Научная статья
УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53

Движение гиростата вокруг центра инерции в полуевклидовом пространстве

Николай Николаевич Макеев
г. Саратов, Россия
nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Исследуется инерционное движение гиростата в полуевклидовом пространстве с заданными индексом и дефектом. Гиростат с постоянным гиростатическим моментом движется так, что его носитель вращается вокруг неподвижного центра инерции. Получены критерии существования регулярных движений как условия наличия осевой структурно-кинетической симметрии гиростата. Исследованы свойства нутационного, прецессионного, колебательно-вращательного движений и дано их описание в конфигурационном и фазовом пространствах. Определены квадратурные зависимости параметров движения гиростата в эллиптических функциях времени. Найдены параметрические уравнения годографов векторов угловой скорости и кинетического момента. Исследование проведено для случая собственного вектора кинетического момента гиростата.

Ключевые слова: *гиростат; полуевклидово пространство; регулярное движение; сферическое движение; годограф вектора*

Для цитирования: *Макеев Н.Н.* Движение гиростата вокруг центра инерции в полуевклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.

Статья поступила в редакцию 25.04.2024; одобрена после рецензирования 20.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

The Gyrostat Motion Around the Inertia Center in the Semi-Euclidean Space

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia
nmakeyev@mail.ru

Abstract. The inertial motion of a gyrostat in a semi-Euclidean space with given index and defect is studied. A gyrostat with a constant gyrostatic moment moves so that its carrier rotates around a fixed center of inertia. Criteria for the existence of regular motions are obtained as a condition for the presence of axial structural-kinetic symmetry of the gyrostat. The properties of nutational, precessional, vibrational-rotational motions are studied and their description in configuration and phase spaces is given. The quadrature dependences of the gyrostat motion parameters in elliptic functions of time are determined. Parametric equations of hodographs of angular velocity and kinetic momentum vectors are found. The study was carried out for the case of the gyrostat angular momentum eigenvector.

Keywords: *gyrostat; semi-Euclidean space; regular movement; spherical movement; vector hodograph*

For citation: Makeev, N. N. (2024), "Motion of a Gyrostat Around the Center of Inertia in Semi-Euclidean Space", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science,* no. 2(65), pp. 42-53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.

The article was submitted 25.04.2024; approved after reviewing 17.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

Введение

Фундаментальное направление в рациональной механике − механика неевклидовых пространств − является необходимой составной частью современной механики твердого тела и сложной механической системы. Это научное направление увеличивает многообразие механических явлений, расширяя границы области действия классической механики Галилея–Ньютона, исторически построенной для евклидова пространства.

Появлению и развитию этого направления исследований способствовали выдающиеся работы Н.И. Лобачевского, А.П. Котельникова, У.К. Клиффорда, Н.Е. Жуковского, А.П. Широкова, в которых содержались новые свойства, описания и интерпретация открытых ими закономерностей и механических явлений.

В настоящей работе проведено исследование интегрального многообразия динамической системы гиростата, на который не влияют внешние моментно-силовые факторы. Такое исследование позволяет получить картину и свойства движения, происходящего без влияния на гиростат внешнего моментно-силового воздействия.

1. Предварительные положения

Согласно классификации, применяемой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь пространство является действительным аффинным трехмерным пространством с индексом 2 и дефектом 0. Оно может быть определено и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В настоящей работе под движением гиростата (в смысле механического движения) понимается перемещение его тела-носителя как абсолютно твердого тела. При этом все необходимые геометрические объекты и связанные с ними геометрические построения, вводимые в публикациях различными способами, приняты здесь согласно схеме, установленной в работе [1].

Вследствие существующего гомеоморфизма задача о движении гиростата в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче о его вращении вокруг неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Здесь $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) − орты осей заданной координатной системы в данном пространстве.

Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна, плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij} x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j – контравариантные координаты.

Под гиростатом в полуевклидовом пространстве в общепринятом смысле понимается гиростат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O, совпадающим с центром инерции, относительно которого движется гиростат, − вершина данного конуса.

Тогда для радиусов-векторов точек гиростата существует условие $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе O: ортобазис Γ_0, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиростата, и ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиростата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Жуковскому) тензора инерции гиростата.

Обозначим: A_j − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными центральными моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиростата; $\mathbf{G}(G_j)$ − кинетический момент гиростата относительно полюса O; $\mathbf{k}(k_j)$ − постоянный гиростатический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси ортобазиса Γ; главные центральные моменты инерции гиростата A_1, A_2 − моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2, а момент A_3 − относительно собственной главной оси инерции Ox_3; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее текущий индекс j последовательно принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) кратко обозначает всю совокупность значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Пусть $\mathbf{e}_j$ (j=1, 2, 3) − орты осей базиса Γ. Тогда вектор угловой скорости носителя гиростата и его кинетический вектор-момент относительно полюса O представляются в виде, соответственно,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 - \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{G} = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 - G_3 \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует:

$$G_j = A_j \omega_j + k_j = G s_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $G = |\mathbf{G}| \neq 0$, s_j − соответствующие направляющие косинусы, для которых имеет место тривиальное тождество

$$\|\mathbf{s}\|^2 \equiv -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = \ell. \tag{2}$$

Здесь постоянная $\ell = (1, -1, 0)$ для случаев, при которых вектор $\mathbf{G}$ и его орт $\mathbf{s}$ − собственные, идеальные и изотропные, соответственно [1].

Следуя конструкционной схеме построения параметров ориентации базового вектора в полуевклидовом пространстве, принятой в работе [1], введем аналоги классических углов Эйлера $\lambda, \vartheta, \varphi,$ определяющих ориентацию ортобазиса Γ относительно Γ_0. Для собственного орта $\mathbf{s}$ имеем равенства [2]:

$$\begin{gathered} \mathbf{s} = [s_1,\ s_2,\ s_3] = \\ = [\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi,\ \operatorname{sh}\vartheta\cos\varphi,\ -\operatorname{ch}\vartheta], \end{gathered} \tag{3}$$

удовлетворяющие соотношению (2). Здесь параметры ориентации ϑ, φ по аналогии с классическими углами Эйлера будем называть *параметрами нутации* и *собственного вращения*, соответственно. При этом данные параметры (как и их классические аналоги), согласно способу их построения, являются безразмерными величинами.

Из равенств (1), (3) следуют зависимости вида $\omega_j(\lambda, \vartheta, \varphi)$ $(j = 1, 2, 3)$, являющиеся аналогами кинематических уравнений Эйлера, составленными относительно осей координатного базиса Γ.

Для *собственного вектора* $\mathbf{s}$ имеем [1]:

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \dot\lambda \operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi, \\ &\omega_2 = \dot\lambda \operatorname{sh}\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi, \\ &\omega_3 = -(\dot\lambda \operatorname{ch}\vartheta + \dot\varphi), \end{aligned} \tag{4}$$

где λ − параметр прецессии, являющийся аналогом угла прецессии в классификации углов Эйлера для евклидова пространства.

Введем вектор $\mathbf{W}$, являющийся проекцией скорости $\boldsymbol{\omega}$ на координатную плоскость Ox_1x_2 базиса Γ. Тогда, в силу равенств (4), имеем

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = (\dot\lambda \operatorname{sh}\vartheta)^2 + \dot\vartheta^2. \tag{5}$$

Равенство (5) может применяться для анализа регулярных движений, рассматриваемых далее.

Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned} &K_1(\varphi) = a_1 \sin^2\varphi + a_2\cos^2\varphi, \\ &K_2(\varphi) = a_1\cos^2\varphi + a_2 \sin^2\varphi, \\ &N_1(\varphi) = a_1 k_1 \sin\varphi + a_2 k_2 \cos\varphi, \\ &N_2(\varphi) = a_1 k_1 \cos\varphi - a_2 k_2 \sin\varphi, \\ &\quad m = a_1 - a_2, \quad m_3 = a_3 k_3. \end{aligned} \tag{6}$$

В равенствах (6) и всюду далее обозначено:

$$a_j = A_j^{-1} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Для собственного вектора $\mathbf{G}$, согласно равенствам (1), (3), получаем [2]

$$\begin{gathered} (G_1, G_2, G_3) = \\ = G(\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi, \operatorname{sh}\vartheta\cos\varphi, -\operatorname{ch}\vartheta). \end{gathered} \tag{7}$$

Исключая из системы равенств (1), (4) величины ω_j, в силу соотношений (3), (6), получаем систему уравнений, из которой находим [2]:

$$\begin{aligned} &\dot\lambda = GK_1(\varphi) - N_1(\varphi)\operatorname{sh}^{-1}\vartheta, \\ &\dot\vartheta = mG\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi\cos\varphi - N_2(\varphi), \\ &\dot\varphi = [a_3 - K_1(\varphi)]G\operatorname{ch}\vartheta + \\ &\quad + N_1(\varphi)\operatorname{cth}\vartheta + m_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) заданы в односвязной регулярной ограниченной области, исключающей особую точку $\vartheta = 0$.

Целью настоящей работы является определение характера инерционного движения гиростата путем нахождения аналитической зависимости вида $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(t)$, а также установление условий реализации его регулярных состояний, существующих в инерционном движении.

Здесь $\boldsymbol{\Phi} = [\lambda(t), \vartheta(t), \varphi(t)]$ − вектор параметров ориентации − аналогов классических углов Эйлера.

Поставленная цель достигается на основе уравнений системы (8) с применением принятых предпосылок.

2. Регулярные движения

Под *регулярным движением* гиростата (или *движением типа регулярного*) понимается режим его состояния, при котором функции − параметры ориентации и (или) их производные по времени − постоянны за время движения. При этом данные постоянные выражаются через заданные инерционно-кинетические характеристики гиростата и начальные кинематические условия его движения.

Регулярные движения гиростата относятся к простейшим угловым (в обобщенном смысле) движениям и являются аналогами соответствующих движений, совершаемых в евклидовом пространстве.

Рассмотрим условия существования регулярных движений гиростата, реализуемых относительно ортобазиса Γ. Следующие определения движений гиростата приводятся для значений времени $t \in [0, +\infty)$.

Определение 1. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \dot{\varphi}(t) = b_2, \quad \vartheta(t) = b_3, \tag{9}$$

где $b_j \ (j = 1, 2, 3)$ − постоянные величины, называется *регулярной прецессией*.

В дальнейшем под величинами b_j всюду понимаются известные постоянные.

Обозначим:

$$a = A^{-1}, \quad Q = aG \quad (A = A_1 = A_2).$$

Теорема 1. Для того чтобы гиростат, движущийся по инерции, совершал регулярную прецессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$A_1 = A_2 = A, \quad k_1 = k_2 = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (9). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10).

Достаточность. Если выполняются условия (10), то в силу уравнений системы (8) получаем тождественные равенства (9), где

$$b_1 = Q, \quad b_2 = m_p, \quad b_3 = \vartheta_0 \neq 0, \tag{11}$$
$$m_p = (a_3 - a) G \operatorname{ch} \vartheta_0 + m_3.$$

Здесь m_p − угловая скорость собственного вращения носителя гиростата.

Следствие 1. Согласно равенствам (11) имеем:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + Qt, \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \neq 0, \tag{12}$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 + m_p t,$$

причем нулевой индекс здесь и всюду далее относится к значению $t = 0$. В этом случае, согласно условиям (10), гиростат обладает кинетической симметрией относительно оси Ox_3 ортобазиса Γ.

Определение 2. Движение, при котором выполняются условия

$$\lambda(t) = b_1, \quad \dot{\varphi}(t) = b_2, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \tag{13}$$

называется *регулярной нутацией*.

Теорема 2. Регулярная нутация гиростата при его движении по инерции не существует.

Доказательство. Из первого уравнения системы (8), согласно условиям (13), следует противоречивое условие $G = 0$, в силу чего движение, удовлетворяющее этим условиям, динамически невозможно.

Определение 3. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \quad \varphi(t) = b_2, \tag{14}$$

называется *регулярным маятниковым движением* (РМД).

Теорема 3. Для того чтобы гиростат, движущийся по инерции, совершал РМД, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (10) и $m_p = 0$, где величина m_p определяется равенством (11).

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (14). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10) и $m_p = 0$.

Достаточность. Если выполняются условия (10) и $m_p = 0$, то, в силу уравнений системы (8), получаем тождественные равенства (14), где

$$b_1 = Q, \quad b_2 = \varphi_0, \quad b_3 = 0. \tag{15}$$

Следствие 2. Согласно равенствам (15) получаем первые два равенства (12), $\varphi(t) = \varphi_0$ и, согласно определяющему условию $m_p = 0$, в этом движении имеем

$$k_3 = (1 - A^{-1} A_3) G \operatorname{ch} \vartheta_0 .$$

В силу этого, если при условиях теоремы 3 гиростат обладает центральной кинетической симметрией

$$A_j = A \quad (j = 1, 2, 3), \tag{16}$$

то необходимо, чтобы $k_3 = 0$. В этом случае имеем $\mathbf{k} = 0$ и гиростат кинетически вырождается в твердое тело.

Определение 4. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \vartheta(t) = b_3, \tag{17}$$

называется *полурегулярной прецессией* по Гриоли (Rev. Roum. 1970; (15:2):249−255).

Теорема 4. Для того чтобы гиростат, движущийся по инерции, совершал полурегулярную прецессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (10).

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (17). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10).

Достаточность. Если выполняются условия (10), то, в силу уравнений системы (8), получаем тождества (17), где

$$b_1 = Q, \qquad b_3 = \vartheta_0 \neq 0. \tag{18}$$

Следствие 3. Согласно равенствам (18) имеем:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + m_p t. \tag{19}$$

Определение 5. Движение, при котором выполняются условия

$$\lambda(t) = b_1, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \tag{20}$$

называется *полурегулярной нутацией.*

Теорема 5. Полурегулярная нутация гиростата при его движении по инерции не существует.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2, в котором получено противоречивое условие $G = 0$. В силу этого движение, удовлетворяющее условиям (20), динамически невозможно.

Аналогичным образом можно показать, что для гиростата, находящегося в инерционном состоянии, существуют движения, при которых выполняются условия

$$\begin{gathered}[\dot{\lambda}(t) = b_1, \;\; \varphi(t) = b_2], \\ [\varphi(t) = b_2, \;\; \dot{\vartheta}(t) = b_3],\end{gathered} \tag{21}$$

соответствующие *маятниковым движениям первого и второго рода*, соответственно. Для движений (21) имеем, соответственно, $b_1 = Q$, $b_3 = 0$ и в обоих случаях движения получаем $b_2 = \varphi_0$, $\vartheta(t) = \vartheta_0$, $m_p = 0$.

3. Основная динамическая система

Согласно основным предпосылкам, принятым для инерционного движения гиростата, выполняются законы сохранения его кинетического момента и кинетической энергии, выражающиеся тождественными равенствами

$$-\sum_{j=1}^{2} G_j^2(\omega_j) + G_3^2(\omega_3) = \ell G^2, \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{3} A_j\, \omega_j^2 = D^2, \tag{23}$$

являющимися интегралами модуля кинетического момента и кинетической энергии гиростата. Здесь величины G_j определяются равенствами (1); ℓ − маркировочный параметр, содержащийся в равенстве (2); $D > 0$ − постоянная интегрирования.

Примем условия

$$A_1 = A_2 = A > A_3 \tag{24}$$

и введем постоянные H, α, β такие, что

$$\begin{gathered} H = \sqrt{m_3^2 - m_2^2} \; > \; 0, \qquad m_2 = ak, \\ \operatorname{th}\alpha = m_3^{-1} m_2, \quad \operatorname{tg}\beta = k_1 k_2^{-1}, \\ k_3 \geq 0, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \end{gathered} \tag{25}$$

Согласно равенствам (24), (25), получаем:

$$\begin{gathered} (k_1, k_2) = AH g_1 (\sin\beta, \cos\beta), \\ k_3 = A_3 H g_2, \;\; (g_1, g_2) = (\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{ch}\alpha). \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь и всюду далее принимается $\alpha > 0$.

Система уравнений (8) в силу соотношений (24)−(26) при $\vartheta > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda} = Q - Hg_1 \cos(\varphi - \beta)\operatorname{sh}^{-1}\vartheta, \\ &\dot{\vartheta} = Hg_1 \sin(\varphi - \beta), \\ &\dot{\varphi} = H[g_1 \cos(\varphi - \beta)\operatorname{cth}\vartheta + \\ &\quad + 2c\operatorname{ch}\vartheta + g_2], \end{aligned} \tag{27}$$

$$c = (a_3 - a)(2H)^{-1} G$$

и далее называется *основной динамической системой* (ОДС).

Предметом дальнейшего рассмотрения является интегральное многообразие уравнений инерционного движения гиростата, которое следует определить согласно ОДС (27).

Уравнения (27) образуют нелинейную стационарную систему эволюционного типа, содержащую пять независимых кинетических параметров. Поскольку для этой системы существуют независимые алгебраические первые интегралы (22), (23), находящиеся в инволюции, то эта система уравнений является интегрируемой по Лиувиллю и интегрируется в квадратурах.

Ставится задача: определить в односвязной регулярной области гладкие аналитические зависимости вида $\lambda(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, совокупность которых составляет решение ОДС (27), удовлетворяющее начальным условиям $[\lambda(0), \vartheta(0), \varphi(0)] = [\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0]$.

4. Нутационное движение

Рассмотрим инерционное движение гиростата в режиме непрерывного изменения угла нутации (движение по углу ϑ).

Для системы уравнений (27) существует интеграл энергии (23), который в силу соотношений (5), (23)–(26) представляется равенством

$$\begin{aligned} c\,\mathrm{ch}^2\vartheta + g_1\,\mathrm{sh}\,\vartheta\cos(\varphi-\beta) + \\ + g_2\,\mathrm{ch}\,\vartheta = h, \end{aligned} \tag{28}$$

где выражение для параметра c дано в соотношениях (27).

Из второго уравнения ОДС (27), согласно интегралу (28), следует определяющее для величины $u = \mathrm{ch}\,\vartheta$ уравнение

$$\dot{u}^2 = \Omega^2 P(u), \tag{29}$$

где

$$P(u) = -u^4 + \sum_{k=0}^{3} c_k u^k \tag{30}$$

– полином с коэффициентами

$$c_0 = -l(g_1^2 + h^2), \quad c_1 = 2g_2 lh,$$
$$c_2 = l(2ch-1), \quad c_3 = -2g_2\sqrt{l}, \quad l = c^{-2}.$$

В уравнении (29) величина $\Omega = cH$ – постоянная с размерностью угловой скорости.

Согласно соотношению (29), область изменения переменной ϑ, для которой реализуется движение по углу ϑ, определяется условием $P(u) \geq 0$ при $u > 1$, что соответствует ограничению

$$g_1^2(u^2-1) - p_1(u) \geq 0,$$

$$p_1(u) = cu^2 + g_2 u - h.$$

Уравнение (29) имеет первый интеграл

$$J(u) \equiv \int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = \Omega t + C, \tag{31}$$

где C – постоянная интегрирования.

Интеграл в равенстве (31) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода, выраженному в нормальной форме Лежандра. Для полинома P, не содержащего кратных нулей, это приведение выполняется стандартным приемом [3, с. 96]; в случае кратных корней интеграл представляется в элементарных (гиперболических и круговых) функциях.

Преобразуем фазовую плоскость $U = (u, \dot{u})$, относя величину $\dot{u}$ к постоянной Ω и оставляя для преобразованной переменной прежнее обозначение. Тогда величины $u, \dot{u}$ будут безразмерными переменными. В силу униформизационных свойств функций [4, с. 324] можно показать, что траектории изображающей точки на фазовой плоскости U однозначно определяются параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} u(w) &= u_p + g_0[\wp(w) - g]^{-1}, \\ u'(w) &= -g_0\,\wp'(w)[\wp(w) - g]^{-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

В равенствах (32) обозначено:

$$g_0 = \frac{1}{4}P'(u_p), \quad g = \frac{1}{24}P''(u_p),$$

$$w(u) = \int_{u_p}^{u} \frac{ds}{\sqrt{P(s)}},$$

$$\wp'(w) = \pm\sqrt{4\wp^3(w) - q_2\,\wp(w) - q_3},$$

s, w – переменная интегрирования и униформизующая переменная, соответственно; u_p – простой корень полинома P, $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{12}(c_2^2 - 3c_1c_3 - 12c_0), \\ q_3 &= -\frac{1}{108}c_2^3 + \frac{1}{48}(c_1c_2c_3 - \\ &- c_0 D_c) + \frac{1}{16}c_1^2, \\ D_c &= 3c_3^2 + 8c_2. \end{aligned} \tag{33}$$

В равенствах (32) штрих − символ дифференцирования по указанной переменной.

На фазовой плоскости *U* параметрические уравнения (32) определяют уникурсальную кривую (кривую нулевого рода), координаты регулярных точек которой представляются в виде рациональной функции параметра [4, с. 324].

Полагая, что все корни полинома *P* − действительные и простые и, обращая зависимость (31), в результате получаем

$$u(\tau) = u_p + g_0[\wp(\tau + w_0) - g]^{-1}, \quad (34)$$

где $w_0 = w(u_0),\ u_0 = \operatorname{ch}\vartheta_0 \neq u_p$,

причем $\wp(w_0) = g + g_0(u_0 - u_p)^{-1}$.

Рассмотрим фазовый портрет гиростата на плоскости *U*. Структура фазовых траекторий определяется видом квазипотенциальной (гиростатической) функции *P* в зависимости от значений параметров c_j $(j = 0, \ldots, 3)$.

Многообразие данных траекторий является трехпараметрическим множеством плоских алгебраических кривых четвертого порядка, определяемых уравнением (29).

Стационарные и критические точки функции *P* устанавливаются уравнениями $P' = 0,\ P'' = 0,$ имеющими вид

$$\begin{gathered} -4u^3 + 3c_3u^2 + 2c_2u + c_1 = 0, \\ 6u^2 - 3c_3u - c_2 = 0. \end{gathered} \quad (35)$$

Эти уравнения в пространстве параметров c_1, c_2, c_3 определяют *сепаратрисную поверхность*, разделяющую область определения функции $P(u)$ на подобласти, содержащие различные виды ее экстремумов.

Выражая из системы уравнений (35) параметры c_2, c_3, в результате получим параметрические уравнения данной поверхности

$$\begin{aligned} c_2 &= -(2u^2 + c_1u^{-1}), \\ c_3 &= \frac{1}{3}(8u + c_1u^{-2}), \end{aligned} \quad (36)$$

являющейся алгебраической поверхностью.

Рассматривая уравнения сечений этой поверхности плоскостями вида $c_1 = \text{const}$ как уравнения множества кривых, расположенных на плоскости (c_2, c_3), получаем *сепаратрисную кривую* − квадратичную параболу с уравнением

$$c_2 = -\frac{9}{32}c_3^2.$$

При $c_1 \neq 0$ кривая (36) является эквидистантой данной параболы с параметром эквидистантности c_1.

Плоскость *U* содержит фазовые траектории с двойными особыми точками, имеющими координаты $u = u_c,\ \dot{u} = 0$, где u_c − общий корень полиномов $P(u),\ P'(u)$.

Пусть z_1, z_2 − значения величины *u* такие, что в области $D_c > 0$ плоскости *U* имеем

$$(z_1, z_2) = \frac{1}{4}\left(c_3 \pm \sqrt{\frac{1}{3}D_c}\right),$$

где параметр D_c определяется равенством (33). Тогда при $z_1 < u_c < z_2$ на плоскости *U* находится узловая точка, а при $u_c < z_1,\ u_c > z_2$ имеется изолированная точка. При этом угловые коэффициенты касательных, проведенных к фазовой траектории в узловой точке, равны

$$(r_1, r_2) = \pm\,\Omega\,(c_2 + 3c_3u_c - 6u_c^2)^{1/2}.$$

При $u_c = z_1$ или при $u_c = z_2$ на фазовой траектории расположена точка возврата.

В области $D_c < 0$ плоскость *U* содержит только изолированную точку, тогда как на границе $D_c = 0$ этой области расположена либо точка возврата, если $u_c = z_1$, либо изолированная точка, если $u_c = z_2$.

В приведенных соотношениях всюду полагается $\alpha > 0$.

При критическом значении $\alpha = 0$ имеет место регулярная прецессия гиростата, условия существования которой определяются теоремой 1, ограничениями (10) и характеризуются равенствами (11), (12). Из первого интеграла (28) следует:

$$u_0 = (2c)^{-1}(1 + \sqrt{1 + 4hc}),$$

где *c*, *h* − заданные положительные параметры. Это равенство определяет величину параметра положения $\vartheta_0 = \operatorname{Arch} u$ в данной прецессии, причем $u_0 > (2c)^{-1}$.

Согласно зависимости (34), нутационное движение гиростата является периодическим с периодом (в натуральном времени t), равным

$$T = 4\mathrm{K}(k_p)(\Omega\sqrt{e_1 - e_3}\,)^{-1}, \qquad (37)$$

где K − символ полного эллиптического интеграла первого рода с модулем

$$k_p = \sqrt{\frac{e_1 + 2e_2}{e_1 - e_3}} \qquad (e_1 > e_3).$$

Таким образом, в нутационном движении ось кинетической симметрии гиростата совершает периодическое с периодом T по (37) движение в области, расположенной между двумя соосными круговыми конусами с вершинами в полюсе O и с углами при вершинах $2\vartheta_1, 2\vartheta_2$. Эти конусы находятся внутри изотропного конуса данного пространства и имеют общую ось симметрии, определяемую вектором **G**.

5. Прецессионное движение

Исследуем инерционное движение гиростата в режиме непрерывного изменения угла прецессии (движение по углу λ). Движение в этом режиме определяется зависимостью вида $\lambda(\tau)$, которая, согласно первому уравнению системы (27), выражается соотношением

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + \Omega^{-1}Q\,\tau - c^{-1}\int_0^{\tau}\frac{q(u)}{u^2 - 1}ds, \quad (38)$$

где обозначено

$$\tau = \Omega t, \;\; q(u) = cu^2 - g_2 u - h. \qquad (39)$$

Применяя зависимость (34) и формулу интегрирования дробно-линейного выражения как функции от $\wp(\tau)$ [3, с. 130], в результате, согласно равенству (38), получаем:

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + B\tau - [m_1 I_1(\tau) + m_2 I_2(\tau)]. \; (40)$$

В равенстве (40) обозначено:

$$B = \Omega^{-1}Q - 1, \quad n_c = c - h,$$

$$m_1 = (2c)^{-1}(n_c - g_2),$$

$$m_2 = -(2c)^{-1}(n_c + g_2),$$

$$I_k(\tau) = n_k^{-1}\theta - D_k[Z_k(\theta) + 2\theta\zeta(\nu_k)],$$

$$Z_k(\theta) = \ln\frac{\sigma(\theta - \nu_k)}{\sigma(\theta + \nu_k)}, \quad \theta = \tau + w_0,$$

$$(n_1, n_2) = (u_p - 1, u_p + 1), \quad \rho_k = \wp'(\nu_k)$$

$$(k = 1, 2),$$

$$D_1 = g_0[(u_p - 1)^2\rho_1]^{-1},$$

$$D_2 = g_0[(u_p + 1)^2\rho_2]^{-1}.$$

Здесь σ, ζ − символы функций Вейерштрасса, функционально связанных с функцией Вейерштрасса $\wp(\tau)$ [3, с. 128]; ν_1, ν_2 − характерные постоянные, определяемые равенствами

$$\rho_1 = g - g_0(u_p - 1)^{-1} \quad (u_p > 1),$$

$$\rho_2 = g - g_0(u_p + 1)^{-1},$$

а функция $\wp'(w)$ устанавливается равенством, относящемся к соотношениям (32).

Согласно равенству (40), величина параметра прецессии λ является алгебраической суммой секулярной части с безразмерным временем τ и нелинейного дополнения. Следовательно, прецессия оси кинетической симметрии гиростата является составным движением, образованным наложением нестационарного нелинейного аддитивного фактора на равномерное прецессирование в конфигурационном пространстве оси гиростата с угловой скоростью B.

В некоторых частных случаях вид зависимости (40) может быть упрощен. В частности, если действительный или мнимый основные периоды функции $\wp(\tau)$ бесконечны, то эта функция, а также связанные с ней функции $\sigma(\tau), \zeta(\tau)$, вырождаются в гиперболические и круговые тригонометрические функции (это соответствует случаям кратных корней e_j стандартного полинома Вейерштрасса [3]).

Обозначим $N = c_2^2 - 3c_1c_3$. В случаях, для которых основные периоды функции $\wp(\tau)$ бесконечны, когда коэффициенты полинома $P(u)$ связаны ограничениями

$$N - 12c_0 = 0,$$

$$\frac{4}{9}c_2^3 + \left(\frac{1}{12}ND_c - c_1c_2c_3\right) - 3c_1^2 = 0,$$

имеем $q_2 = q_3 = 0$, $e_j = 0$, откуда следует, согласно [3, с. 128]:

$$\wp(\theta) \sim \theta^{-2}, \quad \zeta(\theta) \sim \theta^{-1}, \quad \sigma(\theta) \sim \theta.$$

В этих случаях имеет место особый вид движения гиростата в данном пространстве − *вырожденная прецессия*.

Рассмотрим свойства движения по параметру λ. Обозначим:

$$N_r = g_r H \quad (r = 1, 2).$$

Из первого уравнения системы (27) и интеграла энергии (28) следует:

$$\dot{\lambda}(u) = \lambda_p + H(u^2 - 1)^{-1} p_2(u), \qquad (41)$$

$$p_2(u) = g_2 u - n_c, \quad \lambda_p = Q - \Omega,$$

откуда находим, что $\dot{\lambda}(u_s) = 0$, где u_s − простой действительный корень уравнения

$$\lambda_p u^2 + N_2 u + h_q = 0, \qquad (42)$$

$$h_q = D - Q.$$

Согласно уравнению (42), при $\lambda_p = 0$ имеем:

$$u_s = -N_2^{-1} h_q, \; h_q + N_2 \le 0 \; (h_q < 0),$$

тогда как при $\lambda_p \ne 0$ беспрецессионное движение, существующее для

$$D_s = N_2^2 - 4\lambda_p h_q \ge 0,$$

реализуется при значениях

$$u_s = (2\lambda_p)^{-1}(-N_2 \pm \sqrt{D_s}). \qquad (43)$$

В равенстве (43) знак перед радикалом выбирается из условия $u_s > 0$.

Определим область значений переменной u, для которых реализуется прецессионное движение. Условие $\dot{\lambda}(u) > 0$ выполняется: для значений $\lambda_p > 0$ − на открытом множестве $(1 < u < u_1) \cup (u > u_2)$, а для значений $\lambda_p < 0$ − на интервале $(u_1 < u < u_2)$.

Ограничение $\dot{\lambda}(u) < 0$ выполняется: при $\lambda_p > 0$ − на множестве $(u_1 < u < u_2)$, а при $\lambda_p < 0$ − на интервале $(1 < u < u_1) \cup (u > u_2)$. Здесь знаки величины $\dot{\lambda}$ относятся к прямому и обратному (по направлениям) прецессионному движению, соответственно.

В силу равенства (41) составим производную функцию

$$\ddot{\lambda}(u) = -N_2 (u^2 - 1)^{-2} F(u)\dot{u}, \qquad (44)$$

где обозначено

$$F(u) = u^2 - h_p u + 1, \quad h_p = 2 g_2^{-1} n_c,$$

и примем условие $D > \Omega$. Тогда функция $F(u)$ является положительно определенной для значений $u \in (1, +\infty)$ и, согласно уравнению (44), имеем $\ddot{\lambda}(u) > 0$ при $\pi + \beta < \varphi < 2\pi + \beta$ и $\ddot{\lambda}(u) < 0$ для $\beta < \varphi < \pi + \beta$. Далее интервал данных значений периодически повторяется через $n\pi \; (n = 1, ...)$. Этим определяются интервалы ускорения и замедления скорости прецессирования оси кинетической симметрии гиростата.

6. Колебательное и вращательное движения

Можно показать, что в условиях принятых предпосылок существуют режимы колебательных и вращательных движений гиростата по углу φ, реализуемых при определенных условиях. Для нахождения этих условий установим структуру фазовых траекторий на плоскости переменных (ϑ, φ).

Портрет фазовых траекторий, соответствующих множеству значений параметра h (параметра уровня) интеграла энергии (28), зависит от области расположения значений параметров c, α на этой плоскости. Следовательно, определяющими структурными параметрами режима движения гиростата являются параметры h, c, α.

Из множества возможных значений параметра h в силу интеграла (28) выделим значение $h_c = c + g_2$, достигаемое в особом случае, когда $\vartheta = 0$. Этому значению соответствует фазовая траектория, являющаяся сепаратрисой, разделяющей области существования колебательного режима движения гиростата по углу φ от вращательного.

Охватываемый этой сепаратрисой колебательный цикл движения в предельном случае вырождается в точку статического равновесия, положение которой на фазовой плоскости определяется значением параметра h.

Уравнение данной сепаратрисы на плоскости (ϑ, φ) при $\alpha > 0$ имеет вид:

$$\cos\varphi(\xi) = g_1^{-1}(2c\,\mathrm{ch}^2\,\xi + g_2)\,\mathrm{th}\,\xi, \qquad (45)$$

где обозначено $\xi = \vartheta/2$.

В случаях, при которых фазовая точка имеет траекторию, даже частично совпадающую с сепаратрисой (45), на участках совпадения гиростат движется в критическом режиме.

Этот режим можно интерпретировать движением уединенной стационарной волны неизменного профиля (бегущей волны), движущейся в среде без диссипации. Данная волна является кинком − *солитоном Кортевега-де Фриза.*

В области фазовой плоскости, прилегающей к сепаратрисе, движение фазовой точки имеет характер, аналогичный свойствам перемещения кноидальной волны − периодической солитонной решетки, определяемой функцией кинка:

$$\Phi(\xi) = \mathrm{ch}^{-2}\xi.$$

Из второго и третьего уравнения системы (27) согласно равенству (28) имеем:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = [\Phi_2(\varphi)]^{-1}\Phi_1(\vartheta, \varphi), \qquad (46)$$

$$\Phi_1(u) = (2cu + g_2)(u^2 - 1) - \\ - (cu^2 + g_2 u - h)u,$$

$$\Phi_2(\varphi) = g_1(u^2 - 1)\sin(\varphi - \beta)$$

$$(\alpha > 0,\ \varphi - \beta > 0),$$

где функция $\varphi(u)$ определяется формулой (28).

Фазовая плоскость (ϑ, φ), согласно уравнению (46), содержит множество стационарных точек $u = u_c$, определяемых уравнением

$$3cu_c^3 - 2g_2 u_c^2 - (2c + h)u_c + g_2 = 0, \quad (47)$$

где $u_c = \mathrm{ch}\,\vartheta_c$, и множество особых точек вида

$$\varphi_* = \beta \pm n\pi \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

В силу равенства (47) для критического значения $u_c = 1$ существуют двойные особые точки, являющиеся узловыми точками с угловыми коэффициентами касательных в них к фазовым траекториям, равными

$$\upsilon_n = (-1)^n (2g_1)^{-1}(g_2 - c).$$

В этом же случае начало координат фазовой плоскости содержит дикритический узел.

Для определения явной зависимости вида $\varphi(u)$ применим первый интеграл (28), представленный в виде

$$\cos(\varphi - \beta) = \frac{q_s(u)}{g_1\sqrt{u^2 - 1}} \equiv V_1(u), \qquad (48)$$

где принято

$$q_s(u) = h - g_2 u - cu^2,\ \alpha > 0,\ u > 1.$$

Согласно второму уравнению системы (27) и уравнению (29), получаем:

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{c}{g_1}\sqrt{\frac{P(u)}{u^2 - 1}} \equiv V_2(u), \qquad (49)$$

при этом из соотношений (48), (49) следует:

$$\begin{aligned} \sin\varphi(u) &= V_1(u)\sin\beta + V_2(u)\cos\beta, \\ \cos\varphi(u) &= V_1(u)\cos\beta - V_2(u)\sin\beta. \end{aligned} \qquad (50)$$

Искомая параметрическая зависимость для угла φ определяется системой, составленной из любого равенства (50) и уравнения (31).

7. Годографы векторов скорости и кинетического момента

Получим параметрические уравнения годографа вектора **ω**, представленные относительно координатных осей ортобазиса Γ. Для собственного вектора **G** из равенств (4), согласно соотношениям (27), (48), (49), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Q\,\mathrm{sh}\,\vartheta\sin\varphi - N_1\sin\beta, \\ \omega_2 &= Q\,\mathrm{sh}\,\vartheta\cos\varphi - N_1\cos\beta, \\ \omega_3 &= N_2 - Q_3\,\mathrm{ch}\,\vartheta, \end{aligned} \qquad (51)$$

где обозначено $Q_3 = a_3 G$.

Из соотношений (51) в силу выражений (50) при $\alpha > 0$ следует:

$$\begin{aligned} \omega_1(u) &= Q_1[q(u)\sin\beta + \\ &\quad + \Phi(u)\cos\beta] - N_1\sin\beta, \\ \omega_2(u) &= Q_1[q(u)\cos\beta - \\ &\quad - \Phi(u)\sin\beta] - N_1\cos\beta, \\ \omega_3(u) &= N_2 - Q_3 u, \end{aligned} \qquad (52)$$

где обозначено

$$Q_1 = g_1^{-1}Q, \qquad \Phi(u) = c\sqrt{P(u)}\,,$$

а функция $q(u)$ определяется соотношением (39).

Присоединяя к равенствам (52) выражение (31), получаем систему параметрических уравнений с параметром *u*, определяющую зависимости вида $\omega_j(t)$.

Из уравнений (52) следует

$$(\omega_1 + \mu_1)^2 + (\omega_2 + \mu_2)^2 = Q^2(u^2 - 1), \quad (53)$$

где обозначено

$$(\mu_1, \mu_2) = N_1(\sin \beta, \cos \beta).$$

Соотношение (53) в пространстве квазикоординат ω_j при фиксированном значении $u(\vartheta) = u_*$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными координатной оси Ox_3 ортобазиса Γ. Эта поверхность является круговым цилиндром, содержащим в сечении плоскостью $\omega_3 = \text{const}$ $(\vartheta = \text{const})$ окружность радиуса $Q\sqrt{u_*^2 - 1}$ − проекцию годографа вектора $\boldsymbol{\omega}$ на плоскость, нормальную оси этого цилиндра.

Таким образом, данная поверхность является несущей для годографа вектора скорости.

Из равенств (1), (24), (26) следуют соотношения для компонент вектора $\mathbf{G}(G_j)$:

$$\begin{aligned} G_1(u) &= A[\omega_1(u) + N_1 \sin \beta], \\ G_2(u) &= A[\omega_2(u) + N_1 \cos \beta], \\ G_3(u) &= A_3[\omega_3(u) + N_2], \end{aligned} \tag{54}$$

которые, аналогично предыдущему, определяют годограф вектора $\mathbf{G}$ относительно координатных осей ортобазиса Γ.

При этом выражения для величин $\omega_j(u)$ в явном виде устанавливаются равенствами (52).

В силу линейной зависимости (54) между соответствующими компонентами ω_j, G_j заключаем, что годографы векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{G}$ и их годографические несущие поверхности, как геометрические фигуры, подчиняются закону невырожденного аффинного преобразования.

Это преобразование является композицией центроаффинного преобразования с центром, совпадающим с центром инерции гиростата. В этом смысле данные годографы и их несущие поверхности являются обобщенно-подобными геометрическими фигурами.

Заключение

Инерционное движение гиростата относится к его простейшим движениям, совершаемым без воздействия внешних моментно-силовых факторов. Это обстоятельство позволяет при анализе влияния внешних сил на движение гиростата разделить динамические эффекты, порожденные внешними силами, от эффектов, обусловленных инерционным движением.

Свойства инерционного движения гиростата, совершаемого в евклидовом пространстве, исследованы в аналогичной задаче, содержащейся в работе [5]. Ее динамическим аналогом является задача, относящаяся к полуевклидову пространству, приведенная в настоящей работе. Эта задача рассмотрена для случая, при котором вектор кинетического момента гиростата является собственным.

Движения гиростата в других случаях, при которых этот вектор является идеальным или изотропным, требуют отдельного исследования. Следует отметить, что, в отличие от рассмотренного в данной статье случая, квадраты норм векторов $\|\mathbf{s}\|^2 = \ell$, $\|\mathbf{G}\|^2 = \ell G^2$ для упомянутых случаев являются разными по величине: значения характерного маркировочного параметра $\ell = (-1, 0)$ имеют место для идеальных и изотропных векторов, соответственно. Это различие распространяется и на соотношения связи между величинами ω_j и параметрами положения гиростата в конфигурационном пространстве.

Данные соотношения являются аналогами кинематических уравнений Эйлера, существующих для твердого тела в евклидовом пространстве. Исследование инерционного движения гиростата с применением подвижных годографов векторов его скорости и кинетического момента открывает возможность проведения анализа динамических свойств в касательном пространстве.

Список источников

1. *Косогляд Э.И.* Движение твердого тела под действием сил на плоскости Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1970, № 9 (100). С. 59−68.
2. *Макеев Н.Н.* Квадратуры геометрической теории динамики гиростата // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Пермский ун-т. 2012. Вып. 44. С. 87−104.
3. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
4. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит, 1963. Ч. 2. 516 с.
5. *Смольников Б.А.* Движение вокруг центра инерции твердого тела с вращающимися маховиками // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 625−635.

References

1. Kosoglyad, E.I. (1970), "Dvizhenie tverdogo tela pod deystviem sil na ploskosti Lobachevskogo", *Izvestiya vuzov. Matematika*, no. 9(100), pp. 59-68.
2. Makeev, N.N. (2012), "Kvadratury geometricheskoy teorii dinamiki girostata", *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr.*, vol. 44, pp. 87-104.
3. Yanke, E., Emde, F. and Lesh, F. (1964), "*Spetsial`nye funktsii*" [Special functions], Nauka, Moscow, Russia.
4. Uitteker, E.T. and Vatson, DZh. N. (1963), "*Kurs sovremennogo analiza*. *V 2 Ch.*" [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, Moscow, Russia.
5. Smol`nikov, B.A. (1966), "Dvizhenie vokrug tsentra inertsii tverdogo tela s vrashchayushchimisya makhovikami", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 30, no. 4, pp. 625-635.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев − доктор физико-математических наук, профессор (410000, Россия, г. Саратов), AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev − Doctor of physical and Mathematical Sciences, Professor (Saratov, Russia, 410000), AuthorID: 374535.