Научная статья
УДК 531- 9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79

К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Приводится аффинное преобразование пространства скоростей системы уравнений движения абсолютно твердого тела, движущегося относительно центра инерции в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны. Движение тела происходит под воздействием системы гироскопических сил и постоянной следящей обобщенной силы, заданной силовым винтом. Структура гироскопических сил задается специальными условиями, содержащими характерные постоянные параметры (гироскопические коэффициенты). Для преобразованной системы уравнений при заданных структурно-кинетических ограничениях проводится редуцирование системы к интегро-дифференциальному уравнению, полученному относительно одной из компонент винта скорости сдвига. Приводится пример точной линеаризации преобразованной системы уравнений.

Ключевые слова: *гиперболическое пространство; абсолютно твердое тело; гироскопические силы; редукция динамической системы; линеаризация системы уравнений*

Для цитирования: *Макеев Н. Н.* К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 70–79. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79.

Статья поступила в редакцию 10.10.2023; одобрена после рецензирования 25.10.2023; принята к публикации 29.11.2023.

Research article

On the Problem of Reducing the Equations of Rigid Body Dynamics in Hyperbolic Space

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru

Abstract. An affine transformation of the space of velocities of the system of equations of motion of an absolutely rigid body is given, moving relative to the center of inertia in a hyperbolic space of constant negative curvature. The movement of the body occurs under the influence of a system of gyroscopic forces and a constant servo generalized force specified by the power screw. The structure of gyroscopic forces is given by special conditions containing characteristic constant parameters (gyroscopic coefficients). For the transformed system of equations under given structural-kinetic constraints, the system is reduced to an integro-differential equation obtained with respect to one of the components of the shear rate screw. An example of exact linearization of the transformed system of equations is given.

Keywords: *hyperbolic space; absolutely rigid body; gyroscopic forces; reduction of a dynamical system; linearization of the system of equations*

For citation: *Makeev N. N.* On the Problem of Reducing the Equations of Rigid Body Dynamics in Hyperbolic Space. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):70-79. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79.

The article was submitted 10.10.2023; approved after reviewing 25.10.2023; accepted for publication 29.11.2023.

Введение

Начало исследованию динамики твердого тела в гиперболическом пространстве было положено в работах, опубликованных в период, начиная с 70-х годов XIX века. Целью этих работ являлась верификация основных положений геометрии Н.И. Лобачевского в применении принципов классической механики Галилея–Ньютона к решению задач динамики твердого тела для неевклидовых пространств.

В 1873 г. У.К. Клиффорд исследовал движение тела в пространстве постоянной положительной кривизны (эллиптическом пространстве Римана) и эти исследования в дальнейшем продолжились. Основой этих разработок явилась геометрическая теория винтов, созданная Р.С. Боллом, конструктивное построение которой было наиболее полно разработано А.П. Котельниковым.

Новый этап в развитии теории динамики твердого тела для гиперболического пространства открылся с публикации работы А.П. Широкова [1], в которой рассмотрен аналог регулярной прецессии тела, существующий в евклидовом пространстве и распространенный на пространство Н.И. Лобачевского. Публикация этой работы вызвала появление ряда новых исследований в области динамики тела в гиперболическом пространстве, а также в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и на плоскости Лобачевского.

К настоящему времени это научное направление продолжает расширяться. Библиография, относящаяся к истории возникновении и развития неевклидовой механики, содержится в работе [2].

1. Предварительные положения

Согласно проективной модели Ф. Клейна [2], пространство Лобачевского (пространство L_3) реализуется внутренними точками абсолюта

$$g_{ij}x^{ij} = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0 \quad (1)$$

гиперболического пространства Γ_3. Здесь g_{ij} – метрический тензор псевдовекторного четырехмерного пространства, рассматриваемого как трехмерное проективное пространство P_3, реализующее пространство L_3. Отобразив точки пространства P_3 на точки гиперсферы псевдоевклидова пространства R_4^1, при решении задач в пространстве Γ_3 применяем тензорный аппарат пространства R_4^1.

Под движением пространства Γ_3 понимается проективное линейное преобразование, переводящее в себя абсолют (1). Поскольку между одночленными группами движений в пространстве Γ_3 и специальными линейными комплексами в пространстве P_3 существует взаимно однозначное соответствие, то движение в пространстве Γ_3, как и в пространстве L_3, можно задавать бивектором пространства R_4^1 [3].

Трехмерное проективное пространство P_3, реализующее пространство L_3, рассматривается как псевдовекторное четырехмерное пространство с метрическим тензором g_{ij} (1). Для отображения винтов в пространстве L_3 здесь применяется правило А. Котельникова–Е. Штуди путем их отображения на комплексные векторы комплексного евклидова пространства [2].

Рассмотрим свободное от связей абсолютно твердое тело, движущееся относительно его центра инерции в гиперболическом пространстве L_3. Пусть $R^0(e_1^0 \dots e_4^0)$ – опорный координатный тетраэдр, автополярный относительно абсолюта (1), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством L_3. Этот неподвижный тетраэдр задается точками $e_j^0\ (j = 1, \dots, 4)$ данного пространства. С твердым телом неизменно свяжем подвижный координатный невырожденный тетраэдр $R(e_1 \dots e_4)$ (тетраэдр инерции тела), заданный точками e_j (j = 1, … , 4), также автополярный относительно абсолюта (1). При этом тетраэдр R выбирается так, чтобы его вершина – точка e_4 тела – была собственной, совпадала с центром инерции тела, и чтобы пространственные ориентации этих тетраэдров совпадали [2].

Положение тетраэдра R и его точек относительно R^0 задается параметрами положения и ориентации по схеме, принятой в работе [2]. Положение точки e_4 задается двумя линейными и одним угловым параметрами, а ориентация тетраэдра R относительно R^0 определяется заданными углами Эйлера.

Таким образом, взаимное положение данных тетраэдров устанавливается упорядоченным набором шести заданных характерных параметров.

Мгновенное состояние тела в пространстве L_3 задается винтом мгновенной скорости $V^{j4}(v^{j4}, \omega^{j4})$ (кинематическим винтом) и винтом мгновенного кинетического момента (винтом импульса или кинетическим винтом) $G^{j4}(B_{j4}v^{j4}, -A_{j4}\omega^{j4})\ (j=1,2,3)$ стержня. Здесь (v^{j4}, B_{j4}) − компоненты скорости сдвига и моменты инерции сдвига тела относительно его главных осей инерции, соответственно; $(\omega^{j4}, A_{j4})\ (j=1,2,3)$ − компоненты скорости вращения и моменты инерции вращения тела относительно тех же осей, соответственно. Определения моментов инерции твердых тел в пространстве L_3 как понятия приведены в работе [1].

В дальнейшем предполагается, что движение твердого тела происходит под воздействием сил с *гироскопической структурой* (по Томсону и Тэту [4, 5]).

Система уравнений движения твердого тела, происходящего под воздействием силового винта внешних сил в пространстве L_3, имеет вид [4]

$$\begin{gathered}B_{14}\dot v^{14} + (A_{34}+B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) + \\ + \lambda^{24}v^{34} - \lambda^{34}v^{24} + \lambda^{12}\omega^{24} - \lambda^{31}\omega^{34} = k^2 m^{14}, \\ A_{14}\dot\omega^{14} + (B_{34}-B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) + \\ + \lambda^{12}v^{24} - \lambda^{31}v^{34} + \lambda^{34}\omega^{24} - \lambda^{24}\omega^{34} = \\ = -k^2 n^{23} \quad (1, 2, 3).\end{gathered} \tag{2}$$

В системе уравнений (2) каждая из двух групп уравнений задана приведенным здесь уравнением-представителем. Остальные уравнения каждой из этих групп могут быть получены из данных путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3 в указанных величинах, что здесь и всюду далее обозначается общепринятым символом (1, 2, 3).

В уравнениях (2) числа $\lambda^{rs}, m^{rs}, n^{rs}$ ($r = 1, 2, 3$; $s = 1, \dots, 4$; $r \neq s$) − заданные постоянные коэффициенты и характерные параметры винта внешних сил, соответственно.

Поскольку мощность силового винта с параметрами λ^{rs} при $m^{rs} = n^{rs} = 0$ тождественно равна нулю, то силы, определяемые этим винтом при данных условиях, являются *гироскопическими*, а параметры λ^{rs} − заданными гироскопическими коэффициентами, обусловливающими гироскопический эффект.

Система уравнений (2) эволюционного типа является многопараметрической и аналитически замкнутой относительно компонент скоростей $v^{i4}, \omega^{i4}\ (i=1,2,3)$ при значениях заданных параметров (m^{rs}, n^{rs}) = const. Эта система может быть интерпретирована как динамическая система гиростата, движущегося в пространстве L_3, с гиростатическими параметрами λ^{rs} [4]. Система уравнений (2) в дальнейшем называется *основной динамической системой* (ОДС).

Из многообразия решений (ω^{j4}, v^{j4}) (j = 1, 2, 3) системы уравнений (2) выделим множество, для которого гипотетически существуют соотношения связи вида

$$\omega^{j4} = n_j v^{j4} + m_j \quad (j=1,2,3), \tag{3}$$

где n_j, m_j − неотрицательные постоянные, подлежащие определению такие, что

$$\prod_{j=1}^{3} n_j \neq 0, \quad \prod_{i,\,j=1}^{3}(n_i - n_j) \neq 0 \quad (i \neq j). \tag{4}$$

Система равенств (3) при условиях (4) может быть геометрически истолкована как невырожденное аффинное преобразование, являющееся композицией центрально-аффинного преобразования с центром, совпадающим с центром инерции тела, и параллельного переноса. При этом постоянные n_j являются коэффициентами центрально-аффинного преобразования, величины m_j − параметрами параллельного переноса, а первое соотношение (4) − условием невырожденности данного преобразования.

Если допустить, что все параметры $n_j = n$, $m_j = 0$, то условия (3) соответствуют винтовому движению тела с параметром винта $n \neq 0$. Второе ограничение (4) исключает существование винтового движения тела из множества возможных движений, определяемого условиями (3).

Ограничения (4) исключают существование двух следующих случаев движения тела. Первый из них, при котором все $n_j = 0$, согласно равенствам (3), соответствует перманентному вращению тела со скоростями $\omega^{j4} = m_j$ (j = 1, 2, 3). Второй случай, при котором все значения $n_j = n_0 \neq 0$, как будет показано далее, предполагает существование центральной структурно-кинетической симметрии тела $(A_{j4} = A, B_{j4} = B;\ j=1,2,3)$, для которого значение величины параметра n является неопределенным.

Ставится задача: применяя невырожденное преобразование (3) с условиями (4), привести ОДС (2) к динамической системе третьего порядка при выполнении определенных ограничений.

Эта формулировка соответствует ограниченной задаче редуцирования ОДС, реализуемой при определенных условиях совместности, построенных для исходной и преобразованной динамических систем.

2. Приведение основной динамической системы

Применяя к уравнениям системы (2) преобразование (3), в результате получаем системы уравнений следующих групп 1 и 2. Уравнения движения группы 1:

$$\begin{aligned} &a_{01}\dot{v}^{14} + a_{11}v^{24}v^{34} + a_{21}v^{24} + \\ &\qquad + a_{31}v^{34} + a_{41} = 0, \\ &a_{02}\dot{v}^{24} + a_{12}v^{34}v^{14} + a_{22}v^{14} + \\ &\qquad + a_{32}v^{34} + a_{42} = 0, \\ &a_{03}\dot{v}^{34} + a_{13}v^{14}v^{24} + a_{23}v^{14} + \\ &\qquad + a_{33}v^{24} + a_{43} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где для коэффициентов a_{ij} имеем:

$$\begin{aligned} &a_{01} = A_{14}n_1, \ a_{11} = (B_{34} - B_{24})(1 + n_2 n_3), \\ &a_{41} = (B_{34} - B_{24})m_2 m_3 + \lambda^{34} m_2 - \\ &\qquad - \lambda^{24} m_3 + k^2 n^{14} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь циклической перестановке подлежат только вторые номера двойных индексов. При этом индексы номеров 0 и 4 здесь и всюду далее в данной перестановке не участвуют. Для остальных коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} &a_{21} = (B_{34} - B_{24})m_3 n_2 + \lambda^{34} n_2 + \lambda^{12}, \\ &a_{22} = (B_{14} - B_{34})m_3 n_1 - \lambda^{34} n_1 - \lambda^{12}, \\ &a_{23} = (B_{24} - B_{14})m_2 n_1 + \lambda^{24} n_1 + \lambda^{31}, \\ &a_{31} = (B_{34} - B_{24})m_2 n_3 - \lambda^{24} n_3 - \lambda^{31}, \\ &a_{32} = (B_{14} - B_{34})m_1 n_3 + \lambda^{14} n_3 + \lambda^{23}, \\ &a_{33} = (B_{24} - B_{14})m_1 n_2 - \lambda^{14} n_2 - \lambda^{23}. \end{aligned} \tag{7}$$

Соотношения (7) имеют сходную форму представления по отношению к характерным показателям системы уравнений (5) − инерционным параметрам B_{j4} , параметрам преобразования (3) n_j, m_j и гироскопическим коэффициентам λ^{rs} $(i, j; r, s = 1, 2, 3; r \neq s)$. Эта особенность отражает симметрическую структуру набора этих характеристик.

Аналогично для группы 2 имеем:

$$\begin{aligned} &b_{01}\dot{v}^{14} + b_{11}v^{24}v^{34} + b_{21}v^{24} + \\ &\qquad + b_{31}v^{34} + b_{41} = 0, \\ &b_{02}\dot{v}^{24} + b_{12}v^{34}v^{14} + b_{22}v^{14} + \\ &\qquad + b_{32}v^{34} + b_{42} = 0, \\ &b_{03}\dot{v}^{34} + b_{13}v^{14}v^{24} + b_{23}v^{14} + \\ &\qquad + b_{33}v^{24} + b_{43} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где коэффициенты b_{ij} определяются как

$$\begin{gathered} b_{01} = B_{14}, \quad b_{11} = (A_{34} + B_{24})(n_2 - n_3), \\ b_{41} = \lambda^{12} m_2 - \lambda^{31} m_3 - k^2 m^{14} \\ (1, 2, 3), \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} &b_{21} = -(A_{34} + B_{24})m_3 + \lambda^{12} n_2 - \lambda^{34}, \\ &b_{22} = (A_{14} + B_{34})m_3 - \lambda^{12} n_1 + \lambda^{34}, \\ &b_{23} = -(A_{24} + B_{14})m_2 + \lambda^{31} n_1 - \lambda^{24}, \\ &b_{31} = (A_{34} + B_{24})m_2 - \lambda^{31} n_3 + \lambda^{24}, \\ &b_{32} = -(A_{14} + B_{34})m_1 + \lambda^{23} n_3 - \lambda^{14}, \\ &b_{33} = (A_{24} + B_{14})m_1 - \lambda^{23} n_2 + \lambda^{14}. \end{aligned} \tag{9}$$

Сопоставляя между собой уравнения групп 1, 2, определяемые системами (5) и (8), получаем условия их совместности:

$$\frac{a_{1j}}{a_{0j}} = \frac{b_{1j}}{b_{0j}} = p \quad (j = 1, 2, 3), \tag{10}$$

$$\frac{a_{2r}}{a_{0r}} = \frac{b_{2r}}{b_{0r}} = p \quad (r = 2, 3), \tag{11}$$

$$\frac{c_{21}}{c_{01}} = \frac{c_{33}}{c_{03}} = p, \tag{12}$$

$$\frac{a_{3r}}{a_{0r}} = \frac{b_{3r}}{b_{0r}} = p \quad (r = 1, 2), \tag{13}$$

$$\frac{a_{4j}}{a_{0j}} = \frac{b_{4j}}{b_{0j}} = p \quad (j = 1, 2, 3), \tag{14}$$

где c − условное обозначение коэффициентов a, b с указанными в равенствах (12) индексами; p − параметр пропорциональности.

Из условий (10)–(14) согласно равенствам (6), (7), (9) следуют соотношения связи, соответственно

$$A_{14}(A_{34}+B_{24})(n_2-n_3)n_1 - \\ - B_{14}(B_{34}-B_{24})(1+n_2n_3)=0 \qquad (15)$$
$$(1, 2, 3),$$

$$(B_{14}-B_{34})m_3n_1 - \lambda^{34}n_1 - \lambda^{12} = A_{24}n_2\,p,$$
$$(B_{24}-B_{14})m_2n_1 + \lambda^{24}n_1 + \lambda^{31} = A_{34}n_3\,p,$$

$$\begin{aligned}(A_{14}+B_{34})m_3 - \lambda^{12}n_1 + \lambda^{34} &= B_{24}\,p,\\ (A_{24}+B_{14})m_2 - \lambda^{31}n_1 + \lambda^{24} &= -B_{34}\,p,\end{aligned} \qquad (16)$$

$$(B_{34}-B_{24})m_3n_2 + \lambda^{34}n_2 + \lambda^{12} = A_{14}n_1\,p,$$
$$(B_{24}-B_{14})m_1n_2 - \lambda^{14}n_2 - \lambda^{23} = A_{34}n_3\,p,$$

$$\begin{aligned}(A_{24}+B_{14})m_1 - \lambda^{23}n_2 + \lambda^{14} &= B_{34}\,p,\\ (A_{34}+B_{24})m_3 - \lambda^{12}n_2 + \lambda^{34} &= -B_{14}\,p,\end{aligned} \qquad (17)$$

$$(B_{34}-B_{24})m_2n_3 - \lambda^{24}n_3 - \lambda^{31} = A_{14}n_1\,p,$$
$$(B_{14}-B_{34})m_1n_3 + \lambda^{14}n_3 + \lambda^{23} = A_{24}n_2\,p,$$

$$\begin{aligned}(A_{34}+B_{24})m_2 - \lambda^{31}n_3 + \lambda^{24} &= B_{14}\,p,\\ (A_{14}+B_{34})m_1 - \lambda^{23}n_3 + \lambda^{14} &= B_{24}\,p.\end{aligned} \qquad (18)$$

В соответствии с условиями (14) имеем

$$\begin{aligned}(B_{34}-B_{24})m_2m_3 + \lambda^{34}m_2 - \\ - \lambda^{24}m_3 + k^2n^{14} &= A_{14}n_1\,p,\\ \lambda^{12}m_2 - \lambda^{31}m_3 - k^2m^{14} &= B_{14}\,p\end{aligned} \qquad (19)$$
$$(1, 2, 3).$$

Если не выполняется второе условие (4), то, согласно ограничениям (15), твердое тело обладает центральной кинетической симметрией, а значение параметра n, как отмечалось ранее, становится неопределенным.

Обозначим

$$J_1 = \frac{B_{14}(B_{34}-B_{24})}{A_{14}(A_{34}+B_{24})} \qquad (1, 2, 3)$$

и положим

$$\prod_{i,\,j=1}^{3}(B_{i4}-B_{j4}) \neq 0 \qquad (i \neq j),$$

что равносильно условию $J_j \neq 0$ (j =1, 2, 3). Это условие исключает наличие центральной кинетической симметрии тела и тогда соотношения (15) представляются в виде

$$n_1(n_2-n_3) - J_1(1+n_2n_3) = 0 \qquad (20)$$
$$(1, 2, 3).$$

Равенства (20) определяют квадратичную зависимость коэффициентов n_j от инерционных параметров тела. Обозначая

$$D_1 = [(1-J_3)n_3]^{-1}[(1+2J_1)n_3^2 + J_1J_3],$$

$$D = D_1^2 + 4J_1,$$

из системы уравнений (20) получаем зависимость вида $n_1(n_3)$:

$$2n_1 = D_1 \mp \sqrt{D}, \qquad (21)$$

где $J_3 \neq 1$ в силу свойства, согласно которому

$$(A_{34}+B_{34})B_{14} \neq B_{24}B_{34} - A_{24}A_{34}.$$

Зависимость (21) определена в ограниченной односвязной области, в которой $D \geq 0$, откуда следует

$$[(1+2J_1)n_3^2 + J_1J_3]^2 + 4J_1[(1-J_3)n_3]^2 \geq 0.$$

Из соотношений (20) следует

$$n_2 = \frac{(D_1 \mp \sqrt{D})n_3 + 2J_1}{D_1 \mp \sqrt{D} - 2J_1n_3} \qquad (22)$$

для области действительных значений параметров при ограничении

$$J_1n_3^2 - D_1n_3 - 1 \neq 0.$$

Поскольку, согласно равенствам (20),

$$n_3 = \frac{J_3(1+n_1n_2)}{n_1-n_2} \qquad (n_1 \neq n_2),$$

то в силу равенств (21), (22) явная зависимость величины n_3 от инерционных параметров тела определяется очевидным образом.

Итак, значения всех параметров n_j, удовлетворяющих условиям (15), определены и в дальнейшем полагаются известными.

Из соотношений совместности − последних равенств (16)–(18) − получаем, соответственно,

$$m_1 = -(A_{14}+B_{34})^{-1}(B_{24}\,p - \lambda^{23}n_3 + \lambda^{14}) \qquad (23)$$
$$(1, 2, 3).$$

Равенства (23) для параметров m_j являются определяющими при известных выражениях, относящихся к величинам λ^{rs}. Внося выражения (23) в остальные уравнения данной системы, представляющие условия совместности систем уравнений (5), (8), в результате получаем следующие соотношения.

Из уравнений системы (17) при условии $\Delta_1 \neq 0$ получаем:

$$\lambda^{14} = \Delta_1^{-1}(c_2F_2 - c_4F_1),$$
$$\lambda^{23} = \Delta_1^{-1}(c_3F_1 - c_1F_2), \qquad (24)$$

где обозначено:

$$c_1 = (A_{14} + B_{34} + B_{24} - B_{14})n_2,$$
$$c_2 = A_{14} + B_{34} + (B_{14} - B_{24})n_2 n_3,$$
$$c_3 = A_{24} + B_{14} - (A_{14} + B_{34}),$$
$$c_4 = (A_{14} + B_{34})n_2 - (A_{24} + B_{14})n_3,$$
$$\Delta_1 = c_1c_4 - c_2c_3,$$
$$F_1 = [A_{34}(A_{14} + B_{34})n_3 + B_{24}(B_{24} - B_{14})n_2]p,$$
$$F_2 = [B_{24}(A_{24} + B_{14}) + B_{34}(A_{14} + B_{34})]p.$$

Аналогичным образом, в силу уравнений системы (16) при условии $\Delta_2 \neq 0$, имеем:

$$\lambda^{24} = \Delta_2^{-1}(g_2F_4 - g_4F_3),$$
$$\lambda^{31} = \Delta_2^{-1}(g_3F_3 - g_1F_4), \qquad (25)$$

где

$$g_1 = A_{34} + B_{24} - (A_{24} + B_{14}),$$
$$g_2 = (A_{24} + B_{14})n_3 - (A_{34} + B_{24})n_1,$$
$$g_3 = [B_{24} - B_{14} - (A_{24} + B_{14})]n_1,$$
$$g_4 = (A_{24} + B_{14})n_3 - (A_{34} + B_{24})n_1,$$
$$\Delta_2 = g_1g_4 - g_2g_3,$$
$$F_3 = [B_{14}(A_{24} + B_{14}) + B_{34}(A_{34} + B_{24})]p,$$
$$F_4 = [B_{34}(B_{24} - B_{14})n_1 + A_{34}(A_{24} + B_{14})n_3]p.$$

Согласно уравнениям системы (16) при ограничении $\Delta_3 \neq 0$ находим:

$$\lambda^{12} = \Delta_3^{-1}(h_2F_6 - h_4F_5),$$
$$\lambda^{34} = \Delta_3^{-1}(h_3F_5 - h_1F_6). \qquad (26)$$

Здесь обозначено:

$$h_1 = (A_{34} + B_{24})n_1 - (A_{14} + B_{34})n_2,$$
$$h_2 = A_{14} + B_{34} - (A_{34} + B_{24}),$$
$$h_3 = A_{34} + B_{24} - (B_{14} - B_{34})n_1n_2,$$
$$h_4 = A_{34} + B_{24} + (B_{14} - B_{34}),$$
$$\Delta_3 = h_1h_4 - h_2h_3,$$
$$F_5 = [B_{14}(A_{14} + B_{34}) + B_{24}(A_{34} + B_{24})]p,$$
$$F_6 = [A_{24}(A_{34} + B_{24})n_2 + B_{14}(B_{14} - B_{34})n_1]p.$$

Итак, равенства (24)–(26) при заданных условиях однозначно выражают величины гироскопических параметров λ^{rs}, где $(r, s) = 1, \ldots, 4$, через моменты инерции тела с точностью до слагаемых, содержащих параметр p. Параметры силового винта m^{j4}, n^{j4} ($j = 1, 2, 3$) определяются равенствами (19), (23) также с точностью до слагаемых, содержащих свободный параметр p.

Первые три уравнения системы (18), не применявшиеся для определения неизвестных параметров, при подстановке в них найденных выражений для соответствующих величин превращаются в тождества.

Таким образом, все неизвестные параметры n_j, m_j преобразования (3), а также условия совместности для величин $\lambda^{ij}, \lambda^{j4}, n^{j4}, m^{j4}$ $(i,\ j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ при заданных ограничениях определены с точностью до величин, содержащих свободный параметр p.

3. Редуцирование приведенной динамической системы

Объединенная система уравнений (5), (8) (совокупность групп 1 и 2) является преобразованной динамической системой третьего порядка с квадратичной нелинейностью. Одна из этих групп уравнений (например, группа 1) принимается за определяющую, а другая применяется для установления условий совместности соответствующих уравнений данных групп.

Уравнения системы (5) при определенных условиях имеют структуру, характерную для динамических уравнений гиростата с постоянным гиростатическим моментом, движущегося относительно центра инерции в евклидовом пространстве R^3. Данная система уравнений с точностью до структурных признаков изоморфна динамической системе Н.Е. Жуковского [6], а модель моментно-силового воздействия на гиростат эквивалентна видоизмененной модели Р. Граммеля [7].

Эта модель реализуется в режиме авторегулирования при воздействии постоянного результирующего момента внешних сил, заданного относительно координатного тетраэдра инерции $R(e_r)$. Отсюда следует, что для данной системы уравнений возможно применение алгоритма редуцирования путем выделения определяющего уравнения для одной из переменных v^{j4}. Применим этот прием к системе уравнений (5), для которой коэффициенты a_{rs} удовлетворяют приведенным выше условиям совместности. При этом предполагается, что для данной системы в общем случае не существуют алгебраические первые интегралы относительно компонент v^{j4} $(j = 1, 2, 3)$.

Введем структурно-кинетические условия симметрии:

$$A_{r4} = A, \quad B_{r4} = B \quad (r = 1, 2), \qquad (27)$$

$$a_{23} \neq 0 \qquad (28)$$

и применим естественно принимаемые ограничения $a_{0j} \neq 0\ (j = 1, 2, 3)$. Равенства (27) определяют кинетическую симметрию тела относительно главной центральной оси инерции (e_4, e_3) координатного тетраэдра инерции R. В этом случае имеем $a_{13} = 0$ и третье уравнение системы (5) становится линейным, причем

$$\begin{aligned} a_{23} &= \lambda^{24} n_1 + \lambda^{31}, \\ a_{33} &= -(\lambda^{14} n_2 + \lambda^{23}), \\ a_{43} &= \lambda^{24} m_1 - \lambda^{14} m_2 + k^2 n^{34}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Поставим задачу: произвести редуцирование системы уравнений (5) путем сведения ее к определяющему уравнению относительно одной из компонент винта скорости сдвига тела при условиях (27), (28).

Выражая из линейного уравнения (5) величину v^{14}, согласно условию (28), получаем

$$v^{14} = -(a_{23})^{-1}(a_{03}\dot{v}^{34} + a_{33}v^{24} + a_{43}), \qquad (30)$$

где коэффициенты a_{r3} (r = 2, 3, 4) определяются равенствами (29).

В силу соотношения (30) и условий (27), (28) из системы уравнений (5) следует:

$$\begin{aligned} &\ddot{v}^{34} + k_1\dot{v}^{24} - k_2 v^{24} v^{34} - \\ &- k_3 v^{24} - k_4 v^{34} - k_5 = 0, \end{aligned} \qquad (31)$$

$$\dot{v}^{24} - f(v^{34})v^{24} = F(\dot{v}^{34}, v^{34}), \qquad (32)$$

где обозначено

$$\begin{gathered} k_1 = (a_{03})^{-1} a_{33}, \quad k_r = m a_{(r-1)1} \quad (r = 2, ..., 5), \\ m = (a_{01} a_{03})^{-1} a_{23}, \quad n = (a_{01} a_{02})^{-1} a_{21} a_{22}, \\ f(v^{34}) = \lambda_1 (a_{12} v^{34} + a_{22}), \\ F(\dot{v}^{34}, v^{34}) = a_{22}\lambda_2 \dot{v}^{34} + (a_{12}\lambda_2 - H_1)v^{34} - H_2, \\ (\lambda_1, \lambda_2) = (a_{33}, a_{03})\rho, \quad \rho = (a_{02}a_{23})^{-1}, \\ (H_1, H_2) = (\sigma_1, \sigma_2)\rho, \qquad (33) \\ \sigma_r = a_{r2}a_{43} - a_{23}a_{(r+2)2} \quad (r = 1, 2). \end{gathered}$$

Рассматривая равенство (32) как уравнение относительно величины v^{24}, получаем

$$v^{24} = \mu(v^{34})\Phi(\dot{v}^{34}, v^{34}), \qquad (34)$$

где обозначено

$$\mu(v^{34}) = \exp \int_0^t f(v^{34}) d\tau, \qquad (35)$$

$$\Phi(\dot{v}^{34}, v^{34}) = v_0^{24} + \int_0^t F(\dot{v}^{34}, v^{34})\mu^{-1}(v^{34}) d\tau,$$

при этом $v_0^{24} = v^{24}(0)$.

Из равенств (31), (33), (34), (35) имеем

$$\begin{aligned} &\ddot{v}^{34} + k_1 F - (\mu k_2 \Phi + k_4) v^{34} + \\ &+ (k_1 f - k_3)\mu\Phi - k_5 = 0. \end{aligned} \qquad (36)$$

Равенство (36) является результирующим интегро-дифференциальным уравнением, содержащим функции $\mu, f, F, \Phi,$ зависящие от $\dot{v}^{34}, v^{34}$. Уравнение (36) может вырождаться в определяющее дифференциальное уравнение относительно функции v^{34}. Это возможно, в частности, при значениях $a_{22} = a_{42} = 0, \quad a_{12}(a_{03} - a_{43}) + a_{23}a_{32} = 0.$

4. Приведение к линейной динамической системе

Рассмотрим пример вырождения системы уравнений (5) в линейную систему. Введем структурно-кинетические условия:

$$A_{j4} = A, \quad B_{j4} = B \quad (j = 1, 2, 3), \qquad (37)$$

к которым присоединим ограничения

$$\lambda^{14} = \lambda^{23} = 0. \qquad (38)$$

Условия (37) выражают кинетическую симметрию тела относительно его центра инерции, а ограничения (38) − перекрестную стабилизацию данных компонент гироскопического винта, действующего на тело. В силу условий (37), (38) имеем $a_{32} = a_{33} = 0$ и из системы уравнений (5) получаем

$$\ddot{v}^{14} + \Omega^2 v^{14} = L, \tag{39}$$

где обозначено

$$\Omega^2 = n + k_4,$$

$$L = (a_{22})^{-1} a_{42} n + (a_{23})^{-1} a_{43} k_4.$$

Здесь a_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, 2, 3)$ − инерционно-кинетические коэффициенты, определяемые равенствами (6), (7).

Обозначим

$$(U_1, U_2) = \lambda^{34}(n_1, n_2) + (\lambda^{12}, \lambda^{12}),$$
$$(U_3, U_4) = \lambda^{24}(n_3, n_1) + (\lambda^{31}, \lambda^{31}).$$

Если выполняется условие

$$(n_2)^{-1} U_1 U_2 + (n_3)^{-1} U_3 U_4 > 0, \tag{40}$$

то уравнение (39) определяет движение проекции фазовой точки на координатную ось 1–4 как гармонического осциллятора с собственной частотой Ω, находящегося под воздействием постоянной моментно-силовой нагрузки *L*. В случае, при котором имеет место условие (40) с противоположным знаком, уравнение (39) при *L* = 0 соответствует движению проекции фазовой точки по той же координатной оси, происходящему под воздействием гипотетической силы отталкивания, линейно зависящей от величины отклонения этой точки.

Полагая решение уравнения (39) известным, выражения для компонент v^{24}, v^{34} определяются из уравнений системы

$$a_{0r}\dot{v}^{r4} + a_{2r} v^{14} + a_{4r} = 0 \quad (r = 2, 3),$$

которая следует из системы (5) при условиях (37), (38).

Данный пример показывает, что движение твердого тела в пространстве L_3 под воздействием заданной моментно-силовой нагрузки относительно его центра инерции при условиях (37), (38) в определенном смысле можно сопоставить с движением гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

5. Приведение интегралов динамической системы

В работе [5] показано, что для ОДС (2) при движении тела по инерции, когда компоненты результирующего винта внешних сил

$$m^{j4} = 0,\ n^{rs} = 0\ (j, r, s = 1, 2, 3;\ r \neq s),$$

существуют алгебраические интегралы

$$I \equiv \sum_{(1\,2\,3)} [B_{14}(v^{14})^2 + A_{14}(\omega^{14})^2] = h^2,$$
$$I_1 \equiv \sum_{(1\,2\,3)} [(B_{14} v^{14} + \lambda^{23})^2 - (A_{14}\omega^{14} + \lambda^{14})^2] = h_1, \tag{41}$$
$$I_2 \equiv \sum_{(1\,2\,3)} (B_{14} v^{14} + \lambda^{23})(A_{14}\omega^{14} + \lambda^{14}) = h_2.$$

В равенствах (41) величины I, I_1, I_2 являются интегралами энергии и кинетического винта, соответственно. При этом величина I_2 представляет собой аналог классического интеграла Э. Нетер [5], существующего для уравнений движения тела в евклидовом пространстве. Символ (1, 2, 3), находящийся под знаком суммы, обозначает суммирование по всем величинам, получаемым циклической перестановкой данных числовых индексов, содержащихся в этих величинах.

Применим к интегралам (41) преобразование (3), предварительно полагая

$$m_j = 0, \quad B_{j4} - A_{j4} n_j > 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$
$$\lambda^{j4} = \lambda^{rs} = 0 \quad (j, r, s = 1, 2, 3;\ r \neq s), \tag{42}$$

и приведем геометрическую интерпретацию преобразованных интегралов.

Обозначим:

$$K_1 = B_{14} + A_{14} n_1^2, \quad N_1 = (B_{14})^2 - (A_{14} n_1)^2$$
$$(1, 2, 3). \tag{43}$$

Преобразованные алгебраические интегралы (41) при условиях (42) в обозначениях (43) имеют вид

$$\sum_{(1\,2\,3)} [K_1 (v^{14})^2] = h^2, \tag{44}$$

$$\sum_{(1\,2\,3)} [N_1 (v^{14})^2] = h_1, \tag{45}$$

$$\sum_{(1\,2\,3)} [A_{14} B_{14} n_1 (v^{14})^2] = h_2. \tag{46}$$

Уравнение (44) в пространстве квазикоординат v^{j4} является каноническим уравнением преобразованного эллипсоида кинетической энергии сдвига с длинами полуосей, равными $(K_j)^{-1/2} h \ (j=1, 2, 3; h>0)$. Здесь каждому фиксированному значению параметра h соответствует единственный определенный уровень энергии сдвига.

Равенство (45) представляет в v-пространстве уравнение поверхности второго порядка, характеризующей согласно условиям (42) модуль преобразованного кинетического винта сдвига тела. Если характерная величина $N_j h_1 > 0$, то эта поверхность является эллипсоидом с длинами полуосей

$$p_j = \sqrt{(N_j)^{-1} h_1} \quad (j=1,2,3).$$

Соотношение (46) истолковывается как уравнение проекции преобразованного кинетического винта сдвига тела на некоторую ось, связанную с осью этого винта.

Линейная связка преобразованных интегралов (44)−(46) в координатном v-пространстве определяет область изменения величин компонент v^{j4}, соответствующую данному набору фиксированных значений параметров h, h_1, h_2.

Аналогичное истолкование интегралов возможно и в общем случае, вне ограничений (42), но оно обладало бы меньшей наглядностью по сравнению с интерпретацией в случае, определяемом этими ограничениями.

Заключение

Установлена принципиальная возможность приведения исходной динамической системы шестого порядка к нелинейной системе третьего порядка. Исходная система как гладкое аналитическое многообразие описывает движение твердого тела относительно центра инерции в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны. Это приведение реализовано при выполнении ряда параметрических ограничений, условий совместности и выполнено с точностью до функций, зависящих от некоторого произвольного независимого параметра.

Приведение системы уравнений с использованием преобразования вида (3) ранее применялось в работе [8] при решении задачи о движении относительно неподвижной точки гиростата в центральном гравитационном поле евклидова пространства R^3.

В этой работе примененное преобразование позволило произвести интегрирование преобразованной системы уравнений движения в квадратурах.

Для приведенной динамической системы в случае осевой структурно-кинетической симметрии тела произведено ее редуцирование к интегро-дифференциальному уравнению для одной из компонент винта скорости сдвига тела. Этот прием способствует нахождению точных частных решений системы в замкнутой конечной форме (без применения разложений функций в ряды и приближенных методов). Как было отмечено: "Для построения точных решений классической задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, сведение этой задачи к одному уравнению имеет принципиальное значение" [9]. Действенность этого положения подтверждается практикой исследований при решении задач классической динамики твердого тела.

Преобразование вида (3) в частном случае, для которого все $m_j = 0$, было применено в работе [10], где рассматривалась задача, аналогичная приведенной в настоящей статье.

Список источников

1. *Широков А.П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196−207.
2. *Крюков М.С.* О движении стержня по инерции в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1964. № 4. С. 86−98.
3. *Крюков М.С.* О движении твердого тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 5. С. 34−39.
4. *Макеев Н.Н.* Устойчивость перманентных движений гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: изд-во Саратов. ун-та. 1981. Вып. 6. С. 58−71.
5. *Макеев Н.Н.* Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского // Математический вестник Вятского государственного университета. 2022. № 1 (24). С. 24−32. DOI: 10. 25730/VSU.0536.22.004.
6. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью: собр. соч. в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 2. С. 152−309.

7. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: периодический сб. переводов иностранных статей. 1958. № 6. С. 145–151.
8. *Харламова Е.И.* Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 733−737.
9. *Харламова Е.И.*, *Мозалевская Г.В.* Интегро-дифференциальное уравнение динамики твердого тела. Донецк: Академия наук УССР. Ин-т прикладной математики и механики, 1986. 296 с.
10. *Макеев Н.Н.* Движение симметричного твердого тела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Перм. ун-т. Пермь, 2010. Вып. 42. С. 46−63.

References

1. *Shirokov A.P.* Vintovaya regulyarnaya pretsessiya v prostranstve Lobachevskogo // Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta. 1963;(123:1):196-207. (In Russ.).
2. *Kryukov M.S.* O dvizhenii sterzhnya po inertsii v prostranstve Lobachevskogo // Izvestiya vuzov. Mathematica. 1964;(4):86-98. (In Russ.).
3. *Kryukov M.S.* O dvizhenii tverdogo tela v prostranstve Lobachevskogo // Izvestiya vuzov. Mathematica. 1967;(5):34-39. (In Russ.).
4. *Makeev N.N.* Ustoychivost permanentnykh dvizheniy girostata v prostranctve Lobachevskogo // Differentsialnaya geometriya. Geometriya // obobshchennykh prostranstv i eye prilozheniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov: izd-vo Saratov. un-ta. 1981;(6):58-71. (In Russ.).
5. *Makeev N.N.* Integraly uravneniy dvizheniya v prostranstve Lobachevskogo // Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta. 2022;(1:24):24-32. DOI: 10.25730/VSU. 0536.22.004. (In Russ.).
6. *Zhukovsky N.E.* O dvizhenii tvyerdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoyu kapel`noyu zhidkost`yu: sobr. soch. v 7 t. M.; L.: Gostekhizdat, 1949. T. 2. S. 152−309. (In Russ.).
7. *Grammel` R.* Teoriya nesimmetrichnogo giroskopa s reaktivnym privodom // Mekhanika: periodicheskiy sb. perevodov inostrannykh statey. 1958. N 6. S. 145-151. (In Russ.).
8. *Kharlamova E.I.* Nekotorye resheniya zadachi o dvizhenii tela, imeyushchego zakreplyennuyu tochku // Prikladnaya matematika I mekhanika. 1965:(29:4):733-737. (In Russ.).
9. *Kharlamova E.I.*, *Mozalevskaya G.V.* Integrodifferentsialnoe uravnenie dinamiki tvyerdogo tela. Donetsk: Akademiya nauk USSR. In-t prikladnoy matematiki i mekhaniki. 1986. 296 s. (In Russ.).
10. *Makeev N.N.* Dvizhenie simmetrichnogo tvyerdogo tela v prostranstve Lobachevskogo // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm. un-t. Perm', 2010;(42):46-63. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев − доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020, IRID: 310401529.

Information about the author:

N. N. Makeev − Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020, IRID: 310401529.