«Механика»

Научная статья
УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-24-32

Движение гиростата под действием следящего момента силы

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Гиростат движется вокруг неподвижной точки под воздействием сил в псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой (3,1). Результирующий момент системы внешних сил и гиростатический момент заданы относительно координатного орторепера, неизменно связанного с носителем гиростата, и являются постоянными. Приведены три вида движения гиростата, в каждом из которых результирующий вектор-момент сил коллинеарен одной из главных осей инерции гиростата, а гиростатический момент ортогонален этой оси. Методом параметрического интегрирования найдены векторное многообразие угловых скоростей гиростата и поле его фазовых траекторий в пространстве состояний. Интегрирование уравнений движения гиростата выполнено в квадратурах и эллиптических функциях времени.

Ключевые слова: *гиростат; псевдоевклидово пространство; параметрическое интегрирование; интегральное многообразие; поле фазовых траекторий*

Для цитирования: *Макеев Н.Н.* Движение гиростата под действием следящего момента силы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 24–32. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2024-1-24-32.

Статья поступила в редакцию 26.12.2023; одобрена после рецензирования 09.02.2024; принята к публикации 15.03.2024.

«Mechanics»

Research article

The Force Tracking Moment Action on the Gyrostat Motion

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru

Abstract. The gyrostat moves around a fixed point under the forces influence in pseudo-Euclidean space with signature (3,1). The resulting moment of the external forces system and the gyrostatic moment are specified relative to the coordinate orthoreper, invariably associated with the gyrostat carrier, and are constant. Three types of gyrostat motion are given, in each of which the resulting force vector-moment is collinear to of the main axis of the gyrostat inertia, and the gyrostatic moment is orthogonal to this axis. The vector manifold of the gyrostat angular velocities and the field of its phase trajectories in the state space are found with the parametric integration method using. Integration of the gyrostat motion equations is carried out in quadratures and elliptic functions of time.

Keywords: *gyrostat; pseudo-Euclidean space; parametric integration; integral manifold; field of phase trajectories*
For citation: Makeev, N.N. (2024), "The Force Tracking Moment Action on the Gyrostat Motion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 24-32. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-24-32.

The article was submitted 26.12.2023; approved after reviewing 09.02.2024; accepted for publication 15.03.2024.

Введение

Начало исследованиям по динамике твердого тела в неевклидовых пространствах было положено в 1870-х годах работами Э. Шеринга, У. Клиффорда, Р. Хьюза, Ф. Клейна и других авторов. К изучению свойств движения тел в неевклидовых пространствах постоянной кривизны относятся работы Р. Стояновича, А.П. Широкова, М.С. Крюкова. Н.Е. Жуковский в работе [1] отметил, что из множества задач неевклидовой механики примечательна задача, имеющая вполне реальное значение − это задача о движении материальной неизменяемой плоской фигуры по псевдосфере, гомеоморфной плоскости Лобачевского. В этой работе им дана геометрическая интерпретация инерционного движения плоской геометрической фигуры при идеальном (без трения) контакте с псевдосферой. Эта задача в трехмерном евклидовом пространстве однозначно соответствует движению материальной твердой псевдосферической фигуры по неподвижной псевдосфере. При этом все точки этой фигуры должны находиться на действительной сфере псевдоевклидова пространства R_3^1.

Вместе с тем, вследствие существующего гомеоморфизма, данная задача эквивалентна задаче о вращении абсолютно твердого тела (далее − твердого тела) вокруг неподвижного полюса в псевдоевклидовом пространстве R_3^1 с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) − орты заданного координатного орторепера в пространстве R_3^1. Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij} x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j − контравариантные координаты.

Под гиростатом в пространстве R_3^1 в общепринятом смысле понимается гиростат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O − вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов всех точек гиростата имеем $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Открытие к настоящему времени новых физических законов обоснованно и наглядно подтверждает предвидение Н.Е. Жуковского о реальном значении исследований по механике тел в неевклидовых пространствах.

1. Предварительные положения

Введем правые координатные орторепы с общим началом в неподвижном полюсе O: орторепер Γ_0, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиростата, и орторепер $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиростата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Жуковскому) тензора инерции гиростата.

Обозначим: A_j − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными осевыми моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиростата; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее индекс j принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) обозначает всю совокупность заданных значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

На гиростат действует система внешних активных сил с результирующим вектор-моментом $\mathbf{L}$ (L_j), постоянным относительно орторепера Γ. Движение гиростата, происходящее под воздействием данного момента относительно полюса O, определяется эволюционной динамической системой, представленной в проекциях на координатные оси подвижного орторепера Γ [2]:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 + k_2\omega_3 &= L_1, \\ A_2\dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3)\omega_3\omega_1 - k_1\omega_3 - k_3\omega_1 &= L_2, \\ A_3\dot{\omega}_3 - (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 - k_2\omega_1 + k_1\omega_2 &= -L_3. \end{aligned} \tag{1}$$

В уравнениях (1) обозначено: $\mathbf{k}(k_j)$ − постоянный гиростатический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси орторепера Γ; главные осевые моменты инерции гиростата A_1, A_2 − моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2, а момент A_3 − относительно собственной главной оси инерции Ox_3. Моменты инерции гиростата относительно изотропных осей здесь и всюду далее не рассматриваются.

Определение. Движение гиростата, подчиненное системе уравнений (1), при котором вектор-моменты **L**, **k** заданы относительно подвижного (связанного) орторепера Γ, называется его движением под действием следящего момента силы.

Уравнения (1) представляют 9-параметрическую автономную динамическую систему с квадратичной нелинейностью, содержащую инерционные, гироскопические и моментно-силовые параметры.

Целью работы является определение точного интегрального многообразия уравнений движения гиростата в режиме воздействия следящего постоянного момента силы и нахождение поля фазовых траекторий его динамической системы.

Достижение поставленной цели предполагается в следующих трех случаях движения гиростата, определяемых характером динамического воздействия на гиростат.

2. Движение первого рода

Введем ограничения:

$$A_1 < A_2,\ k_1 k_2 \neq 0,\ k_3 = 0,\qquad L_1 = L_2 = 0 \tag{2}$$

и примем условие $L_3 \neq 0$, означающее совместно с условиями (2), что вектор-момент **L** коллинеарен главной оси инерции гиростата, совпадающей с собственной осью Ox_3 орторепера Γ.

Обозначим безразмерные постоянные:

$$n_r = A_r^{-1} A_3, \qquad n_3 = A_1^{-1} A_2,$$
$$l_r = (A_r m)^{-1} k_{3-r} \quad (r = 1, 2),$$
$$m = +\sqrt{\rho(1+n_2)}, \quad \rho = 1 + n_1,$$
$$m_1 = m^{-1}(n_1 + n_3), \quad m_2 = m_1^{-1}$$

и для значений $t \in T = [0, +\infty)$ параметризуем систему уравнений (1) переменной:

$$w = m\int_0^t \omega_3(s)\,ds \tag{3}$$

при условиях (2) и ограничении $\omega_3 \neq 0$. В результате приведения к переменной (3) система уравнений (1), согласно условиям (2), принимает вид

$$\omega_1' + m_1\omega_2 + l_1 = 0,\qquad \omega_2' - m_2\omega_1 - l_2 = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{w} - m[n_p\omega_1\omega_2 + A_3^{-1}(k_2\omega_1 - k_1\omega_2 - L_3)] = 0, \tag{5}$$

где обозначено:

$$n_p = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$$

и штрих здесь обозначает производную функции по переменной w.

Положим:

$$a_1 = -H_1\sqrt{n_1 + n_3}, \quad b_1 = H_1\sqrt{mm_2},\qquad a_2 = \frac{k_1}{A_2 mm_2}, \quad b_2 = \frac{k_2}{A_1 mm_1}. \tag{6}$$

В результате интегрирования системы уравнений (4) находим

$$\omega_1 = a_1 \sin w - a_2,\qquad \omega_2 = b_1\cos w - b_2, \tag{7}$$

где величина $H_1 \neq 0$, содержащаяся в равенствах (6), − постоянная интегрирования. Полагаем, что другая постоянная, не представленная явно в соотношениях (6), (7), содержится аддитивно в выражении для переменной w.

Сопоставим движение гиростата в пространстве конфигураций движению его изображающей точки в фазовом пространстве $\mathbf{\Omega}(\omega_j)$ (далее − в $\mathbf{\Omega}$-пространстве). Из системы уравнений (7) следует соотношение связи:

$$\frac{(\omega_1 + a_2)^2}{a_1^2} + \frac{(\omega_2 + b_2)^2}{b_1^2} = 1. \tag{8}$$

Уравнение (8) в $\mathbf{\Omega}$-пространстве определяет действительный невырожденный эллиптический цилиндр, образующие которого параллельны собственной координатной оси Ox_3 орторепера Γ. Этот цилиндр является несущей поверхностью, содержащей фазовые траектории гиростата и подвижный годограф вектора угловой скорости.

Направляющая цилиндра, расположенная в плоскости его ортогонального сечения, определяется явным уравнением (8) и параметрическими уравнениями (7).

Преобразуем уравнение (5), вводя новую переменную τ равенством

$$d\tau = +\sqrt{mn_p}\, dt. \tag{9}$$

Согласно зависимости (9), уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \omega_1\omega_2 + l(k_1\omega_2 - k_2\omega_1 + L_3) = 0,$$

а в силу соотношений (7) это уравнение принимает форму

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + P(w) = 0, \tag{10}$$

где обозначено

$$P(w) = c_1 \sin w \cos w + c_2 \cos w + + c_3 \sin w + c_4, \tag{11}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} a_1 b_1, \quad c_2 = (a_2 + h_1) b_1, \quad c_3 = (b_2 - h_2) a_1,$$

$$c_4 = a_2 (h_2 - b_2) - b_2 h_1 + l L_3,$$

$$l = (A_3 n_p)^{-1}, \quad h_r = l k_r \ (r = 1, 2).$$

Первый интеграл уравнения (10) имеет вид

$$\frac{dw}{d\tau} = \pm\sqrt{2[D - Q(w)]}, \tag{12}$$

где обозначено

$$Q(w) = c_1 \sin^2 w + c_2 \sin w - - c_3 \cos w + c_4 w,$$

D − постоянная интегрирования. Повторное интегрирование уравнения (12) приводит (с точностью до произвольной постоянной) к зависимости

$$\pm\int \frac{dw}{\sqrt{2[D - Q(w)]}} = \tau. \tag{13}$$

Знак перед интегралом в равенстве (13) выбирается согласно условию $\tau > 0$. Интеграл в этом равенстве не выражается в замкнутом конечном виде через элементарные функции.

Из соотношений (3), (9) следует

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{n_p}{m}}\,\frac{dw}{d\tau},$$

откуда, согласно равенствам (11), (12), получаем

$$\omega_3 = \pm\sqrt{2m^{-1} n_p [D - Q(w)]}, \tag{14}$$

где область действительных значений величины ω_3 и приведенного времени τ соответствует условию $Q(w) < D.$

Выражения (7), (14) определяют систему уравнений подвижного годографа вектора угловой скорости носителя гиростата, представленную в параметрической форме с параметром w.

Для определения фазового портрета динамической системы гиростата рассмотрим поле ее фазовых траекторий на плоскости квазикоординат $(w, dw/d\tau)$. Эта плоскость является разверткой фазового цилиндра (8) при зависимостях (7). Структура фазового портрета системы определяется характерной функцией $P(w)$ (11) − одномерным квазипотенциалом, содержащемся в равенствах (13), (14), и зависящем от величин параметров c_j $(j = 1, \ldots, 4)$.

Введем новый параметр p = tg w и функции этого параметра:

$$F_1(c, p) = \frac{p + c(1 + p^2)}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$F_2(p) = \frac{p^2 - 1}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$\Phi(c, p) = \frac{F_1(c, p) - F_2(p)\, p}{1 + p^2}.$$

Исследуя стандартным приемом математического анализа функцию (11) на наличие характерных и критических точек, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} a p + b &= \pm F_1(c, p), \\ a - b p &= \pm F_2(p), \end{aligned} \tag{15}$$

где обозначено:

$$(a, b, c) = (2c_1)^{-1}(c_2, c_3, c_4).$$

Система уравнений (15) определяет в пространстве безразмерных параметров (a, b, c) сепаратрисную поверхность, разделяющую области с различным числом локальных экстремумов функции $P(w)$. Уравнения этой поверхности в параметрической форме с параметром p имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \pm[\Phi(c, p)\, p + F_2(p)], \\ b &= \pm\Phi(c, p). \end{aligned} \tag{16}$$

Рассматривая сечения поверхности (16) плоскостями вида $c = \mathrm{const}$, определяющими каждую плоскость при фиксированном значении параметра *c*, получим множество сечений − кривых на плоскости координат (a, b), являющееся полем плоских кривых.

3. Движение второго рода

Рассмотрим случай движения гиростата, при котором выполняются условия

$$A_1 < A_2, \quad k_1 k_3 \neq 0, \quad k_2 = 0, \qquad L_1 = L_3 = 0, \quad L_2 \neq 0. \tag{17}$$

Согласно этим условиям, вектор-момент **L** направлен коллинеарно неизотропной (идеальной) оси Ox_2 орторепера Γ. Параметризуем систему уравнений (1) для $t \in T$ переменной

$$u = n \int_0^t \omega_2(s)\, ds \tag{18}$$

при условиях (17) и $\omega_2 \neq 0$.

В результате приведения к переменной (18) подсистема первых двух уравнений (1) в силу условий (17) принимает вид

$$\omega_1' + m_3 \omega_3 + l_3 = 0, \qquad \omega_3' - m_4 \omega_1 + l_4 = 0, \tag{19}$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной *u*.

В соотношениях (18), (19) обозначено:

$$n = \sqrt{n_2^{-1}(n_2+1)(n_3-1)} \quad (n_3 \neq 1),$$

$$m_3 = n^{-1}(n_1 + n_3), \quad m_4 = n^{-1} n_p, \tag{20}$$

$$l_3 = (A_1 n)^{-1} k_3, \quad l_4 = (A_3 n)^{-1} k_1.$$

Согласно равенствам (20) $m_3 m_4 = 1$ и тогда решение системы уравнений (19) принимает вид соотношений (7) с фазовой поверхностью − эллиптическим цилиндром, аналогичным цилиндру (8). В целом данное движение качественно идентично по переменной *u* движению первого рода, в отличие от аналогичного движения в случае евклидова пространства.

4. Движение третьего рода

Исследуем движение гиростата, для которого выполняются условия:

$$A_1 = A_2, \quad L_2 = 0. \tag{21}$$

Согласно первому условию (21) собственная ось координат Ox_3 орторепера Γ совпадает с осью кинетической симметрии гиростата, а второе условие показывает, что вектор-момент **L** расположен в координатной плоскости Ox_1x_3. При этом первое условие (21) отличается от соответствующего условия (2).

Существуют следующие случаи данного движения.

Случай 1 соответствует в дополнение к принятым ограничениям (21) условиям

$$k_3 = 0, \quad L_1 = 0. \tag{22}$$

Согласно ограничениям (21), (22), вектор-момент **L** коллинеарен оси кинетической симметрии гиростата, а гиростатический момент **k** компланарен координатной плоскости Ox_1x_2.

При условиях (21), (22) и ограничении $\omega_3 \neq 0$ для значений $t \in T$ введем переменную:

$$v = \lambda \int_0^t \omega_3(s)\, ds, \tag{23}$$

где $\lambda > 0$ − произвольная безразмерная постоянная.

В результате приведения к переменной (23) первые два уравнения системы (1) принимают вид:

$$\omega_1' + \Phi\, \omega_2 + l_5 = 0, \qquad \omega_2' - \Phi\, \omega_1 - l_6 = 0, \tag{24}$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной *v*, а постоянные определяются равенствами:

$$\Phi = \lambda^{-1} \rho, \qquad (l_5, l_6) = (A_1 \lambda)^{-1} (k_2, k_1). \tag{25}$$

При этом третье уравнение системы (1) идентично уравнению (5), в котором параметр *m* заменен на λ. Это уравнение при $A_1 = A_2$ описывает движение одномерного линейного осциллятора − математического маятника, находящегося под воздействием моментно-силового фактора L_3.

Интегрирование системы уравнений (24) приводит к соотношениям:

$$\omega_1 = H_2 \cos \Phi v - \Phi^{-1} l_6, \qquad \omega_2 = H_2 \sin \Phi v - \Phi^{-1} l_5 \tag{26}$$

с постоянными (25), где $H_2 \neq 0$ − постоянная интегрирования.

Пользуясь произвольностью выбора значений постоянной λ, для дальнейшего положим $\lambda = \rho$ и тогда, согласно равенству (25), имеем $\Phi = 1$.

В силу равенств (26) фазовые траектории системы (24) в $\mathbf{\Omega}$-пространстве расположены на круговом цилиндре радиуса $|H_2|$ с уравнением

$$(\omega_1 + l_6)^2 + (\omega_2 + l_5)^2 = H_2^2, \qquad (27)$$

ось которого параллельна оси кинетической симметрии гиростата.

Из третьего уравнения системы (1), согласно соотношению (23), при условиях (21), (22) получаем

$$\ddot{v} + A_3^{-1} \lambda \, [H_2 U(v) + L_3] = 0, \qquad (28)$$

где функция квазипотенциала

$$U(v) = k_1 \sin v - k_2 \cos v$$
$$(k_1^2 + k_2^2 \neq 0).$$

Уравнение (28) характеризует движение одномерного осциллятора, совершающего маятниковое движение, решение которого известно и представляется в эллиптических функциях времени. Этим решением определяется характер движения изображающей точки динамической системы гиростата по фазовому цилиндру (27).

Случай 2 определяется дополнительными к ограничениям (21) условиями:

$$k_1 = 0, \quad k_2 \neq 0, \quad L_3 = 0. \qquad (29)$$

Согласно ограничениям (21), (29), вектор-момент **L** ортогонален оси кинетической симметрии гиростата, а гиростатический момент **k** компланарен координатной плоскости Ox_2x_3.

Произведем параметризацию системы (1) преобразованием

$$\vartheta = \rho \int_0^t \omega_1(s)\, ds \qquad (30)$$

при условиях (21), (29) и ограничении $\omega_1 \neq 0$ для значений $t \in T$. В результате, согласно равенству (30), второе и третье уравнения системы (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_2' - \omega_3 - l_7 &= 0, \\ \omega_3' - l_8 &= 0, \end{aligned} \qquad (31)$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной ϑ, причем

$$l_7 = (A_1 \rho)^{-1} k_3, \quad l_8 = (A_3 \rho)^{-1} k_2. \qquad (32)$$

В результате интегрирования системы уравнений (31) получаем:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{2} l_8 \vartheta^2 + \mu_2 \vartheta + \mu_3, \\ \omega_3 &= l_8 \vartheta + \mu_1, \end{aligned} \qquad (33)$$

где все μ_j − постоянные интегрирования.

Соотношения (33), (32) являются параметрическими уравнениями фазовой поверхности, несущей подвижный годограф вектора угловой скорости носителя гиростата. Исключая из этих уравнений параметр ϑ, получаем явное уравнение этой поверхности − параболического цилиндра

$$\omega_2 = b_3 \omega_3^2 + b_4 \omega_3 + b_5 \qquad (34)$$

с образующими, параллельными координатной оси Ox_1 репера Г. В уравнении (34) обозначено:

$$b_3 = (2 l_8)^{-1}, \quad b_4 = l_8^{-1} (\mu_2 - \mu_1),$$
$$b_5 = l_8^{-1} \mu_1 \left(\frac{1}{2} \mu_1 - \mu_2 \right) + \mu_3.$$

Согласно преобразованию (23) первое уравнение системы (1) принимает вид

$$\ddot{\vartheta} + \rho[\rho \omega_2 \omega_3 + A_1^{-1} (k_3 \omega_2 + k_2 \omega_3 - L_1)] = 0,$$

и в силу равенств (33) преобразуется в уравнение

$$\ddot{\vartheta} + \sum_{k=0}^{3} p_k \vartheta^k = 0, \qquad (35)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho[A_1^{-1}(k_2 \mu_1 + \mu_3 - L_1) + \rho \mu_1 \mu_3], \\ p_1 &= \rho[A_1^{-1}(\mu_2 + k_2 l_8) + \rho(\mu_1 \mu_2 + \mu_3 l_8], \\ p_2 &= \rho l_8 \left[\frac{1}{2} A_1^{-1} k_3 + \rho \left(\frac{1}{2} \mu_1 + \mu_2 \right) \right], \\ p_3 &= \frac{1}{2} (\rho l_8)^2. \end{aligned} \qquad (36)$$

Вводя новую переменную τ посредством равенства

$$d\tau = \sqrt{p_3}\, dt,$$

и полагая в соотношениях (36) $q_k = p_3^{-1} p_k$ (k = 0, 1, 2), приведем уравнение (35) к виду

$$\frac{d^2 \vartheta}{d \tau^2} + V(\vartheta) = 0, \qquad (37)$$

где

$$V(\vartheta) = \vartheta^3 + q_2\,\vartheta^2 + q_1\vartheta + q_0\,.$$

Для уравнения (37) имеет место первый интеграл:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \pm\sqrt{H - W(\vartheta)}\,, \qquad (38)$$

где квазипотенциальная функция

$$W(\vartheta) = \frac{1}{2}\vartheta^4 + \frac{2}{3}q_2\,\vartheta^3 + q_1\vartheta^2 + 2q_0\,\vartheta,$$

$H -$ постоянная интегрирования.

Интегрирование уравнения (38) приводит к соотношению

$$\pm\int_0^{\vartheta}\frac{ds}{\sqrt{H - W(s)}} = \tau\,, \qquad (39)$$

где знак в левой части выбирается из условия $\tau > 0,$ а область действительных значений τ и величины ϑ соответствует условию $W(\vartheta) < H.$

Обращая равенство (39) в случае, при котором полином W не имеет равных линейных действительных множителей, в результате получаем зависимость с эллиптической функцией Вейерштрасса $\wp$:

$$\vartheta = -\frac{1}{2}q_0\,[\wp(\tau; g_2, g_3) + \frac{1}{12}q_1]^{-1}, \quad (40)$$

где инварианты полинома W определяются равенствами [3, с. 321]:

$$g_2 = q_1^2 - \frac{1}{3}q_0\,q_2 - \frac{1}{2}H\,,$$

$$g_3 = \frac{1}{108}q_1^3 - \frac{1}{36}\left(q_0 q_1 + Hq_2\right)q_2 + $$

$$+\frac{1}{8}q_0^2 + \frac{1}{12}Hq_1\,.$$

Сопоставляя между собой зависимости (30), (40), в результате получаем:

$$\omega_1 = 2(\rho q_0)^{-1}\vartheta^2\sqrt{p_3}\,\wp'(\tau), \qquad (41)$$

где [3, с. 320]

$$\wp'(\tau) = \pm[4\wp^3(\tau) - g_2\,\wp(\tau) - g_3]^{1/2},$$

штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной τ. При этом с точностью до аддитивной постоянной имеем

$$\tau = \sqrt{p_3}\,t \qquad (42)$$

и равенства (41), (42) определяют функциональную зависимость вида $\omega_1(t)$.

Полученные соотношения позволяют исследовать характер фазовых траекторий изображающей точки на плоскости $(v, v'),$ которую можно интерпретировать как развертку в **Ω-**пространстве параболического цилиндра с уравнением (34).

Величины $\vartheta, \omega_1,$ определяемые равенствами (40), (41), выражаются через эллиптическую функцию Якоби sn с применением соотношения связи [3, с. 393]:

$$\wp(\tau) = e_3 + \sigma^2[\mathrm{sn}^2(\sigma\tau)]^{-1}, \qquad (43)$$

где $\sigma = \sqrt{e_1 - e_3}$, а постоянные $e_1 \ge e_2 \ge e_3$ – действительные корни стандартного полинома Вейерштрасса:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3\,.$$

В данном случае равенство (40) представляется в виде:

$$\vartheta = -\frac{1}{2}q_0\,[\sigma^2\,\mathrm{sn}^{-2}(\sigma\,\tau) + e_3 + \frac{1}{12}q_1]^{-1},$$

где модуль функции Якоби

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \qquad (0 < k^2 < 1).$$

В случае кратных корней e_j эллиптическая функция $\wp(\tau)$ вырождается в элементарную функцию.

Заключение

Проведено интегрирование динамической системы гиростата с постоянным гиростатическим моментом, движущегося относительно центра инерции в пространстве R_3^1. Выделено три отдельных случая расположения результирующего вектор-момента внешних сил и гиростатического момента относительно главных осей инерции гиростата.

Установлено, что во всех случаях движения фазовые траектории динамической системы гиростата в пространстве состояний расположены на действительных невырожденных цилиндрических поверхностях либо эллиптического, либо параболического типа. Характер этих траекторий соответствует периодическому режиму движения по переменным ω_1, ω_2 и колебательно-вращательному режиму маятникового типа – по компоненте ω_3. Эти движения существуют в односвязных полуограниченных областях фазового пространства, разделенных регулярной алгебраической сепаратрисной поверхностью.

Задача, аналогичная данной, рассмотрена для случая движения гиростата в евклидовом пространстве в работе [4].

Примененный в настоящей работе метод параметрического интегрирования динамической системы гиростата (как и в статье [4]) ранее был использован Р. Граммелем [5] в задаче об аналогичном движении твердого тела в евклидовом пространстве. Ему принадлежит также идея применения этого приема в задаче о движении тела под действием следящего силового вектор-момента. Такой подход в ряде случаев упрощает точное интегрирование системы уравнений движения с квадратичной нелинейностью. В частности, в результате параметризации первые два нелинейных уравнения системы (1) преобразуются в линейные и принимают вид (4), (19), (24), (31) (см. также [6]). Этот прием эффективен в случаях, при которых не применяются первые интегралы системы уравнений движения или если эти интегралы для данной системы не существуют.

В некоторых случаях применение этого приема не приводит к результату, выраженному в конечном замкнутом виде и представляемого в элементарных функциях (без использования разложений функций в ряды и приближенных методов). В частности, такому случаю соответствует выражение (13). Здесь возможно применение аппроксимации подынтегральной функции полиномом третьей или четвертой степени с последующим сведением интеграла к эллиптической форме. Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, такое представление возможно для всякой непрерывной функции с любой степенью точности.

Предпосылки к постановке задачи рассмотренного типа в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах существенно различны. В задаче для пространства R_3^1 задано только одно ограничение, наложенное на главные моменты инерции гиростата в виде $A_1 < A_2$, тогда как в случае евклидова пространства ограничения заданы в виде $A_1 < A_2 < A_3$ [4]. Вследствие этого для псевдоевклидова пространства не применяется понятие "ось промежуточного момента инерции" гиростата, поскольку в данном случае этой оси не существует, в силу чего характер движения второго рода для каждого из этих пространств коренным образом различен.

Следует отметить, что применение приема Граммеля имеет важное ограничение: параметризуемая компонента угловой скорости гиростата (в частности, величина ω_3 в равенстве (3)) на интервале ее значений должна быть отличной от нуля. Это условие имеет определяющее значение и его нарушение приводит к недостоверности результатов исследования. Однако такое ограничение не применяется и, более того, о нем не упоминается в работах [4; 6, с. 155, 164].

Список источников

1. *Жуковский Н.Е.* О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // Полн. собр. соч.: в 10 т. М.; Л.: ОНТИ. Т. 1. 1937. С. 490−535.
2. *Макеев Н.Н.* Устойчивость перманентных вращений гиростата в пространстве R_3^1// Дифференциальная геометрия: межвуз. науч. сб. Саратов, изд-во Саратовского ун-та, 1979. Вып. 4. С. 150−156.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит. Ч. 2, 1963. 516 с.
4. *Смольников Б.А., Степанова М.В.* Перманентные вращения гиростата с самовозбуждением // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1981. № 3. С. 107−113.
5. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: период. сб. переводов иностр. статей 1958. № 6. С. 145−151.
6. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.

References

1. Zhukovskiy, N.E. (1937), *O dvizhenii materi-al`noy psevdosfericheskoy figury po poverkhnosti psevdosfery* [On the motion of a material pseudo-spherical figure on the surface of the pseudo-dosphere], ONTI, Poln. sobr. soch. v 10 t., T. 1, M., L., Russia. pp. 490-535.
2. Makeev, N.N. (1979), "Ustoychivost` permanentnykh vrashcheniy girostata v prostranstve $R_3^1$", *Differentsial`naya geometriya: mezhvuzovskiy nauchnyy sb.*, vol. 4, pp.150-156.

3. Uitteker, E.T., Vatson, DZh.N. (1963), *Kurs sovremennogo analiza. V 2 ch.* [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, M, Russia. 516 p.
4. Smol`nikov, B.A., Stepanova, M.V. (1981), "Permanent rotations of the gyrostat with self-excitation", *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tvyerdogo tela*, vol. 3, pp.107-113.
5. Grammel, R. (1958), "Theory of asymmetric gyroscope with reactive drive", *Mekhanika: period. sb. perevodov inostr. statey,* vol. 6, pp. 145-151.
6. Magnus, K. (1974), *Giroskop. Teoriya i primenenie* [Gyroscope. Theory and application], Mir, M., Russia. 528 p.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535.