\pi$.

Тогда, согласно теореме 4, значение параметра $\mu = 0$ является безопасной точкой бифуркации для уравнения (13).

Заключение

В статье получены достаточные признаки опасности и безопасности точки бифуркации для динамических систем, описываемых неавтономными нелинейными дифференциальными уравнениями, содержащими скалярный параметр.

Список источников

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2009. 548 с.

2. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости // Сер. "Современные проблемы механики". Л.–М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.

3. *Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А. и др.* Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журн. 2010. Т. 2, № 4. С. 3–26.

4. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.

5. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998.

6. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 560 с.

7. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

8. *Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф. и др.* Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журн. 2018. Т. 10, № 1. С. 25–49.

9. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24–30.

10. *Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г.* Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 10. С. 74–89.

11. *Юмагулов М.Г.* Введение в нелинейную динамику: теория, приложения, модели: учеб. пособие для вузов / М.Г. Юмагулов. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2024. 368 с.

References

1. Shil`nikov, L.P., Shil`nikov, A.L., Turaev, D.V. and etc. (2009), *Metody` kachestvennoj teorii v nelinejnoj dinamike* [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics], Ch. 2. M.–Izhevsk: In-t komp`yut. issled., 548 p. (In Russ.).
2. Bautin, N.N. (1949), *Povedenie dinamicheskix sistem vblizi granicz oblasti ustojchivosti* [Behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability domain], Ser. "Covremenny`e problemy` mexaniki", L.–M.: OGIZ Gostexizdat. (In Russ.).
3. Vy`shinskij, A.A., Ibragimova, L.S., Murtazina, S.A and etc. (2010), *Operatorny`j metod priblizhennogo issledovaniya pravil`noj bifurkacii v mnogoparametricheskix dinamicheskix sistemax* [An operator method for approximate investigation of correct bifurcation in multiparametric dynamical systems], Ufimsk. matemat. zhurn. Vol. 2, no. 4, pp. 3-26. (In Russ.).
4. Van D., Li Ch. and Chou, Sh.-N. (2005), *Normal`ny`e formy` i bifurkacii vektorny`x polej na ploskosti* [Normal shapes and bifurcations of vector fields on the plane], M.: MCzNMO. (In Russ.).
5. Kuznetsov, Yu. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, N.Y.: Springer.
6. Gukenxejmer, Dzh. and Xolms, F. (2002), *Nelinejny`e kolebaniya, dinamicheskie sistemy` i bifurkacii vektorny`x polej* [Bifurcation of the birth of the cycle and its applications]. M.–Izhevsk: In-t komp`yut. issled. 560 p. (In Russ.).
7. Marsden, Dzh. and Mak-Kraken, M. (1980), *Bifurkaciya rozhdeniya cikla i ee prilozheniya* [Bifurcation of the birth of a cycle and its applications], M.: Mir. (In russ.)
8. Gusarova, N.I., Murtazina, S.A., Fazly`tdinov, M.F. and etc. (2018), *Operatorny`e metody` vy`chisleniya lyapunovskix velichin v zadachax o lokal`ny`x bifurkaciyax dinamicheskix sistem* [Operator methods for calculating Lyapunov quantities in problems of local bifurcations of dynamical systems], Ufimsk. matemat. Zhurn, Vol. 10, no. 1, pp. 25-49. (In Russ.).
9. Krasnosel`skij, M.A., Kuzneczov, N.A. and Yumagulov, M.G. (1996), *Operatorny`j metod analiza ustojchivosti ciklov pri bifurkacii Xopfa* [An operator method for analyzing the stability of cycles under Hopf bifurcation] Avtomatika i telemexanika, no.12, pp. 24-30. (In Russ.).
10. Ibragimova, L.S., Mustafina, I.Zh. and Yumagulov, M.G. (2017), Issledovanie granicz oblastej ustojchivosti dvuxparametricheskix dinamicheskix sistem [Investigation of the boundaries of the stability domains of two-parameter dynamical systems], AiT, no. 10. pp. 74-89. (In Russ.).
11. Yumagulov, M.G. (2024), *Vvedenie v nelinejnuyu dinamiku: teoriya, prilozheniya, modeli: uchebnoe posobie dlya vuzov 2-e izd., ster.*┤Introduction to nonlinear dynamics: theory, applications, models: textbook for universities], Sankt-Peterburg: Lan, 368 p. (In Russ.).

Информация об авторе:

И. Ж. Мустафина – преподаватель высшей категорий Учалинского колледжа горной промышленности (453700, Россия, г. Учалы, ул. Первостроителей, 7).

Information about the author:

Il. Zh. Mustafina – the highest categories teacher at the Uchaly College of Mining Industry (7, Pioneer builders St., Uchaly, Russia, 453700).