Научная статья
УДК 517.938
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25

Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций

Марат Гаязович Юмагулов[1], Наталья Анатольевна Васенина[2]
[1,2]Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия
[1]yum_mg@mail.ru
[2]zhiber.na@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения, возникающие при моделировании систем типа "реакция-диффузия". Изучаются вопросы об устойчивости точек равновесия в критических случаях, а также о бифуркациях в окрестностях таких точек. Основное внимание уделяется изучению спектральных свойств операторов линеаризованной задачи. Установлена дискретность спектра, изучены свойства корневых и инвариантных подпространств, предложены формулы для собственных функций. В качестве приложения обсуждаются вопросы о признаках бифуркации кратного равновесия и бифуркации Андронова–Хопфа в окрестностях точек равновесия. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных подходов в задачах исследования устойчивости и бифуркаций.

Ключевые слова: *система "реакция-диффузия"; матрица диффузии; точка равновесия; устойчивость; бифуркация; собственные значения; граничные условия; линейный оператор*

Для цитирования: *Юмагулов М.Г., Васенина Н.А*. Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 17–25. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25.

Статья поступила в редакцию 30.04.2024; одобрена после рецензирования 18.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

Spectral Properties of the "Reaction-Diffusion" System Operators and Bifurcations Signs

Marat G. Yumagulov[1], Natalia A. Vasenina[2]
[1,2]UFA University of Science and Technology, Ufa, Russia
[1]yum_mg@mail.ru
[2]zhiber.na@gmail.com

Abstract. The article discusses differential equations that arise when modeling reaction-diffusion systems. Questions about the stability of equilibrium points in critical cases, as well as about bifurcations in the vicinity of such points, are studied. The main attention is paid to the linearized problem operators spectral properties study. The spectrum discreteness was established, the root properties and invariant subspaces were studied, and formulas for eigenfunctions were proposed. As an application, questions about the multiple equilibrium bifurcation signs and Andronov–Hopf bifurcation in the vicinity of equilibrium points are discussed. Examples are given to illustrate the proposed approaches effectiveness in studying stability and bifurcations problems.

Keywords: *reaction-diffusion system; diffusion matrix; equilibrium point; stability; bifurcation; eigenvalues; boundary conditions; linear operator*

For citation: Yumagulov, M. G. and Vasenina, N. A. (2024), "Spectral Properties of the "Reaction-Diffusion" System Operators and Bifurcations Signs", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 17-25. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25.

The article was submitted 30.04.2024; approved after reviewing 18.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается зависящая от параметра μ система "реакция-диффузия" (см., например, [1–6]), описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}} = f(\mathrm{w}, \mu) + \mathrm{D}(\mu)\Delta \mathrm{w}, \ \ w \in R^n , \qquad (1)$$

в которой $\mathrm{f}(\mathrm{w}, \mu)$ – гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция переменных w и μ, $D(\mu) = \left(d_{ij}(\mu)\right)$ – матрица диффузии с положительными элементами, гладко зависящими от μ, Δ-оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Уравнение (1) изучается в параллелепипеде $\Omega = \{x\colon 0 \le \mathrm{x}_1 \le \pi, 0 \le \mathrm{x}_2 \le \pi, \ldots, 0 \le \mathrm{x}_\mathrm{m} \le \pi\}$ с граничными условиями Неймана:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Предполагается, что система (1)–(2) имеет стационарное (т.е. не зависящее от времени t) решение $w = v(x, \mu)$, гладко зависящее от x и μ . Функция $w = v(x, \mu)$ является решением краевой задачи

$$f(\mathrm{w}, \mu) + \mathrm{D}(\mu)\Delta \mathrm{w} = 0, \ \ \left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 . \qquad (3)$$

В частности, если матрица $\mathrm{D}(\mu)$ обратима, то функция $w = v(x, \mu)$ будет решением нелинейной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона. Решение $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) будем также называть *точкой равновесия* этой системы.

Если решение $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) не зависит от x , т. е. является функцией вида $w = v(\mu)$, то говорят, что точка равновесия $w = v(\mu)$ является *пространственно однородным* положением равновесия. В противном случае говорят о *пространственно неоднородном* положении равновесия $w = v(x, \mu)$.

Одной из наиболее интересных задач при изучении динамики системы (1)–(2) является задача о бифуркациях в окрестности ее точек равновесия. Этой задаче посвящены исследования многих авторов (см., например, [4–11] и имеющуюся там библиографию). Наиболее типичными здесь являются:

1) *бифуркация кратного равновесия* (когда спектр соответствующей линеаризованной системы проходит через нулевое собственное значение);

2) *бифуркация Андронова–Хопфа* (когда спектр проходит через пару чисто мнимых собственных значений).

Задача анализа динамики системы (1)–(2) в окрестности точки бифуркации (устойчивость возникающих решений, направленность бифуркаций, существование непрерывных ветвей бифуркационных решений и др.) требует проведения детального исследования свойств спектра соответствующей линеаризованной системы. Такие исследования проводились в ряде работ (см., например, [6, 7, 12, 13]). Однако многие возникающие здесь вопросы, на наш взгляд, изучены недостаточно, а некоторые и не обсуждались.

В настоящей работе рассматривается ряд свойств спектра линеаризованной задачи в окрестности точки равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) при бифуркационных значениях параметра μ . В качестве приложения рассматриваются соответствующие задачи для системы (1)–(2) при $\mathrm{n} = 2$ и $\mathrm{n} = 3$, т. е. для двух- и трехкомпонентных систем.

2. Вспомогательные сведения

Укажем функциональные пространства, в которых будет изучаться система (1)–(2).

Пусть $L_2(\Omega)$ – это гильбертово пространство вектор-функций $v(x)$, определенных в области Ω. Через $C(\Omega)$ и $C^2(\Omega)$ обозначим пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых функций на Ω соответственно. Наконец, через $W_2^2(\Omega)$ будем обозначать соболевское пространство, являющееся пополнением пространства $C^2(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{W_2^2} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le 2} \|D^\alpha v(x)\|^2 \, dx_1 \ldots dx_m\right)^{1/2}, \qquad (4)$$

где $\|w\|$ – это евклидова норма векторов w из пространства R^n , а D^α – оператор дифференцирования

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1},_{\dots,}\partial x_m^{\alpha_m}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m.$$

Определим множество

$$C_0^2(\Omega) = \left\{ v \in C^2 : \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \qquad (5)$$

Оператор Лапласа $\Delta: C^2 \to C$ может быть (см., например, [7, 12]) расширен до замкнутого самосопряженного оператора $\Delta_0: L_2 \to L_2$ с областью определения G, образованного замыканием в W_2^2 множества (5). Область определения G оператора Δ_0 является банаховым пространством с нормой, определенной формулой (4).

Спектр оператора Δ_0 состоит из изолированных собственных значений $\lambda_k = -(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2)$ (здесь k – мультииндекс: $k = k_1, k_2, \dots, k_m$, а k_j – целые неотрицательные числа) конечной кратности, при этом из системы собственных функций

$$e_k(x) = e_0 \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \dots \cos(k_m x_m), \qquad (6)$$

где $e_0 \in R^n$, можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. В частности, оператор Δ_0 имеет собственное значение λ=0.

Решениями системы (1)–(2) будем называть функции $w(x,t)$, которые:

1) при каждом фиксированном значении t являются элементами пространства $W_2^2(\Omega)$;

2) при каждом фиксированном значении $x \in \Omega$ являются непрерывно дифференцируемыми по t функциями;

3) удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при всех $t \geq 0$ и $x \in \Omega$.

В частности, точка равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) при каждом фиксированном значении μ является элементом пространства $W_2^2(\Omega)$.

3.Об устойчивости точки равновесия системы (1)–(2)

Точку равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) называют (см., например, [6, 12]) *устойчивой по Ляпунову*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|v_0(x) - v(x,\mu)\|_{W_2^2} < \delta$, то решение $w(x,t,\mu)$ системы (1)–(2) удовлетворяет неравенству $\|w(x,t,\mu) - v(x,\mu)\|_{W_2^2} < \varepsilon$ для всех $t > 0$; здесь $w(x,t,\mu)$ – решение задачи Коши для системы (1)–(2) с начальным условием $w(x,0,\mu) = v_0(x)$. Если кроме того выполняется условие $\|w(x,t,\mu) - v(x,\mu)\|_{W_2^2} \to 0$ при $t \to \infty$, то точку равновесия $w = v(x,\mu)$ называют *асимптотически устойчивой*.

Для исследования устойчивости точки равновесия $w = v(x,\mu)$ системы (1)–(2) могут быть использованы различные методы теории устойчивости решений дифференциальных уравнений параболического типа (см., например, [12–14]). Одним из основных здесь является метод, основанный на переходе к линеаризованной задаче:

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{A}(x,\mu)\mathrm{w} + \mathrm{D}(\mu)\Delta w, \quad \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (7)$$

в которой $A(x,\mu) = f_w'(v(x,\mu),\mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(\mathrm{w},\mu)$, вычисленная в точке равновесия $w = v(x,\mu)$. Вопрос об устойчивости точки равновесия $w = v(x,\mu)$ может быть изучен на основе спектральных свойств линеаризованной системы (7).

В общей постановке, а именно, когда $w = v(x,\mu)$ является пространственно неоднородным положении равновесия системы (1)–(2), указанная задача достаточно сложна. Во-первых, для нахождения функции $w = v(x,\mu)$ требуется решить нелинейную краевую задачу (3). Во-вторых, в линеаризованной системе (7) матрица $\mathrm{A}(x,\mu)$ зависит от пространственной переменной x, что существенно усложняет исследование спектра системы (7).

Ситуация упрощается, если $w = v(x,\mu)$ является пространственно однородным положении равновесия системы (1)–(2), т.е. является функцией вида $w = v(\mu)$. Для нахождения такого решения достаточно решить алгебраическое уравнение $f(\mathrm{w},\mu) = 0$. При этом в линеаризованной системе (7) матрица $\mathrm{A}(x,\mu)$ уже не будет зависеть от пространственной переменной x.

4. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Пусть точка равновесия $w = v(x,\mu)$ системы (1)–(2) является пространственно однородным положением равновесия, т.е. не зависит от x. Можно считать, что $v(x,\mu) = 0$.

В силу указанного предположения система (1)–(2) может быть представлена в виде

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{A}(\mu)\mathrm{w} + \mathrm{D}(\mu)\Delta w + \mathrm{h}(\mathrm{w},\mu),$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (8)$$

в котором $A(\mu) = f_w'(0,\mu)$ – квадратная матрица порядка n, а нелинейность $\mathrm{h}(\mathrm{w},\mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|h(w,\mu)\| =$

$o(\|w\|)$, $\|w\| \to 0$, равномерно по μ. Соответственно, линеаризованная система имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D(\mu)\Delta w, \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Далее, считая параметр μ фиксированным, для простоты обозначений положим $A = A(\mu)$ и $D = D(\mu)$. Рассмотрим действующий в $L_2(\Omega)$ линейный оператор

$$S = A + D\Delta : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \quad (10)$$

с областью определения *G*.

В силу указанных выше свойств оператора Лапласа и основных предположений о системе (1)–(2) верна следующая

Теорема 1. *Оператор (10) с областью определения G является замкнутым.*

Перейдем к обсуждению спектральных свойств оператора (10).

Теорема 2. *Спектр оператора (10) является дискретным, то есть состоит только из собственных значений. При этом множество собственных значений оператора (10) совпадает с множеством собственных значений всех матриц*

$$B_k = A - (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2)D, \quad (11)$$

здесь k – мультииндекс: $k = k_1, k_2, ..., k_m$, а k_j–- целые неотрицательные числа.

Приведем схему доказательства теоремы 2. Ограничимся рассмотрением случая $m = 2$; тогда матрицы (11) принимают вид

$$B_{kl} = A - (k^2 + l^2)D, \quad (12)$$

где k, l – целые неотрицательные числа.

В рассматриваемом случае оператор $\Delta : L_2 \to L_2$ является самосопряженным с собственными значениями $\lambda_{k,l} = -(k^2 + l^2)$, а собственные функции (см. также (6))

$$e_{k,l}(x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cos(kx_1)\cos(lx_2),$$

$$g_{k,l}(x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cos(kx_1)\cos(lx_2) \quad (13)$$

образуют ортогональный базис в L_2. Обозначим через $E_{k,l}$ двумерные подпространства пространства L_2 с базисом из функций (13). Подпространства $E_{k,l}$ являются инвариантными для оператора (10). Поэтому спектр σ оператора (10) представляется в виде $\sigma = \bigcup_{k,l=0}^{\infty} \sigma_{k,l}$, где $\sigma_{k,l} = \sigma(A + D\Delta : E_{k,l} \to E_{k,l})$. Отсюда и следует справедливость теоремы 2.

Из теоремы 2 и общей теории устойчивости решений дифференциальных уравнений параболического типа (см., например, [9, 10]) следует, что верна

Теорема 3. *Пусть вещественные части всех собственных значений λ матриц (11) удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda < -\alpha_0$ при некотором положительном α_0. Тогда нулевое положение равновесия $w = 0$ системы (8) является асимптотически устойчивым. Если же хотя бы одна из матриц (11) имеет собственное значение с положительной вещественной частью, то положение равновесия $w = 0$ является неустойчивым.*

Обсудим теперь вопрос о кратностях собственных значений оператора (10) и о соответствующих собственных функциях. С этой целью по матрицам (11) определим числа

$$\rho_k = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2. \quad (14)$$

Множество Z_0 чисел вида (14) является подмножеством множества Z_+ всех целых неотрицательных чисел, при этом Z_0 не совпадает с Z_+. Отметим также, что числам ρ_k из множества Z_0 могут соответствовать как один, так и два и более мультииндексов $k = k_1, k_2, ..., k_m$.

Наряду с множествами Z_+ и Z_0, определим также множество Z_1, состоящее из тех $\rho \in Z_0$, для которых существует единственный мультииндекс $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ такой, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2$. Наконец, через Z_2 обозначим множество тех $\rho \in Z_0$, для которых существует два или более мультииндексов $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ таких, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2$.

Например, в случае $m = 2$, когда матрицы (11) принимают вид (12), имеем:

$$Z_0 = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, \dots\}$$
$$Z_1 = \{0, 2, 8, 18, \dots\}, \quad Z_2 = \{1, 4, 5, 9, \dots\}.$$

Замечание 1. Отметим, что при $m \geq 4$ имеет место равенство $Z_+ = Z_0$. Поэтому в силу теоремы 2 при $m \geq 4$ множество собственных значений оператора (10) совпадает с множеством собственных значений всех матриц $B_j = A - jD$, $j \in Z_+$.

Из теоремы 2 вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 4. *Пусть $\rho_0 \in Z_1$ и пусть $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$ – единственный мультииндекс такой, что $\rho_0 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2$. Пусть λ_0 – собственное значение матрицы (11) при мультииндексе k^0.*

Пусть матрицы (11) при других мультииндексах не имеют собственного значения λ_0. Тогда оператор (10) имеет собственное значение λ_0 той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса, что и матрица (11) при мультииндексе k^0.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 4 число λ_0 является простым собственным значением матрицы (11) при мультииндексе k^0. Пусть e_0 – соответствующий собственный вектор. Тогда оператор (10) имеет простое собственное значение λ_0, при этом соответствующей собственной функцией будет функция*

$$e_{k^0}(x)e_0\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2)\ldots\cos(k_mx_m).$$

Теорема 5. *Пусть $\rho_0 \in Z_2$ и пусть существует точности два разных мультииндекса $k^0 = k_1, k_2, \ldots, k_m$ и $l^0 = l_1, l_2, \ldots, l_m$ таких, что $\rho_0 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_m^2$. Пусть λ_0 – простое собственное значение матрицы (11) при мультииндексе k^0(или, что то же самое, при мультииндексе l^0). Пусть e_0 – соответствующий собственный вектор. Пусть, наконец, остальные матрицы (11) при других мультииндексах не имеют собственного значения λ_0. Тогда оператор (10) имеет полупростое собственное значение λ_0 кратности два, при этом соответствующими собственными функциями будут функции*

$$e_{k^0}(x)e_0\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2)\ldots\cos(k_mx_m),$$

$$e_{l^0}(x) = e_0\cos(l_1x_1)\cos(l_2x_2)\ldots\cos(l_mx_m).$$

Аналогичные утверждения имеет место и в ситуации, когда для $\rho_0 \in Z_2$ существует более двух разных мультииндексов.

5. Диффузионная неустойчивость и бифуркации

Важным понятием при изучении динамики системы (1)–(2) в окрестностях ее точек равновесия является понятие диффузионной неустойчивости (см., например, [1–3, 6, 15, 16]).

Приведем соответствующие понятия в удобном для нас виде. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $m = 2$; тогда матрицы (11) принимают вид (12).

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (8) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) −*диффузионная неустойчивость* (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$), если:

а) матрица $B_{k_0l_0}(\mu_0)$ имеет собственное значение λ_0, такое, что $Re\,\lambda_0 > 0$;

б) все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Здесь используется стандартное понятие: квадратную матрицу B называют *устойчивой*, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Основными двумя случаями диффузионной неустойчивости являются ситуации, когда условие а) принимает один из видов:

а1) матрица $B_{k_0l_0}(\mu_0)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda_0 > 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda < 0$;

а2) матрица $B_{k_0l_0}(\mu_0)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\alpha > 0$ и > 0, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda < 0$.

Диффузионную неустойчивость, отвечающую случаю а1), часто называют *тьюринговской неустойчивостью*, а диффузионную неустойчивость, отвечающую случаю а2), называют *волновой неустойчивостью.*

Тьюринговская неустойчивость приводит к формированию у системы (8) периодических в пространстве и стационарных во времени решений, называемых *диссипативными структурами.* Другими словами, тьюринговская неустойчивость приводит к возникновению у системы (8) в окрестности нулевой точки равновесия новых пространственно неоднородных положений равновесия, которые являются периодическими в пространстве. Возникновение таких структур часто называют *бифуркацией Тьюринга.*

Волновая неустойчивость приводит к формированию у системы (8) периодических в пространстве и времени решений. Следует отметить, что в двухкомпонентной системе (т.е. когда $n = 2$) возможна лишь тьюринговская неустойчивость. Волновая неустойчивость может возникнуть только при $n > 2$.

Понятие диффузионной неустойчивости тесно связано с понятием точки бифуркации. А именно, следуя общей теории бифуркаций динамических систем (см., например, [7, 8, 17]) введем следующие понятия.

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (5) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) − *бифуркация кратного равновесия* (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 0$), если:

– матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda_0 = 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda < 0$;

– все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (5) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) –*бифуркация Андронова–Хопфа* (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 0$), если:

– матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ таких, что $\beta > 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $Re\,\lambda < 0$;

– все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Таким образом, (k_0, l_0) –тьюринговскую неустойчивость и соответствующую бифуркацию Тьюринга можно характеризовать как следствие перехода параметра μ через значение $\mu = \mu_0$, где μ_0 – точка (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия. Аналогично, (k_0, l_0) –волновую неустойчивость можно характеризовать как следствие перехода параметра μ через значение $\mu = \mu_0$, где μ_0 – точка (k_0, l_0) – бифуркации Андронова–Хопфа $\mu = \mu_0$.

Обратим также внимание на то, что в определениях (k_0, l_0) –бифуркаций числа k_0 и l_0 могут одновременно равняться нулю, в отличие от определений (k_0, l_0) –диффузионной неустойчивости, в которых предполагается, что $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$. Другими словами, диффузионная неустойчивость предполагает устойчивость системы (8) в отсутствии диффузии.

6. Признаки бифуркаций: двухкомпонентные системы

Представляет интерес вопрос о признаках (k_0, l_0) –бифуркаций в системе (8), при этом (с точки зрения приложений) особый интерес вызывает случай, когда $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$.

Обсудим некоторые аспекты указанного вопроса для ситуаций, когда система (8) является двух- и трехкомпонентной, а пространственная переменная является двумерной, т.е. когда $n = m = 2$ и $n = 3, m = 2$.

Рассматриваемый вопрос близок по постановке к аналогичным вопросам о признаках тьюринговской и волновой неустойчивости (см., например, [15, 16] и имеющуюся там библиографию).

Рассмотрим сначала случай, когда система (8) является двухкомпонентной, а именно, когда $n = m = 2$. Пусть для простоты матрица диффузии $D(\mu)$ является диагональной. В этом случае соответствующая линеаризованная система (9) имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D(\mu)\Delta w, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad w \in R^2, \tag{15}$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$A(\mu) = \left(a_{ij}(\mu)\right)_{i,j=1}^{2}, \qquad D(\mu) = \begin{pmatrix} d_1(\mu) & 0 \\ 0 & d_2(\mu) \end{pmatrix}.$$

Обсудим сначала вопрос о признаках (k_0, l_0) –бифуркации кратного равновесия в рассматриваемой двухкомпонентной системе (8) при $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$. Считая значение $\mu = \mu_0$ в этой системе и, соответственно, в линеаризованной системе (15) фиксированным, положим $A_0 = A(\mu_0)$, $a_{ij} = a_{ij}(\mu_0)$ и $D_0 = D(\mu_0)$, $d_j = d_j(\mu_0)$.

Далее, определим числа

$$\rho_0 = k_0^2 + l_0^2, \qquad \rho_1 = \frac{a_{11}d_2 + a_{22}d_1}{d_1 d_2} - \rho_0.$$

Прямым подсчетом можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $m = n = 2$. *Значение* $\mu = \mu_0$ *будет точкой* (k_0, l_0) – *бифуркации кратного равновесия двухкомпонентной системы (8) при* $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$ *тогда и только тогда, когда при* $\mu = \mu_0$, *во-первых, выполняются соотношения*

$$tr\,A_0 < 0, \qquad det\,A_0 = -\rho_0^2 d_1 d_2 + \rho_0 (a_{11}d_2 + a_{22}d_1) > 0,$$

во-вторых, промежуток $[\rho_1, \rho_0)$ *(если* $\rho_1 < \rho_0$*) или промежуток* $(\rho_0, \rho_1]$ *(если* $\rho_1 > \rho_0$*) не содержит целых чисел, представимых в виде* $k^2 + l^2$.

Несложно видеть, что если коэффициенты диффузии d_1 и d_2 одного порядка, то условия этой теоремы не могут быть выполнены. Другими словами, для реализации (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия и, соответственно, тьюринговской неустойчивости требуется, чтобы коэффициенты диффузии d_1 и d_2 сильно отличались друг от друга.

В качестве примера рассмотрим распределенную модель "брюсселятор" (см., например, [4, 7, 8]), описываемую двумерной системой уравнений

$$\begin{cases} u_t' = (\mu - 1)u + a^2 v + d_1 \Delta u + u^2 v, \\ v_t' = -\mu u - a^2 v + d_2 \Delta v - u^2 v, \end{cases} \tag{16}$$

относительно неизвестных функций $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$; здесь α, μ, d_1 и d_2 – положительные коэффициенты, Δ – оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Эту систему будем изучать в квадрате $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$ с граничными условиями Неймана $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Система (16) представима в виде (8) при

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, A(\mu) = \begin{bmatrix} \mu - 1 & a^2 \\ -\mu & -a^2 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix},$$
$$h(w) = \begin{bmatrix} u^2 v \\ -u^2 v \end{bmatrix}.$$

Система (16) имеет нулевую точку равновесия $u = v = 0$. В отсутствии диффузии (т.е. когда $d_1 = d_2 = 0$) эта точка равновесия устойчива, если $\mu < a^2 + 1$. При переходе к системе с диффузией (т.е. когда $d_1 > 0, d_2 > 0$) положение равновесия $u = v = 0$ уже может быть неустойчивым и, как следствие, привести к бифуркациям.

Пусть $\mu_0 = 2$, $a^2 = 2, d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = 3$. Тогда при $k_0 = l_0 = 1$ получим

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \rho_0 = 2,$$
$$\rho_1 = \frac{10}{3}.$$

Промежуток $(\rho_0, \rho_1]$ не содержит целых чисел вида $k^2 + l^2$. Поэтому все условия теоремы 6 выполнены. Следовательно, значение $\mu_0 = 2$ является точкой бифуркации (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия системы (16) при $k_0 = l_0 = 1$.

7. Признаки бифуркаций: трехкомпонентиые системы

Рассмотрим теперь случай, когда система (8) является трехкомпонентной, а именно, когда $n = 3$, $m = 2$.

Пусть для простоты матрица диффузии $D(\mu)$ является диагональной. В этом случае соответствующая линеаризованная система (9) имеет вид

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{A(\mu)w + D(\mu)\Delta w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$w \in R^3, \tag{17}$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$A(\mu) = \left(a_{ij}(\mu)\right)_{i,j=1}^{3}, \quad D(\mu) = \begin{pmatrix} d_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & d_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & d_3(\mu) \end{pmatrix}.$$

Как и в случае двухкомпонентных систем, считая значение $\mu = \mu_0$ фиксированным, положим: $A_0 = A(\mu_0)$, $a_{ij} = a_{ij}(\mu_0)$ и $D_0 = D(\mu_0)$, $d_j = d_j(\mu_0)$. Определим семейство матриц $B_{kl} = A_0 - (k^2 + l^2)D_0$.

Наконец, положим

$$a_0 = -\,tr\,A_0\ , \ b_0 = b_1 + b_2 + b_3\ , \quad c_0 = -\,det\,A_0\ ;$$
$$a_{k,l} = -\operatorname{tr} B_{k,l}\ , \ b_{k,l} = b_{1,k,l} + b_{2,k,l} + b_{3,k,l},$$
$$c_{k,l} = -det B_{k,l}\ ;$$

здесь b_1, b_2, b_3 и $b_{1,k,l}, b_{2,k,l}, b_{3,k,l}$ – диагональные миноры второго порядка матриц A_0 и B_{kl} соответственно.

Прямым подсчетом можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 7. *Пусть* $m = 3$, $n = 2$. *Значение* $\mu = \mu_0$ *будет точкой* (k_0, l_0) *– бифуркации кратного равновесия трехкомпонентной системы (8) при* $k_0^2 + l_0^2 \ge 1$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия:* $a_0 > 0$, $c_{k_0,l_0} = 0$, *при этом*

$$c_{k,l} > 0 \text{ для любых } (k,l) \ne (k_0,l_0),\ a_{k,l}b_{k,l} > c_{k,l} \text{ для любых } (k,l)\ . \tag{18}$$

Теорема 8. *Пусть* $m = 3$, $n = 2$. *Значение* $\mu = \mu_0$ *будет точкой* (k_0, l_0) *– бифуркации Андронова–Хопфа трехкомпонентной системы (8) при* $k_0^2 + l_0^2 \ge 1$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия:* $a_0 > 0$, $a_{k_0,l_0}\, b_{k_0,l_0} = c_{k_0,l_0}$, *при этом*

$$c_{k,l} > 0 \text{ для любых } (k,l)\ ,$$
$$a_{k,l}b_{k,l} > c_{k,l} \text{ для любых } (k,l) \ne (k_0,l_0)\ . \tag{19}$$

В приложениях основную сложность представляет проверка условий (18) и (19). Однако, как показывают несложные преобразования, эти условия можно свести к задаче решения неравенства для многочлена третьей степени относительно неотрицательной величины $x = k^2 + l^2 \ge 0$. А эта задача, в свою очередь, может быть сведена к исследованию производной от этого многочлена, т.е. к решению квадратичных неравенств.

Анализ условий (18) и (19) показывает, что условия теорем 7 и 8 могут выполняться в чрезвычайно узком диапазоне значений коэффициентов диффузии. А именно, как правило, для их выполнения один из коэффициентов должен существенно превосходить два других.

В качестве примера рассмотрим матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 870 \\ 50 & 0 & 479 \\ 10 & 0 & 95 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0{,}00283 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00283 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}975 \end{pmatrix}.$$

В этом примере матрица B_{11} имеет собственные значения $\lambda_{1,2} \approx \pm 20i,\ \lambda_3 \approx -7,$ а остальные матрицы $B_{k,l} = A_0 - (k^2 + l^2)D_0$ являются устойчивыми. Потому для соответствующей трехкомпонентной системы (8) имеет место (k_0, l_0)-бифуркация Андронова–Хопфа при $k_0 = l_0 = 1$.

Список источников

1. *Нелинейные волны,* диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М. Свирежев. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. *Mathematical* Biology / Murray J.D. New York, Springer-Verlag Springer-Verlag, 3d edition, vol. I, 2007, vol. II, 2008.
3. *Лекции* по математическим моделям в биологии / Г.Ю. Ризниченко. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 296 с.
4. *Нелинейные* колебания и волны / П.С. Ланда. М.: Книжный дом "Либроком", 2015. 552 с.
5. *Колебания* и бегущие волны в химических системах / Р. Филд, М. Бургер. М.: Мир, 1988. 328 с.
6. *Динамические* системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
7.Т*еория* и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хассард, Н. Казаринов, И. Ван. М.: Мир, 1985, 280 с.
8. *Бифуркация* рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М.М. Мак-Кракен: Мир, 1980. 368 с.
9. *Горюнов В.Е.* Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–70.
10. *Юмагулов М.Г., Сидельникова Н.А.* Системы типа "реакция-диффузия" признаки устойчивости и бифуркаций // Вестник Башкирского университета. Т. 28, № 4. 2023. С. 303–309.
11. *Yumagulov M.G., Abushahmina G.R., Gusarova N.I.* Lyapunov quantities for Andronov-Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion system // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, № 15. P. 3567-3573.
12. *Геометрическая* теория полулинейных параболических уравнений / Д.М. Хенри. М.: Мир, 1985. 376 с.
13. *Методы* современной математической физики. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон. М.: Мир, 1982. Т. 4. 428 с.
14. *Основные* дифференциальные уравнения математической физики / А.В. Жибер, Г.З. Мухаметова, Н.А. Сидельникова. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. 301 с.
15. *Борина М.Ю., Полежаев А.А.* Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа реакция-диффузия // Компьютерные исследования и моделирование. Т. 3, № 2. 2011. С. 135–146.
16. *Еленин Е.Г., Куркина Е.С.* Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентных системах типа реакция-диффузия. Реакция (NO+CO)/Pt(100) // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 8. С. 17–32.
17. *Введение* в нелинейную динамику: теория, приложения, модели / М.Г. Юмагулов. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 368 с.

References

1. Svirezhev, Yu.M. (1987), "Nelinejnye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v ekologii" [Nonlinear waves, dissipative structures and disasters in ecology], Nauka, Moscow, Russia.
2. Murray, J.D. (2007), (2008), *Mathematical Biology*, 3d edition, vol. I, vol. II, Springer-Verlag Springer-Verlag, New York, USA.
3. Riznichenko, G.Yu. (2002), "*Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii*" [Lectures on mathematical models in biology], Regular and chaotic dynamics, Moscow-Izhevsk, Russia.
4. Landa, P.S. (2015), "*Nelinejnye kolebaniya i volny*" [Nonlinear oscillations and waves], Book house "LIBROKOM", Moscow, Russia.
5. Field, R and Burger, M. (1988), " *Kolebaniya i begushchie volny v himicheskih sistemah*" [Oscillations and traveling waves in chemical systems], Mir, Moscow, Russia.
6. Bratus, A.S., Novozhilov, A.S. and Platonov, A.P., (2010), "*Dinamicheskie sistemy i modeli biologii*" [Dynamic systems and models of biology], FIZMATLIT, Moscow, Russia.
7. Hassard, B., Kazarinov, N. and Wang, I. (1985), "*Teoriya i prilozheniya bifurkacii rozhdeniya cikla*" [Theory and applications of cycle birth bifurcation], Mir, Moscow, Russia.
8. Marsden J. and McCracken M. (1980), "*Bifurkaciya rozhdeniya cikla i ee prilozheniya*" [Bifurcation of the birth of a cycle and its applications], Mir, Moscow, Russia.

9. Goryunov, V.E. (2018.), "Andronov–Hopf bifurcation in one biophysical model of the Belousov reaction", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 25, no. 1, pp. 63-70.
10. Yumagulov, M.G. and Sidelnikova, N.A. (2023), "Systems of the "reaction-diffusion" type: signs of stability and bifurcations", *Bulletin of the Bashkir University*, vol. 28, no. 4, pp. 303-309.
11. Yumagulov, M.G., Abushahmina, G.R. and Gusarova, N.I. (2021), "Lyapunov quantities for Andronov–Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion system", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 15, p. 3567-3573.
12. Henry, D. (1985), "*Geometricheskaya teoriya polulinejnyh parabolicheskih uravnenij*" [Geometric theory of semi-linear parabolic equations], Mir, Moscow, Russia.
13. Reed, M. and Simon, B. (1982), "*Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. Analiz operatorov*" [Methods of modern mathematical physics. Operator analysis], vol. 4, Mir, Moscow, Russia.
14. Zhiber, A.V., Mukhametova, G.Z. and Sidelnikova, N.A. (2020), "*Osnovnye differencial'nye uravneniya matematicheskoj fiziki*" [Basic differential equations of mathematical physics], RIC BashSU, Ufa, Russia.
15. Borina, M.Yu. and Polezhaev, A.A. (2011), "Diffusion instability in a three-component reaction-diffusion model", *Computer research and modeling*, vol. 3, no. 2, p. 135-146.
16. Elenin, E.G. and Kurkina, E.S. (1994), "Diffusion instability in three-component systems of the reaction-diffusion type. Reaction (NO+CO)/Pt(100)", *Mathematical modeling*, vol. 6, no. 8, pp. 17–32.
17. Yumagulov, M.G. (2022), "*Vvedenie v nelinejnuyu dinamiku: teoriya, prilozheniya, modeli*" [Introduction to nonlinear dynamics: theory, applications, models], Lan, St. Petersburg, Russia.

Информация об авторах:

М. Г. Юмагулов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.);

Н. А. Васенина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.).

Information about the authors:

Marat G. Yumagulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of High-Performance Computing and Differential Equations, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi St., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia, 450076);

Natalia A. Vasenina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, Department of High-Performance Computing and Differential Equations, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi St., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia, 450076).