

Научная статья

УДК 532.5

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69

Математическое моделирование нелинейной электроконвекции идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле

Владимир Алексеевич Ильин¹, Михаил Олегович Суханов²

^{1,2} Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ilin1@psu.ru

²mihail.suhanov.2012@mail.ru

Аннотация. В работе проведено математическое моделирование нелинейных электроконвективных режимов идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле горизонтального конденсатора. Исследование проведено с использованием маломодовой модели электроконвекции для случая невесомости. В результате анализа полученных временных зависимостей, их Фурье-спектров, вычислений теплопотока и старших показателей Ляпунова построена карта нелинейных электроконвективных режимов. Определены границы окон периодичности в области хаоса. При выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума.

Ключевые слова: идеальная диэлектрическая жидкость; переменное электрическое поле; электроконвекция; нелинейные режимы; переходы к хаосу

Для цитирования: Ильин В. А., Суханов М. О. Математическое моделирование нелинейной электроконвекции идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 60–69. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69.

Статья поступила в редакцию 20.10.2023; одобрена после рецензирования 15.11.2023; принята к публикации 27.11.2023.

Research article

Mathematical Modeling of Nonlinear Electroconvection of an Ideal Liquid Dielectric in an Alternating Electric Field

Vladimir A. Il'in¹, Michael O. Sukhanov²

¹Perm State University, Perm, Russia

¹ilin1@psu.ru

²mihail.suhanov.2012@mail.ru

Abstract. Mathematical modeling of nonlinear electroconvective regimes of an ideal liquid dielectric in an alternating electric field of a horizontal capacitor is carried out. The study was carried out using a low-mode electroconvection model for the case of weightlessness. As a result of the analysis of the obtained time dependences, their Fourier-spectra, calculations of the heat flow and the higher Lyapunov exponents, a map of nonlinear electroconvective regimes is constructed. The boundaries of the periodicity windows in the chaos region are determined. In the windows of periodicity, chaos occurs according to the Feigenbaum scenario.

Keywords: ideal dielectric fluid; alternating electric field; electroconvection; nonlinear regimes; transitions to chaos



Эта работа © 2023 Ильин В.А., Суханов М.О. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation: *Il'in V. A., Sukhanov M. O. Mathematical Modeling of Nonlinear Electroconvection of an Ideal Liquid Dielectric in an Alternating Electric Field. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):60-69. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69.*

The article was submitted 20.10.2023; approved after reviewing 15.11.2023; accepted for publication 27.11.2023.

Введение

Наличие электрического заряда и его перенос в жидкостях с низкой проводимостью [1–7] оказывают существенное влияние на эволюцию малых возмущений и характер сформировавшихся структур. Существуют разные механизмы зарядообразования и неустойчивости в жидкостях: диэлектрофоретический [3, 4], электрокондуктивный [5] и инжекционный [6, 7]. В жидких диэлектриках с разными механизмами зарядообразования могут формироваться своеобразные конвективные структуры со сложной эволюцией. При диэлектрофоретическом механизме зарядообразования поляризационный заряд образуется при зависимости диэлектрической проницаемости от температуры [1, 2]. Неоднородность диэлектрической проницаемости может вызвать движение в жидкости даже в невесомости. С помощью управления амплитудой и частотой электрического поля можно контролировать конвекцию [3–5].

В работах [3, 4] изучены с использованием маломодовой модели электроконвективные колебания идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле горизонтального слоя при умеренных частотах. В данной работе исследование проведено в более широком диапазоне частот и амплитуд, получены новые интересные результаты.

В работе [5] исследованы с использованием другой маломодовой модели электроконвективные режимы слабопроводящей жидкости с электрокондуктивным механизмом зарядообразования в переменном электрическом поле.

Анализ колебаний в диэлектрических жидкостях важен с точки зрения фундаментальных научных проблем и для различных практических применений в электрогидродинамических устройствах [1, 2].

В настоящей работе исследована эволюция течений; проанализированы и проклассифицированы колебания жидкости при разных амплитудах и частотах внешнего поля; исследованы сценарии возникновения хаоса.

Актуальность этих исследований связана с необходимостью знать законы переходов от периодического поведения к хаотическому поведению в детерминированных нелинейных диссипативных системах, и обратных переходов. В реальных системах этому соответствуют переходы от ламинарного движения к турбулентному движению. Такие переходы встречаются во всех нелинейных системах и являются важной проблемой современных исследователей [8, 9].

Наблюдаемые в настоящей работе синхронное движение и перемежаемость были объектами исследований, например в работах [10, 11].

Существует ряд методов идентификации динамических режимов и определения их характеристик [9].

В данной работе помимо стандартных методов исследования строились Фурье-спектры [9, 12], с помощью алгоритма Бенеттина определялись Ляпуновские показатели [13, 14].

1. Постановка задачи

В работе рассматривается плоский горизонтальный конденсатор с неоднородно нагретой вязкой несжимаемой идеальной диэлектрической жидкостью в переменном вертикальном электрическом поле и поле силы тяжести. Идеальные тепло- и электропроводные границы находятся при $z = -h/2, h/2$ (h – толщина слоя) и нагреты до различной температуры $T(-h/2) = \Theta, T(h/2) = 0$. Здесь T – температура, отсчитываемая от среднего значения, Θ – характерная разность температур. При $\Theta > 0$ будет нагрев снизу. Потенциал электрического поля верхней границы заземлён и равен нулю: $\varphi(h/2) = 0$, а потенциал нижней границы изменяется со временем t гармонически: $\varphi(-h/2) = U \cos(\Omega t)$ (U – напряжение, $\Omega = 2\pi/t_f$ – частота, t_f – период модуляции).

Действующая на единицу объема жидкости электрическая сила, следующая [15]:

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right), \quad (1)$$

где ρ_e – свободный заряд единицы объема, ε – диэлектрическая проницаемость, ρ – плотность жидкости. Кулоновская часть силы (1) в идеальных диэлектриках отсутствует, поскольку в них нет свободного электрического заряда. Третье слагаемое имеет градиентный вид и приводит к переопределению давления в уравнении Навье–Стокса. Движение вызывает только диэлектрофоретическая (вторая) часть силы. Она связана с пространственной неоднородностью диэлектрической проницаемости.

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость линейно зависит от температуры: $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \beta_\varepsilon T)$, где β_ε – положительный температурный коэффициент диэлектрической проницаемости. Тогда действует диэлектрофоретический механизм зарядообразования. Рассматривается электрогидродинамическое приближение, когда магнитные эффекты пренебрежимо малы по сравнению с электрическими эффектами [1]. Влияние инжекции не учитывается. В уравнении теплопроводности вязкая диссипация и джоулев разогрев пренебрежимо малы.

Уравнения электроконвекции идеально жидкого диэлектрика имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \nabla \varepsilon, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\ \rho &= \rho_0 (1 - \beta T), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \beta_\varepsilon T). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} , p , T – поля скорости, давления и температуры, η – динамическая вязкость, χ – коэффициент теплопроводности, β – коэффициент теплового расширения жидкости. В основном, коэффициенты β , $\beta_\varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$ град $^{-1}$.

Уравнения электроконвекции безразмериваются, при этом выбираются безразмерные переменные на основе масштабов: времени – $[t] = \rho_0 h^2 / \eta$, расстояния – $[r] = h$, скорости – $[\mathbf{v}] = \chi / h$, температуры – $[T] = \Theta$, по-

тенциала – $[\varphi] = U \beta_\varepsilon \Theta$, давления – $[p] = \eta \chi / h^2$, частоты – $[\omega] = \rho_0 \Omega h^2 / \eta$.

Равновесное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= 0, \quad T_0 = -z + 1/2, \\ \varphi_0 &= (-z + 1/2) \cos \omega t, \quad \mathbf{E}_0 = \gamma \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь γ – единичный вектор, направленный по вертикали вверх.

Представим все переменные – скорость, температуру, давление, потенциал и напряженность в виде: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathcal{G}$, $p = p_0 + p'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ (штрихи означают отклонения величин от равновесных значений, затем штрихи опускаем).

Тогда безразмерные уравнения электроконвекции примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{Pr}} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + (\operatorname{Ra} + \operatorname{Ra}_\varepsilon \cos^2(\omega t)) \mathcal{G} \gamma + \\ &+ \operatorname{Ra}_\varepsilon \cos(\omega t) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma + \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{Pr} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - \mathbf{v} \gamma + (\mathbf{v} \nabla) \mathcal{G} &= \Delta \mathcal{G}, \\ \Delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \cos(\omega t) &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь использованы безразмерные параметры – число Прандтля Pr , тепловое число Рэлея Ra и электрическое число Рэлея $\operatorname{Ra}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pr} &= \frac{\eta}{\chi \rho_0}, \quad \operatorname{Ra} = \frac{\rho_0 g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \\ \operatorname{Ra}_\varepsilon &= \frac{\varepsilon_0 U^2 (\beta_\varepsilon \Theta)^2}{\eta \chi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из определения электрического числа Рэлея видно, что оно не зависит от направления градиента температуры.

В задаче считается, что на свободных недеформируемых, изотермических границах слоя производная потенциала равна нулю (штрихом обозначена производная по z):

$$z = \pm 1/2: w = w'' = \mathcal{G} = \varphi' = 0. \quad (6)$$

В плоскости слоя задача считается изотропной, используются плоские возмущения, когда $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$.

2. Вывод модели электроконвекции

Используем функцию тока для скорости

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

В ее терминах уравнения электроконвекции примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) &= \text{Ra} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \\ &+ \text{Ra}_\varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \cos^2 \omega t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \cos \omega t \right) + \Delta^2 \psi, \\ \text{Pr} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= \Delta \mathcal{G} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8) \\ \Delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \cos \omega t &= 0. \end{aligned}$$

Тогда граничные условия переписутся:

$$z = \pm 1/2: \psi = \psi'' = \mathcal{G} = \varphi' = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнений (8) используется метод Галеркина, и следующие аппроксимации функций, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} \psi &= A(t) \sin kx \cos \pi z, \\ \mathcal{G} &= B(t) \cos kx \cos \pi z + C(t) \sin 2\pi z, \quad (10) \\ \varphi &= D(t) \cos kx \sin \pi z + E(t) \cos 2\pi z, \end{aligned}$$

где k – волновой вектор, характеризующий периодичность возмущений в плоскости конденсатора, A, B, C, D, E – зависящие от времени амплитуды. Вторые слагаемые в аппроксимациях необходимы, чтобы учесть нелинейность уравнений (8).

При подстановке аппроксимаций (10) в систему уравнений (8) после ортогонализации получают дифференциальные уравнения для амплитуд A, B, C и алгебраические выражения для амплитуд D, E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -(\pi^2 + k^2)A + \frac{k}{\pi^2 + k^2} (\text{Ra} + \text{Ra}_\varepsilon \cos^2 \omega t)B \\ &\quad + \frac{k\pi}{\pi^2 + k^2} \text{Ra}_\varepsilon \cos \omega t D, \\ \text{Pr} \frac{\partial B}{\partial t} &= kA - (\pi^2 + k^2)B - k\pi AC, \quad (11) \\ \text{Pr} \frac{\partial C}{\partial t} &= -4\pi^2 C + \frac{\pi k}{2} AB, \\ D &= -\frac{\pi}{\pi^2 + k^2} B \cos \omega t, \quad E = \frac{C}{2\pi}. \end{aligned}$$

Исключим амплитуду D и перемасштабируем следующие переменные:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \pi k, \quad t \rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)} t, \\ A &\rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, \quad B \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, \quad C \rightarrow \frac{1}{\pi} Z, \quad (12) \end{aligned}$$

тогда получим следующую трехмодовую модель электроконвекции (точка над переменными – производная по t):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\text{Pr} X + \text{Pr}(r + e \cos^2 2\pi vt)Y, \\ \dot{Y} &= -Y + X - XZ, \quad (13) \\ \dot{Z} &= -bZ + XY. \end{aligned}$$

В этих уравнениях вместо циклической частоты использована линейная частота $\omega = 2\pi v$ и введены следующие новые параметры:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\varepsilon}{\text{Ra}_{\varepsilon 0}}, \quad b = \frac{4}{1+k^2}, \\ \text{Ra}_0 &= \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \quad \text{Ra}_{\varepsilon 0} = \frac{\pi^4(1+k^2)^4}{k^4}, \quad (14) \end{aligned}$$

где r и e – нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея; b – геометрический параметр; при $\text{Ra}_0, \text{Ra}_{\varepsilon 0}$ начинается термогравитационная или диэлектрофоретическая конвекция соответственно. Поскольку электрическое число Рэлея всегда положительное, то нормированное электрическое число также всегда положительно ($e > 0$).

Система дифференциальных уравнений (13) является модифицированной моделью Лоренца [9].

Для выявления характера конвекции и определения интенсивности ее теплопереноса вычислялось число Нуссельта (усредненный по времени безразмерный теплопоток) на границах слоя:

$$\text{Nu} = -\frac{k}{2} \int_0^{t_{end}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\pm \frac{1}{2}} dx, \quad \text{Nu} = \frac{qh}{\kappa \Theta}, \quad (15)$$

где q – плотность потока тепла, κ – коэффициент теплопроводности. Усреднение теплопотока делали по большому промежутку времени $t_{end} = N t_f$ (где $N > 100$, t_f – период колебаний):

$$\text{Nu} = 1 + 2 \frac{1}{t_{end}} \int_0^{t_{end}} Z(t) \Big|_{z=\pm \frac{1}{2}} dt. \quad (16)$$

При $Nu = 1$ тепло переносится молекулярным теплопереносом, при $Nu > 1$ возникает конвекция.

3. Результаты исследования

Уравнения (13) решались численно для разных частот и электрических чисел с одинаковыми начальными условиями. Полученные зависимости амплитуд от времени анализировались с помощью Фурье анализа, из которого делались выводы о частотных закономерностях и типе колебаний.

Вычисления были сделаны при следующих значениях параметров: $Pr = 10$, $Ra = 0$ ($r = 0$, это случай невесомости). Тогда критическое значение волнового числа $k = 1$ (при этом геометрический параметр $b = 2$), а электрическое число Рэлея $Ra_{ec} = 16\pi^4 = 1558.6$ [3].

В результате вычислений получены разные типы нелинейных колебаний жидкости: хаотические и периодические. При обобщении результатов получена карта нелинейных режимов электроконвекции на плоскости период модуляции $t_f = 1/\nu$ (обратная частота модуляции) – электрическое число e (рис. 1).

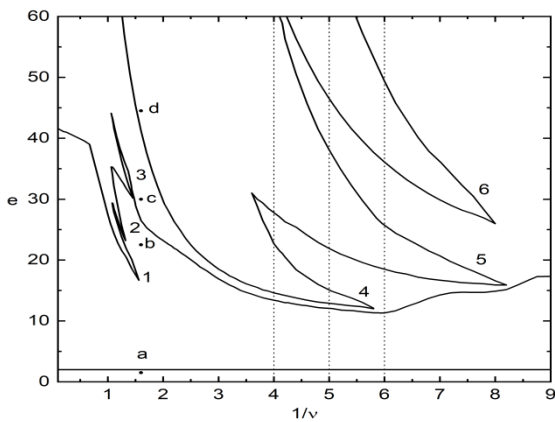


Рис. 1. Карта нелинейных режимов на плоскости период модуляции – электрическое число

Ниже линии $e = 2$ существует область устойчивости. В ней все возмущения затухают (рис. 2), например, в точке a (рис. 1). Выше этой линии возникают периодические колебания.

В постоянном электрическом поле при вычислении с одинаковыми начальными условиями определено, что хаос возникает при $e = 20.9$. Когда частота поля растет, тогда точка возникновения хаоса увеличивается в два раза: $e \rightarrow 41.8$.

На карте режимов (рис. 1) представлены различные области: 1, 2, 3 – области ("языки") хаотических режимов, ниже которых находится область периодических режимов; 4, 5, 6 – области ("языки") периодических режимов в области хаоса.

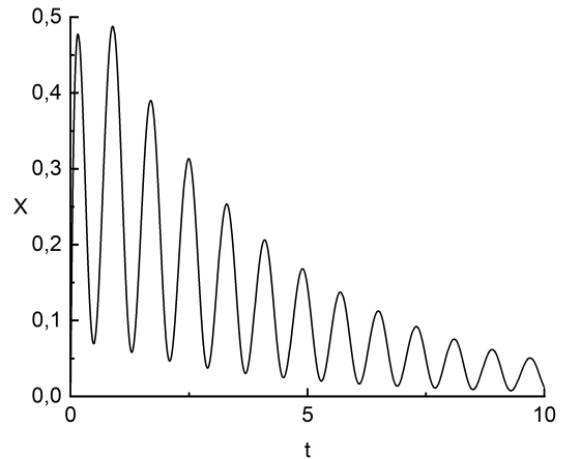


Рис. 2. Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 1.5$ (точка a на рис. 1)

При движении на карте режимов вверх по электрическому числу при заданной частоте через "язык" хаоса 1, мы попадем в периодическую область, затем в "язык" хаоса 2, затем в периодическую область, после чего в "язык" хаоса 3 и т. д. При движении на карте режимов вверх по электрическому числу при меньшей частоте (большем периоде) через область хаоса, мы будем последовательно проходить через "языки" периодических режимов 4, 5, 6. Эти "языки" периодических режимов называют окнами периодичности.

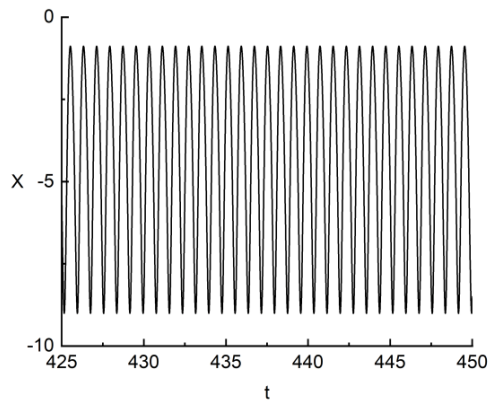
В точках b и d на карте режимов жидкость колеблется периодически (рис. 3, 4).

В этом случае колебания синхронные, в их Фурье-спектрах имеются кратные частоты: $\nu_n = n\nu$ (n – целое число).

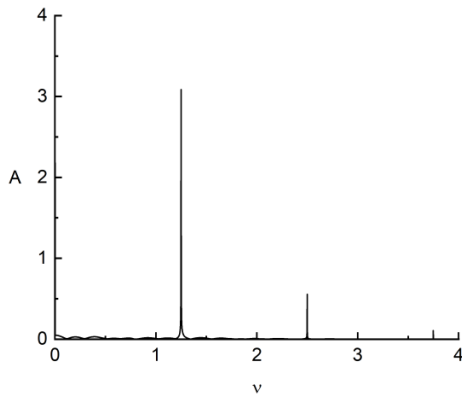
В точке b жидкость колеблется с удвоенной внешней частотой и ее четными гармониками (рис. 3), в спектре есть кратные частоты $n\nu$, $n = 2, 4, \dots$

В точке d жидкость колеблется с внешней частотой и ее нечетными гармониками (рис. 4), $n = 1, 3, \dots$

В точке c на карте режимов функция тока колеблется хаотически, спектр колебаний сплошной (рис. 5).

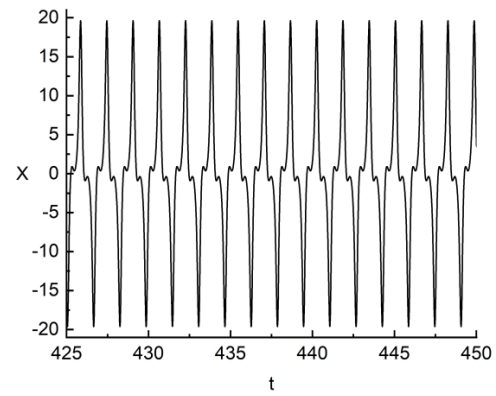


a

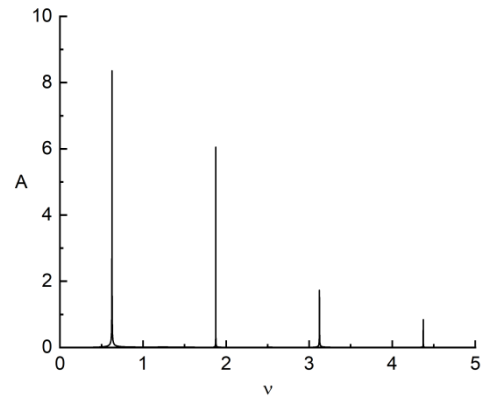


б

Рис. 3. Зависимость амплитуды периодических колебаний от времени (a), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 22.5$ (точка b на рис. 1)



a



б

Рис. 4. Зависимость амплитуды периодических колебаний от времени (a), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 44.5$ (точка d на рис. 1)

Фазовая траектория будет неустойчивой при хотя бы одном положительном показателе Ляпунова. Траектория будет асимптотически устойчивой при всех отрицательных показателях Ляпунова.

На рис. 6(б), 7(б) есть интервалы параметров, соответствующие отрицательному и положительному старшему показателю Ляпунова. Например, показатель положителен для частоты $\nu = 0.625$ на участке $22.5 < e < 41.3$, а для частоты $\nu = 0.25$ на участке $13.5 < e < 14.6$. Это соответствует попаданию в область хаоса.

Аналогичные результаты получаются при вычислении числа Нуссельта для тех же частот (рис. 6(a), 7(a)).

Таким образом, вычислялись показатели Ляпунова и зависимости чисел Нуссельта, в результате чего была построена карта режимов на рис. 1.

На следующем этапе нужно было определить или уточнить сценарии перехода к хаосу. Приведем результаты вычислений для периодов $t_f = 4; 5; 6$. Для этих периодов на карте режимов (рис. 1) изображены вертикальные точечные линии, вдоль которых проводились вычисления.

Был рассмотрен переход к хаосу в "языке" 4, первом окне периодичности, при $t_f = 4$ ($\nu = 0.25$). С ростом электрического числа период колебаний удваивается первый раз при $e_1 = 13.4062$, в спектре появляется частота в два раза меньше ($\nu = 0.125$). Вторая бифуркация удвоения периода происходит при $e_2 = 13.4621$, рождается $\nu = 0.0625$. Третья – при $e_3 = 13.4739$, появляется $\nu = 0.03125$. Постоянная Фейгенбаума определяется по формуле

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k - e_{k-1}}{e_{k+1} - e_k} = 4.669... [8].$$

По первым трем точкам бифуркации была вычислена постоянная Фейгенбаума: $\delta = 4.706$. Погрешность вычисления составила 0.79 %.

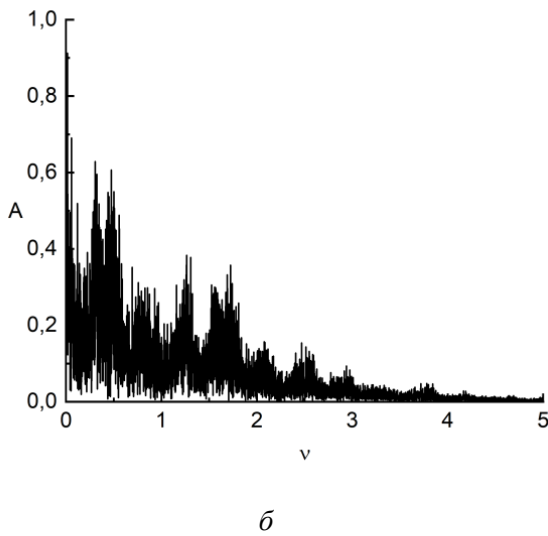
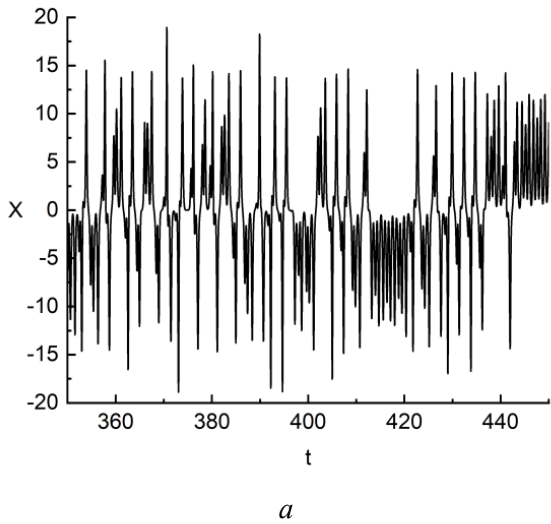


Рис. 5. Зависимость амплитуды хаотических колебаний от времени (а), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 30$ (точка с на рис. 1)

Затем был рассмотрен переход к хаосу в "языке" 5, втором окне периодичности, при $t_f = 5$ ($\nu = 0.2$). Первые бифуркации удвоения периода происходят соответственно при $e_1 = 35.985$, $e_2 = 36.477$, $e_3 = 36.569$.

Константа Фейгенбаума в этом случае равна: $\delta = 5.348$.

При рассмотрении перехода к хаосу в "языке" 6, третьем окне периодичности, при $t_f = 6$ ($\nu = 0.16$) первые три бифуркации удвоения периода получились равными: $e_1 = 47.509$, $e_2 = 47.890$, $e_3 = 47.953$. Постоянная Фейгенбаума равна: $\delta = 6.047$.

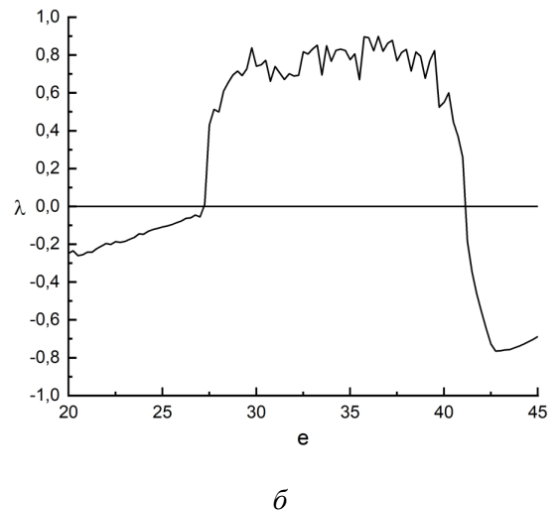
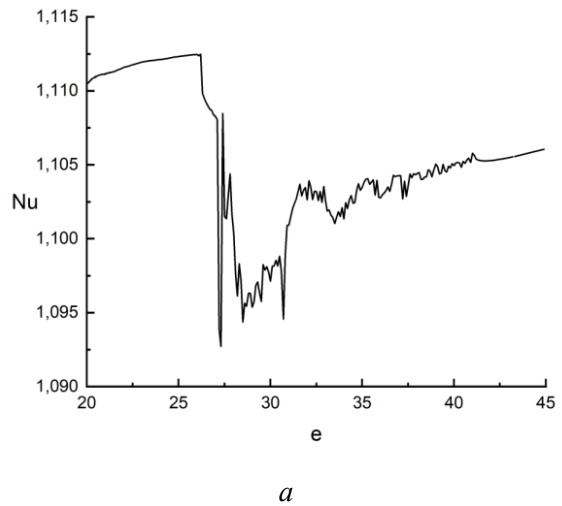


Рис. 6. Зависимость числа Нуссельта от электрического числа при частоте $\nu = 0.625$ (а). Зависимость старшего показателя Ляпунова от электрического числа при частоте $\nu = 0.625$ (б)

В рассмотренных двух последних случаях погрешность вычислений постоянной Фейгенбаума выше, но сценарий тот же.

Вычисления показали, что при выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума.

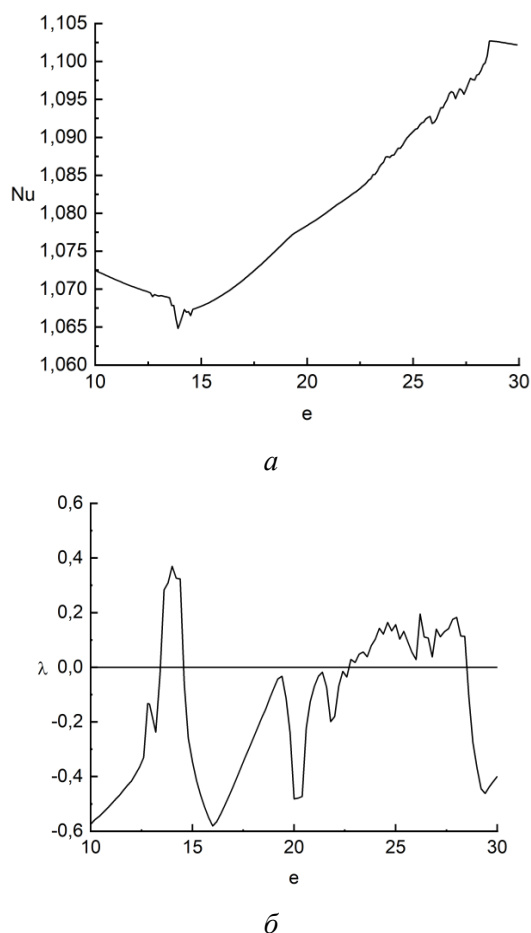


Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта от электрического числа при частоте $\nu = 0.25$ (а). Зависимость старшего показателя Ляпунова от электрического числа при частоте $\nu = 0.25$ (б).

Заключение

В работе было проведено математическое моделирование нелинейной электроконвекции в горизонтальном слое с идеальным жидким диэлектриком. Для исследования использовалась трехмодовая модель. В идеальном диэлектрике в основном работает диэлектрфоретический механизм неустойчивости.

Были получены и исследованы разные хаотические и периодические режимы колебаний жидкости. В невесомости исследование проведено при умеренных и низких частотах электрического поля. С помощью метода Беннеттина вычислялись старшие показатели Ляпунова. На основе определения характера временной эволюции амплитуд задачи, вычислений теплопотока и показателей Ляпунова построена карта режимов электроконвекции. Определены границы окон периодичности в области хаоса при низких частотах элек-

трического поля. Вычисления показали, что при выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума, через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний.

Как известно, модельные свободные границы в задаче Релея–Бенара [9] позволяют в упрощенной постановке изучить движения жидкости в горизонтальном слое. При этом ее качественное поведение по сравнению с твердыми границами сохраняется, понижаются лишь границы переходов между режимами. Полученные в настоящей работе в приближенной постановке движения качественно должны соответствовать решениям задачи в полной постановке, при этом могут быть лишь количественные отличия в результатах.

Список источников

1. *Электроконвекция и теплообмен* / Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Кишинев: Штиинца, 1977. 176 с.
2. *Жакин А.И.* Электрогидродинамика // *Успехи физических наук.* 2012. Т. 182, № 5. С. 495–520.
3. *Ильин В.А., Смородин Б.Л.* Периодические и хаотические режимы электроконвекции жидкого диэлектрика в горизонтальном конденсаторе // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31, вып. 10. С. 57–63.
4. *Ильин В.А.* Маломодовая модель электроконвекции идеального диэлектрика // *Журнал технической физики.* 2010. Т. 80, вып. 8. С. 38–48.
5. *Ильин В.А., Смородин Б.Л.* Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33, вып. 8. С. 81–87.
6. *Ильин В.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда // *Журнал технической физики.* 2017. Т. 87, вып. 1. С. 5–9.
7. *Ильин В.А., Рушинская К.С.* Переходы между электроконвективными режимами слабопроводящей жидкости при инжекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* 2017. Вып. 4 (39). С. 32–37.
8. *Введение в теорию колебаний и волн* / Рабинович М.И., Трубецков Д.И. М.: Наука, 1984. 432 с.

9. *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности* / Берже П., Помо И., Видаль К. М.: Мир, 1991. 368 с.
 10. *Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О., Евстифеев Е.В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, вып. 2. С. 3–6.
 11. *Леманов В.В., Лукашов В.В., Шаров К.А.* Переход к турбулентности через перемежаемость в инертных и реагирующих струях // Известия РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 50–59.
 12. *Лекции по цифровой обработке сигнала* / Мячин М. Л. Ярославль: ЯрГУ, 2004. 203 с.
 13. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 14. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 21–30. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 15. *Электродинамика сплошных сред* / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. М.: Наука, 1982. 736 с.
- ### References
1. *Bologa M.K., Grosu F.P., Kozhuhar' I.A.* Elektrokonvektsiya i teploobmen. Kishinev: Shtiintsa; 1977. 320. (In Russ.).
 2. *Zhakin A.I.* Electrohydrodynamics. *Physics-Uspekhi*. 2012; 55(5):465-488. <https://doi.org/10.3367/ufne.0182.201205b.0495>.
 3. *Il'in V.A., Smorodin B.L.* Periodic and Chaotic Regimes of Liquid Dielectric Convection in a Horizontal Capacitor. *Technical Physics Letters*. 2005;31(5):432-434. <https://doi.org/10.1134/1.1931790>.
 4. *Il'in V.A.* Low Mode Model of Electroconvection of an Ideal Dielectric. *Technical Physics*. 2010;55(8):1113-1123. <https://doi.org/10.1134/S1063784210080062>.
 5. *Il'in V.A., Smorodin B.L.* Nonlinear Regimes of Electroconvection in a Low-Conducting Liquid. *Technical Physics Letters*. 2007;33(4):355-357. <https://doi.org/10.1134/S1063785007040256>
 6. *Il'in V.A.* Electric Convection of Low-Conductivity Liquid in a Horizontal Capacitor in the Presence of Unipolar Charge Injection. *Technical Physics*. 2017;62(1):1-5. <https://doi.org/10.1134/S1063784217010091>
 7. *Il'in V.A., Rushinskaya K.S.* Transitions between electroconvective regimes of a poorly conductive liquid under charge injection in horizontal cells with the different aspect ratio. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2017;39:32-37. (In Russ.).
 8. *Rabinovich M. I., Trubeckov D. I.* Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln. M.: Nauka; 1984. 432. (In Russ.).
 9. *Berzhe P., Pomo I., Vidal' K.* Poryadok v haose. O deterministskom podhode k turbulentnosti. M.: Mir; 1991. 368. (In Russ.).
 10. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Sel'skii A.O., Evstifeev E.V.* A method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of probability of the synchronous regime observation. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(1):45-48. <http://dx.doi.org/10.21883/TPL.2022.01.52468.18985>.
 11. *Lemanov V.V., Lukashov V.V., Sharov K.A.* Transition to Turbulence through Intermittence in Inert and Reacting Jets. *Fluid Dyn.* 2020;55:768-777. <https://doi.org/10.1134/S0015462820060087>.
 12. *Myachin M.L.* Lekcii po cifrovoj obrabotke signala. Yaroslavl': YarGU; 2004. 203. (In Russ.).
 13. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980;15:9-20. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 14. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica*. 1980;15:21-30. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 15. *Landau L.D., Lifshic E.M.* *Elektrodinamika sploshnyh sred*. M.: Nauka; 1982. 736. (In Russ.).

Информация об авторах:

В. А. Ильин – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики фазовых переходов Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID (РИНЦ) 139347;

М. О. Суханов – студент-бакалавр физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15).

Information about the authors:

V. A. Il'in – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Physics of Phase Transitions; Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID 139347;

M. O. Sukhanov – Bachelor student, Faculty of Physics; Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068).