«Математика»

Научная статья

УДК 519.6
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14

Модифицированная формула Герасимова–Капуто

Н.К. Волосова[1], К.А. Волосов[2], А.К. Волосова[2], М.И. Карлов[3], Д.Ф. Пастухов[4], Ю.Ф. Пастухов[4]

[1]Московский государственный технический университет (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2] Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия
[3]Московский физико-технический университет (МФТИ), Москва, Россия
[4]Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. В работе впервые получены модифицированные формулы Герасимова–Капуто. Модифицированные формулы учитывают значение производной функции в нуле с порядком на единицу меньше, чем порядок производной, стоящей под знаком интеграла Герасимова–Капуто. Без учета нового слагаемого в формулах Герасимова–Капуто не всегда корректно вычисление дробной производной на интервале любого порядка и для любой функции. В работе также описан простой численный алгоритм с квадратурной формулой Гаусса, позволяющей вычислять дробную производную с двойной точностью. Составлены таблицы дробной производной для функций синуса и косинуса. Причем первая половина таблиц (в интервале порядка (0,1)) и вторая половина таблиц (в интервале порядка (1,2)) получена программами по разным алгоритмам. В работе достигнута абсолютная погрешность вычисления дробной производной 10^{-15}.

Ключевые слова: *численные методы; дробная производная Герасимова–Капуто; дробная производная Капуто*

Для цитирования: *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.* Модифицированная формула Герасимова–Капуто // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 5–14. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2024-1-5-14.

Статья поступила в редакцию 19.01.2024; одобрена после рецензирования 14.02.2024; принята к публикации 15.03.2024.

«Mathematics»

Research article

Modified Gerasimov–Caputo Formula

N.K. Volosova[1], K.A. Volosov[2], A.K. Volosova[2], M.I. Karlov[3], D.F. Pastuhov[4], Yu.F. Pastuhov[4]

[1]Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia
[2]Russian University of Transport (RUT MIIT), Moscow, Russia
[3]Moscow University of Physics and Technology (MIPT), Moscow, Russia
[4]Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract. In this work, modified Gerasimov–Caputo formulas were obtained for the first time. The modified formulas take into account the value of the derivative of the function at zero with an order of one less than the order of the derivative under the sign of the Gerasimov–Caputo integral. Without taking into account the new term in the Gerasimov–Caputo formulas, it is not always possible to calculate the fractional derivative on any order interval and for any function. The paper also describes a simple numerical algorithm with the Gaussian quadrature formula, which allows one to calculate the fractional derivative with double precision. tables of fractional derivatives for the sine and cosine functions have been compiled. Moreover, the first half of the tables (in the interval of order (0,1)) and the second half of the tables (in the interval of order (1,2)) were obtained by programs using different algorithms. In the work, an absolute error in calculating the fractional derivative of 10–15 was achieved.

Keywords: *numerical methods; Gerasimov–Caputo fractional derivative; Caputo fractional derivative*

For citation: Volosova, N.K., Volosov, K.A., Volosova, A.K., Karlov, M.I., Pastukhov, D.F., Pastukhov, Yu.F. (2024), "Modified Gerasimov–Caputo Formula", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 5-14. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14.

The article was submitted 19.01.2024; approved after reviewing 14.02.2024; accepted for publication 15.03.2024.

Введение

В работе [1] показано, что в задачах аномальной диффузии необходимо использовать производные дробного порядка, принимающего значения на интервале (0,2). Другой пример, в задачах механики поток газа Трикоми на звуковой лини прямо пропорционален производной порядка 2/3 от функции тока [2]. Как известно, производная Герасимова–Капуто определяется [1], [2], [3], [4] интегральной формулой (1) .

В работе показано, что для явного вычисления производной Герасимова–Капуто необходимо еще одно слагаемое, которое зависит от значения функции u(0), переменной t и порядка дробной производной α на интервале (0,1). Данное слагаемое необходимо для согласования производной функции целого порядка и предельного значения производной дробного порядка, когда ее порядок становится целым. Для некоторых функций новое дополнительное слагаемое в точке t=0 не требуется, например, для функции u(t)=sin(t) в интервале α = (0,1). В работе максимально упрощен алгоритм вычисления дробных производных квадратурной формулой Гаусса. В программу вводится исходная функция, первая или вторая ее производные. Гладкости первого или второго порядка используемой функции требует также формула-определение (1).

В работах [5], [6], [10] рассмотрены разностные уравнения и аналог задачи оптимального управления Л.С. Понтрягина с производными дробного порядка.

Постановка задачи

Пусть заданная функция u(x,t) является достаточно гладкой по переменной *t*, $u(x,t)\in C^n(0,t)$, тогда производная функции целого порядка *n* по переменной *t* является непрерывной и интеграл в формуле (1) сходится, так как в особой точке $\tau\to t$ знаменатель дроби пропорционален $1/(t-\tau)^{\alpha-n+1}$ учитывая $-1<\alpha-n+1<0$.

Определение 1. Производной дробного порядка α>0 Герасимова–Капуто от функции двух переменных *u(x,t)* (по переменной *t*) [1], [2], [3] называется функция

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial\tau^n}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \qquad (1)$$

$$n=[\alpha]+1, n\in N, \alpha\in R, \alpha-n+1=\{\alpha\}\in(0,1).$$

Для простоты рассмотрим частный случай дробной производной для функции одной переменной *u(t)*, так как в нашей задаче переменная x не используется. Для двух интересующих нас интервалов порядка производной с учетом формулы (1) получим:

1). $0<\alpha<1, n=1$

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},\ n=1, 0<\alpha<1 \quad (2)$$

2). $1<\alpha<2, n=2$

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}},\ n=2, 1<\alpha<2\ . \quad (3)$$

Гамма-функция в формулах (2), (3) вычисляется по формуле Эйлера (4):

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^t dt, t\in[0,\infty), \alpha>0 \;. \quad (4)$$

Поскольку дробные производные в формулах (2), (3) определены с точностью до множителя $\Gamma(1-\alpha), \Gamma(2-\alpha)$, то сложность вычисления производной дробного порядка заключается в сложности численного алгоритма для соответствующего интеграла. В языке FORTRAN вызовом функции $dgamma(\alpha)$ $\Gamma(\alpha)$ вычисляется с относительной точностью 10^{-15}.

Очевидно, что производная дробного порядка α в (2), (3) должна переходить в производную целого порядка n-1 в случае $\alpha\to n-1$. Если в формуле (2) $\alpha\to n-1=0$, то

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha\to 0}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha=0}}=u(t)-u(0). \quad (5)$$

Аналогично, если в формуле (3) $\alpha\to n-1=1$, то

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha\to 1}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(2-1)}\int_0^t \frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-1}}=\frac{d}{dt}u(t)-\frac{d}{dt}u(0)\;. \quad (6)$$

Рассмотрим пример:

$$u(t)=\sin(t): D_{0+}^{\alpha\to+0}u(t)\overset{(5)}{=}\sin(t)-\sin(0)=\sin(t)$$

$$D_{0+}^{\alpha\to+1}u(t)\overset{(6)}{=}\sin'(t)-\sin'(0)=\cos(t)-1\neq\cos(t)\;.$$

Получаем противоречие для производной синуса первого порядка и формулой (6) на интервале $\alpha\in(1,2)$, хотя противоречия для производной синуса нуль порядка на интервале $\alpha\in(0,1)$ и формулой (5) нет.

Чтобы устранить противоречие, в формулу (2) нужно добавить слагаемое вида

$$\overline{\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+u(0)g_1(t,\alpha)\right)\!. \quad (7)$$

Сравнивая формулы (5) и (7), получим $g_1(t,\alpha\to 0+0)=1, \alpha\in(0,1)$. Также добавим в формулу (3) слагаемое вида

$$\overline{\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)}(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^t \frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}+\frac{d}{dt}u(0)g_2(t,\alpha)\right)\! \quad (8)$$

$$g_2(t,\alpha\to 1+0)=1, \alpha\in(1,2)\;.$$

Преобразуем интеграл в формуле (2) по частям для $\alpha\in(0,1)$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{u(0)}{t^{\alpha}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(\frac{u(t-\varepsilon)}{(\varepsilon)^{\alpha}}\right)-\alpha\int_0^{t-\varepsilon}\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\right]\right). \quad (9)$$

В формуле (9) под знаком предельного перехода два слагаемые, зависящие от переменной ε, стремятся к бесконечности, и именно их разность может дать конечное число. Уточняя формулу (7), получим

$$\overline{\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}+\frac{u(0)}{t^{\alpha}}\right), \alpha\in(0,1)(. \quad (10)$$

Преобразуем также (3):

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}=$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-\frac{u'(0)}{t^{\alpha-1}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(\frac{u'(t-\varepsilon)}{(\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)-(\alpha-1)\int_0^{t-\varepsilon}\frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right]\right). \quad (11)$$

Аналогично формуле (10), для интервала (0,1) на интервале (1,2) получим модифицированную формулу Герасимова–Капуто (12): $1<\alpha<2, n=2$

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^t \frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}+\frac{u'(0)}{t^{\alpha-1}}\right). \quad (12)$$

Заметим, что формула (10) переходит в функцию $u(t)$ при $\alpha\to+0$, а формула (12) переходит в производную $\frac{du(t)}{dt}$ при $\alpha\to 1+0$.

Определение 2. Модифицированной формулой Герасимова–Капуто на интервале $0<\alpha<1, n=1$ определим формулой (10), а на интервале $1<\alpha<2, n=2$ определим формулой (12).

Определение 3. Модифицированной формулой Герасимова–Капуто на интервале $n-1<\alpha<n, n=[\alpha]+1$ определим формулой

$$\overline{\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_0^t \frac{d^n u(\tau)}{d\tau^n}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}+\frac{u^{(n-1)}(0)}{t^{\alpha-n+1}}\right). \quad (13)$$

Формула (13) переходит в формулу $u^{(n-1)}(t)$ при $\alpha\to n-1+0$.

Рассмотрим обобщение производной дробного порядка от степенной функции:

$$\frac{d^k x^n}{dx^k}=n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\;.$$

Для производной дробного порядка α получим аналогичное выражение:

$$\frac{d^\alpha x^n}{dx^\alpha} = \frac{n!}{(n-\alpha)!}x^{n-\alpha} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}x^{n-\alpha}.$$

Разложим гладкую функцию в ряд Маклорена, используя предыдущую формулу:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(0)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(0)t^n}{\Gamma(n+1)},$$

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{u^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}. \quad (14)$$

Для функции $u(t)=\cos(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$ получим

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\cos(t)\right) \overset{(14)}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k}(i-\alpha)}, \alpha\in(0,1) \\ \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-\alpha}}{\prod_{i=2}^{2k}(i-\alpha)}, \alpha\in(1,2) \end{cases}. \quad (15)$$

Для функции $u(t)=\sin(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}t^{2k+1}$ имеем

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}\sin(t)\right) \overset{(14)}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k+1}(i-\alpha)}, \alpha\in(0,1) \\ \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=2}^{2k+1}(i-\alpha)}, \alpha\in(1,2) \end{cases}. \quad (16)$$

Опишем численный алгоритм, аппроксимирующий формулу (10), отбрасывая известный множитель $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ и слагаемое $\frac{u(0)}{t^\alpha}$. Представим интеграл (2) в виде суммы, используя во втором интеграле замену переменных $z\big|_{t-b}^{0} = t-\tau\big|_{b}^{t}, dz=-d\tau$.

$$I(u(t)) \equiv \int_0^t\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = \int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_b^t\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} =$$

$$= \int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \int_{t-b}^{0}\frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha} = \int_0^b\frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_0^{t-b}\frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha} \quad (17)$$

Для максимального упрощения алгоритма, первую производную в (17) от известной функции считаем заданной.

В работе [9] получена составная квадратурная интегральная формула с равномерным шагом и с 12 порядком погрешности $O(h^{12})$, которую мы используем для первого интеграла в (17) на отрезке [0,b]

$$\int_a^b u(x)dx = 5h\sum_{i=0}^{n}C_i u(x_i) + O(h^{12}), n=10m, h=\frac{b-a}{n}, m\in N,$$

если

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, i=0 \vee i=n \\ \frac{16067}{149688}, (i\equiv 0 \bmod 10)\wedge(0<i<n) \\ \frac{26575}{74844}, (i\equiv 1 \bmod 10)\vee(i\equiv 9 \bmod 10) \\ \frac{-16175}{99792}, (i\equiv 2 \bmod 10)\vee(i\equiv 8 \bmod 10) \\ \frac{5675}{6237}, (i\equiv 3 \bmod 10)\vee(i\equiv 7 \bmod 10) \\ \frac{-4825}{5544}, (i\equiv 4 \bmod 10)\vee(i\equiv 6 \bmod 10) \\ \frac{17807}{12474}, i\equiv 5 \bmod 10 \end{cases}. \quad (18)$$

Вычислим второй интеграл в (17) $\int_0^{t-b}\frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha}$.

Предварительно введем вспомогательный интеграл с параметром *a* под аргументом функции:

$$I_2(b,t,a,\alpha) = \int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}. \quad (19)$$

Параметр *a* необходим для аппроксимации первой производной в (10) квадратурной формулой, которая в данной работе не используется, но получена в работе [9].

Весовая функция неотрицательна $\rho(z)=\frac{1}{z^\alpha}\geq 0$ на отрезке $[0,t-b]$.

Построим [8] квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами.

Утверждение 1. Если функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке [0,t-b] с весом $\rho(z)=\frac{1}{z^\alpha}\geq 0, z\in[0,t-b]$, то квадратурная формула Гаусса имеет вид

$$\int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} = C_1u(x_1)+C_2u(x_2)+C_3u(x_3)+O\left((t-b)^6\right), \quad (20)$$

где неизвестные $C_1, C_2, C_3, x_1, x_2, x_3$ равны

$$C_1=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\right.$$

$$\left.-(2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right),$$

$$C_2=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)(x_1-t-a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+\right.$$

$$\left.+(2(t+a)-x_1-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right),$$

$$C_3=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-C_2-C_1,$$

$$x_1=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},$$

$$x_2=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},$$

$$x_3=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3},$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)=\arccos\left(-\frac{\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3-\frac{b_1c}{3}+d}{2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}}\right).$$

В формуле (20) b_1,c,d – неизвестные для ортогонального полинома [8]:

$$P_3(z)=z^3+b_1z^2+cz+d,\quad \rho(z)=\frac{1}{z^\alpha}\ge 0, z\in[0,t-b],$$

$$b_1=\frac{-3(3-\alpha)(t-b)}{(6-\alpha)}, c=\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)},$$

$$d=\frac{-(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \tag{21}$$

Доказательство. Определим ортогональный полином

$$z^3+b_1z^2+cz+d, z\big|_{t-b}^{0}=t-\tau\big|_b^t\ge 0$$

с 3 узлами и $\rho(z)=\frac{1}{(z)^\alpha}\ge 0, z\in[0,t-b]$ с помощью системы уравнений [8]:

$$\begin{cases}\int\limits_0^{t-b}\rho(z)P_3(z)dz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{z^3+b_1z^2+cz+d}{z^\alpha}dz=0\\ \int\limits_a^{t-b}\rho(z)P_3(z)zdz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{(z^3+b_1z^2+cz+d)z}{z^\alpha}dz=0\\ \int\limits_a^{t-b}\rho(z)P_3(z)z^2dz=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{t-b}\frac{(z^3+b_1z^2+cz+d)z^2}{z^\alpha}dz=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^{6-\alpha}}{(6-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)}+\frac{c(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)}+\frac{d(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}=0\end{cases}. \tag{22}$$

Из системы (22) получим уравнения (23), (24):

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)(2-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(2-\alpha)^2}+\frac{d}{(1-\alpha)(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(1-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(1-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(3-\alpha)(1-\alpha)}+\frac{d}{(2-\alpha)(1-\alpha)}=0\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}\frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(3-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(3-\alpha)^2}+\frac{d}{(3-\alpha)(2-\alpha)}=0\\ \frac{(t-b)^3}{(6-\alpha)(2-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(5-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(4-\alpha)(2-\alpha)}+\frac{d}{(2-\alpha)(3-\alpha)}=0\end{cases} \tag{24}$$

Вычитая из вторых уравнений систем (23) и (24) первые уравнения в (23) и (24) соответственно, получим систему двух уравнений (25) с константами b_1,c:

$$\begin{cases}(t-b)^2\left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(3-\alpha)(2-\alpha)}\right)=0\\ (t-b)^2\left(\frac{3}{(6-\alpha)(5-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+c\left(\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)=0\end{cases} \tag{25}$$

Второе уравнение в (25) умножим на дробь $\frac{1}{(2-\alpha)}$, затем вычтем из полученного выражения с множителем $\frac{1}{(4-\alpha)}$ первое уравнение

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{1}{(6-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)^2}\right)+$$

$$\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{1}{(5-\alpha)(2-\alpha)}-\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{16-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2)}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2}\right)+$$

$$+\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{12-7\alpha+\alpha^2-(10-7\alpha+\alpha^2)}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)}\left(\frac{4}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2}\right)+$$

$$+\frac{2b_1}{(4-\alpha)}\left(\frac{2}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$b_1=-\frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)}. \tag{26}$$

Выражая из первой формулы системы (25), найдем c с учетом результата (26):

$$c=-(3-\alpha)(2-\alpha)\left((t-b)^2\left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)}\right)+(t-b)b_1\left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)}\right)\right)=$$

$$=-\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)}\left(\frac{1}{(5-\alpha)}-\frac{2}{(6-\alpha)}\right)=$$

$$=-\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}(-4+\alpha)=\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)}. \quad (27)$$

Получим d из первой строки системы (22) с учетом (26), (27) для найденных b_1, c:

$$d=-(1-\alpha)\left(\frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)}+b_1\frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)}+\frac{c(t-b)}{(2-\alpha)}\right)=$$

$$=-(1-\alpha)(t-b)^3\left(\frac{1}{(4-\alpha)}-\frac{3}{(6-\alpha)}+\frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)}\right)=$$

$$=-(1-\alpha)(t-b)^3\left(\frac{6-\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(6-\alpha)}+\frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)}\left(\frac{2}{(4-\alpha)}-\frac{3}{(5-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)}\left(\frac{10-2\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(5-\alpha)}\right)=$$

$$=-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \quad (28)$$

Получен ортогональный полином с учетом формул (26), (27), (28):

$$P_3(z)=z^3+b_1z^2+cz+d=z^3-\frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)}z^2+$$

$$+\frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)}z-\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \quad (29)$$

Поскольку корни ортогонального полинома действительны [8], попарно различны, то уравнение (29) имеет три положительных корня на отрезке [0,t-b]. Кубическое уравнение (29) согласно работе [7] следует привести к каноническому уравнению заменой переменных:

$$y=z+\frac{b_1}{3}, y^3+py+q=0, p=c-\frac{b_1^2}{3}, q=\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3-\frac{b_1c}{3}+d.$$

По критерию Д.К. Фаддеева [7] кубическое уравнение (29) имеет три раз-личных вещественных корня если $p_1=-p=\frac{b_1^2}{3}-c>0$.

Это условие выполнено и для нашего ортогонального полинома (29).

$$p_1=\frac{b_1^2}{3}-c=\frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)}\left(\frac{(3-\alpha)}{(6-\alpha)}-\frac{(2-\alpha)}{(5-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)}(15-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2))=\frac{9(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)}>0,$$

так как $0<\alpha<1$.

Поэтому воспользуемся формулами А.Д. Фаддеева [7, стр. 65] для трех действительных различных корней уравнения (29).

После-довательно вычисляем:

$$r,\varphi,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3,x_1,x_2,x_3\ \ r=\sqrt{\frac{b_1^3}{3}},$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)=\arccos\left(-\frac{\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3-\frac{b_1c}{3}+d}{2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}}\right), (30)$$

$$y_1=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), y_2=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right),$$

$$y_3=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right), z_1=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{b_1}{3},$$

$$z_2=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3}, z_3=2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)-\frac{b_1}{3}.$$

А также

$$\begin{cases} x_1=t+a-z_1=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)+\frac{b_1}{3}, \\ x_2=t+a-z_2=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3}. \\ x_3=t+a-z_3=t+a-2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)+\frac{b_1}{3} \end{cases} (31)$$

Весовые коэффициенты C_1, C_2, C_3 в формуле Гаусса с найденными корнями (31) найдем с помощью классической задачи [8]:

$$u(t+a-z)\equiv 1: \int_0^{t-b}\frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}=\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha}=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=C_1+C_2+C_3$$

$$u(t+a-z)=t+a-z: \int_0^{t-b}\frac{(t+a-z)dz}{z^\alpha}=(t+a)\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha}-\int_0^{t-b}\frac{zdz}{z^\alpha}=$$

$$=(t+a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3$$

$$u(t+a-z)=(t+a-z)^2: \int_0^{t-b}\frac{(t+a-z)^2dz}{z^\alpha}=(t+a)^2\int_0^{t-b}\frac{dz}{z^\alpha}-2(t+a)\int_0^{t-b}\frac{zdz}{z^\alpha}+\int_0^{t-b}\frac{z^2dz}{z^\alpha}=$$

$$=(t+a)^2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-2(t+a)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}=C_1x_1^2+C_2x_2^2+C_3x_3^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=C_1+C_2+C_3 \\ (t+a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 \\ (t+a)^2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-2(t+a)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}=C_1x_1^2+C_2x_2^2+C_3x_3^2 \end{cases} .(32)$$

Первую строку в системе уравнений (32) умножим на x_3 и вычтем из второй строки:

$$(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=C_1(x_1-x_3)+C_2(x_2-x_3). \quad (33)$$

Затем вторую строку системы (32) умножим на число x_3 и вычтем из третьей строки:

$$(t+a)^2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-2(t+a)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}-(t+a)x_3\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+\frac{x_3(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=$$

$$=C_1x_1(x_1-x_3)+C_2x_2(x_2-x_3)\Leftrightarrow(t+a)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-$$

$$-(2(t+a)-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}=C_1x_1(x_1-x_3)+C_2x_2(x_2-x_3). \quad (34)$$

Выражение (33) умножим на x_2 и вычтем из полученного (34).

$$(t+a)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-(2(t+a)-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}-$$

$$-(t+a-x_3)x_2\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+x_2\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}=$$

$$=C_1x_1(x_1-x_3)-C_1x_2(x_1-x_3)=C_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)=$$

$$=(t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-(2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}.$$

Из последнего уравнения выразим C_1:

$$C_1=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\right.$$

$$\left.-(2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right). \quad (35)$$

С учетом (35) из формулы (33) найдем C_2:

$$C_2=-\frac{C_1(x_1-x_3)}{(x_2-x_3)}+\frac{1}{(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_2)(t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-(2(t+a)-x_3-x_2)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}+\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right)+$$

$$+\frac{1}{(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{(t+a-x_3)(x_1-t-a)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+\frac{(2(t+a)-x_1-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(3-\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}\left((t+a-x_3)(x_1-t-a)\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+(2(t+a)-x_1-x_3)\frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}-\frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\right)$$

(36)

Из системы (32) выразим C_3:

$$C_3=\frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-C_2-C_1 \quad (37)$$

.

Результаты формул (37), (36), (35), (31), (30), (29), (28), (27) совпадают с формулами (20), (21) и **Утверждение 1** доказано. Отметим также, что в упрощенном алгоритме квадратурная формула Гаусса (20), (21) для вычисления второго интеграла в формуле (17) (или в формуле (19) с параметром *a*=0) используется одни раз. Как и используется один раз формула (18) с равномерным шагом для вычисления первого интеграла в (17).

Замечание 1. Для дробной производной на интервале (0,1) в упрощенном алгоритме в Утверждении 1 нужно выбрать функцию и вес:

$$u(t-z)\to u'(t-z), a=0, \rho(z)=1/z^{\alpha}, \alpha\in(0,1).$$

А на интервале (1,2) нужно выбрать функцию $u(x)$ с другим весом:

$$u(t-z)\to u''(t-z), a=0, \rho(z)=1/z^{\alpha-1}, \alpha\in(1,2).$$

И в этом случае две формулы (20), (21) Утверждения 1 останутся верными, если в них формально заменить α-->α-1 и заменить весовую функцию.

Пользуясь формулами (10), (12) и соответствующим численным алгоритмом (18), (20), (21), составим таблицу для численного значения дробной производной и аналитического значения производной с помощью ряда (16) для функции $f(t)=\sin(t), t=1, \alpha\in(0,2)$.

Таблица 1. *Производная Герасимова–Капуто для функции* $u(t)=\sin(t), t=\pi/2, \alpha\in(0,2)$

α	$\left(D^{\alpha}_{0+,t}\sin(t)\right)$ $(t=\pi/2)$	$\left(D^{\alpha}_{0+,t}\sin(t)\right)_{num}$ $(t=\pi/2)$	$\Delta\left(D^{\alpha}_{0+,t}\right)$ $(t=\pi/2)$
10^{-14}	0.999999999999995	0.999999999999994	1.77635683E-015
10^{-8}	0.999999995279993	0.999999995279997	-4.1078E-015
0.1	0.947027515407809	0.947027515407803	5.99520432E-015
0.4	0.718425517119136	0.718425517119135	1.44328993E-015
0.5	0.619792030073509	0.619792030073510	-1.4432E-015
0.6	0.510993206384873	0.510993206384873	2.22044604E-016
0.9	0.135768608262797	0.135768608262797	2.49800180E-016
$1-10^{-8}$	1.37076217519046E-008	1.37076218024 3091E-008	-5.0526E-017
$1-10^{-14}$	1.38710238506829E-014	1.375792607134274E-014	1.13097779 3E-016
$1+10^{-14}$	-1.371991E-014	-1.3100631E-014	-6.1927E-016
$1+10^{-8}$	-1.370762E-008	-1.3707621E-008	-3.7398E-016
1.1	-0.137584665279301	-0.137584665279305	3.96904731 3E-015
1.4	-0.535013081857711	-0.535013081857709	-2.2204E-015
1.5	-0.652777665939620	-0.652777665939619	-8.8817E-016
1.6	-0.758179518757917	-0.758179518757916	-6.6613E-016
1.9	-0.971519622786878	-0.971519622786876	-2.3314E-015
$2-10^{-8}$	-0.999999998353808	-0.999999998353809	- 2.220E-016
$2-10^{-14}$	-0.999999999999998	-0.999999999999998	1.11022302E-016

Аналогичную таблицу для численного и аналитического значений производной с помощью ряда (15) составим для функции $f(t)=\cos(t), t=1, \alpha\in(0,2)$. Первая часть и вторая часть каждой таблицы на интервалах (0,1) и (1,2) находится разными алгоритмами и программами с особенностями, описанными в Замечании 1.

Таблица 2. *Производная Герасимова–Капуто для функции* $u(t)=\cos(t), t=\pi/2, \alpha\in(0,2)$

α	$\left(D^{\alpha}_{0+,t}\cos(t)\right)$ $(t=\pi/2)$	$\left(D^{\alpha}_{0+,t}\cos(t)\right)_{num}$ $(t=\pi/2)$	$\Delta\left(D^{\alpha}_{0+,t}\cos(t)\right)$ $(t=\pi/2)$
10^{-14}	-1.3671016044627E-014	-1.310063169057677E-014	-5.70384E-016
10^{-8}	-1.3707621499648E-008	-1.370762118117236E-008	-3.18475E-016
0.1	-0.137584665279301	-0.137584665279305	4.21884749357E-015
0.4	-0.535013081857711	-0.535013081857709	-1.77635E-015
0.5	-0.652777665939620	-0.652777665939619	-8.88178E-016
0.6	-0.758179518757917	-0.758179518757916	-1.22124E-015
0.9	-0.971519622786878	-0.971519622786876	-2.22044E-015
$1-10^{-8}$	-0.999999998353808	-0.999999998353809	2.22044604925E-016
$1-10^{-14}$	-0.999999999999998	-0.999999999999998	1.110223024625E-016
$1+10^{-14}$	-0.999999999999998	-0.999999999999998	1.110223024625E-016
$1+10^{-8}$	-0.9999999995279994	-0.999999995279997	3.885780586188E-015
1.1	-0.947027515407809	-0.947027515407803	-5.99520E-015
1.4	-0.718425517119136	-0.718425517119135	-1.33226E-015
1.5	-0.619792030073509	-0.619792030073510	1.443289932012E-015
1.6	-0.510993206384873	-0.510993206384873	-5.55111E-016
1.9	-0.135768608262798	-0.135768608262797	-3.33066E-016
$2-10^{-8}$	-1.3707621751904E-008	-1.370762165002316E-008	-1.01881E-016
$2-10^{-14}$	-1.3871023850682E-014	-1.375792607134274E-014	-1.13097E-016

Таблицы 1 и 2 получены при следующих параметрах n=10000,nh=b (n-число интервалов для отрезка в первом интеграле в (17)), l=45, 45h=t-b –длина правого отрезка в квадратуре Гаусса.

Первый столбец – порядок производной α, второй столбец – аналитическое значение производной Герасимова по формулам (15), (16), третий – численное значение производной по алгоритму (18), (20), (21). Четвертый столбец – разность между аналитическим и численным значениями дробной производной.

Из табл. 1 для функции

$$u(t)=\sin(t), t=\pi/2, \alpha\in[0,2], \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\underset{\alpha\to+0}{\rightarrow}1-0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\underset{\alpha\to1-0}{\rightarrow}+0, -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\underset{\alpha\to2-0}{\rightarrow}-1+0,$$

что соответствует производным $u(t)=\sin(t)$.

Из табл. 2 для функции

$$u(t)=\cos(t), t=\pi/2, \alpha\in[0,2], \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0\rightarrow\alpha=+0$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\rightarrow\alpha=1, -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0\rightarrow\alpha=2-0,$$

что соответствует производным $u(t)=\cos(t)$.

Основные полученные результаты:

1) Впервые получены модифицированные формулы (10), (12), (13) Герасимова–Капуто.
2) С учетом модифицированных формул (10), (12) получен численный алгоритм (18), (20), (21) и доказана корректность алгоритма – **Утверждение 1**.
3) Результаты алгоритма (18)–(21) сравнены с аналитическими формулами (15), (16), невязка вычислений не превышает 10^{-15}.
4) Формулы (20), (21) Утверждения 1 остаются верными при формальной замене в них α на интервале (0,1) на α-1 на интервале (1,2).

Список источников

1. *Корчагина А.Н.* Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1–1(81). С. 65–67. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-14. EDN SECUCD.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. *Бештокова З.В.* Устойчивость и сходимость монотонных разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной и оператором Бесселя / З.В. Бештокова, М.Х. Бештоков // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 3. С. 26–50. EDN GMBWPR.
4. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравне-ния влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского универси-

тета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 2. С. 158–175. DOI 10.35634/vm200202. DNHMCSFN.

5. *Алиева С.Т., Мансимов К.Б.* Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 5–11. DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11. EDN ACKUPX.
6. *Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б.* Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 5–10. DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
7. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Физматлит, 1984. 416 с.
8. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
9. *Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К.* Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности. Новополоцк: ПГУ, 2020. 21 с. URL: hhttps://elib.psu.by/handle/123456789/25335.
10. *Гербер А.Д.* Описание алгоритма приближенного вычисления несобственного интеграла, определяющего значения дробной производной // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Т. Вып. 16. Ярославль: Ярослав. гос. техн. ун-т. 2021. С. 22–31. EDN CYCCAJ.

References

1. Korchagina, A.N. (2014), "The use of fractional derivatives to solve problems in continuum mechanics", *Proceedings of the Altai State University*, no. 1–1(81), pp. 65-67. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-14. EDN SECUCD.
2. Nakhushev, A.M. (2003), "Fractional calculus and its application", *M., FIZMATLIT*, 272 p.
3. Beshtokova, Z., Beshtokov, M.Kh. (2021), "Vstability and convergence of monotone difference schemes that approximate boundary value problems for an integro-differential equation with a time-fractional derivative and the Bessel operator / Z.V. Beshtokova", *Differential equations and control processes*, no. 3, pp. 26-50. EDN GMBWPR.
4. Beshtokov, M.Kh. (2020), "Boundary value problems for the loaded modified fractional order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution", *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 30, no. 2, pp. 158-175. DOI 10.35634/vm200202. EDN HMCSFN.
5. Alieva, S., Mansimov, K.B. (2023), "Toptimality condition of the type of Pontryagin's maximum principle in the problem of controlling linear difference equations of fractional order". *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(63), pp. 5-11. DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11. EDN ACKUPX.
6. Mansimov, K.B., Bakhmedova, Z.H. (2022), "An analogue of the Pontryagin maximum principle in the problem of optimal control of a system of differential equations with the Caputo fractional derivative and a multipoint quality criterion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(58), pp. 5-10. DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
7. Faddeev, D.K. (1984), "Lectures on algebra: Textbook for universities", *M., Science, Fizmatlit*, 416 p.
8. Bakhvalov, N.S., Lapin, A.V., Chizhonkov, E.V. (2010), "Numerical methods in problems and exercises", *M., BINOM, knowledge laboratory*, 240 p.
9. Pastukhov, D.F., Pastukhov, Y.F., Volosova, N.K., Volosov, K.A., Volosova, A.K. (2020), "Calculation of production of the debrief order with hign accuracy", *Novopolotsk, PGU*, 21 p. URL: hhttps://elib.psu.by/handle/123456789/25335.
10. Gerber, A.D. (2021), "Description of the algorithm for approximate calculation of an improper integral that determines the values of the fractional derivative", *Mathematics and natural sciences. theory and practice*: *Interuniversity collection of scientific papers*, *Yaroslavl, Yaroslavl State Technical University*, vol. 16, pp. 22-31. EDN CYCCAJ.

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID: 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, AuthorID: 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического университета (МФТИ) (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID: 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID: 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), pulsar1900@mail.ru, AuthorID: 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St., 5-1, Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St., 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID: 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St., 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, AuthorID: 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow University of Physics and Technology (Institutskiy per., 9, Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID: 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St., 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID: 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St., 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), pulsar1900@mail.ru, AuthorID: 405109.