

Научная статья

УДК 519.6: 532.5

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

## ***N*-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости**

**Н. К. Волосова<sup>1</sup>, К. А. Волосов<sup>2</sup>, А. К. Волосова<sup>2</sup>, М. И. Карлов<sup>3</sup>, Д. Ф. Пастухов<sup>4</sup>,  
Ю. Ф. Пастухов<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический университет (МФТИ), Москва, Россия

<sup>4</sup>Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

**Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru**

**Аннотация.** В работе впервые рассматривается возможность  $n$ -кратного ( $n=100,200$ ) расщепления явной разностной схемы для уравнения вихря в системе уравнений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне с вязкой несжимаемой жидкостью и с числом Рейнольдса  $Re=1000$ . Предложенный в работе алгоритм позволяет значительно увеличить максимальный временной шаг за одну итерацию общей задачи и уменьшить в десятки раз общее время расчета. Алгоритм расщепления для явной разностной схемы уравнения вихря эффективен в случае, если время, затраченное программой на цикл расщепления во много раз меньше времени решения общей задачи на одну итерацию. Численно показано, что качественно решение без расщепления совпадает с решением расщепленной схемы (совпадение в пяти значащих цифрах). При этом решение задачи без расщепления не является полностью установившимся (постоянно во времени первые пять значащих цифры после 400000 итераций). Численно показано, что двухслойная и трехслойная явные разностные схемы имеют установившиеся решения с совпадением полей в 11–12 значащих знаках в каждом узле расчетной сетки (скорости, вихря, функции тока) после 21000 итераций.

**Ключевые слова:** численные методы; гидродинамика; метод расщепления; устойчивость; разностные схемы; вихрь; функция тока

**Для цитирования:** Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.  $N$ -кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 12–21. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21.

Статья поступила в редакцию 30.09.2023; одобрена после рецензирования 01.11.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

## **Explicit Difference Scheme $N$ -fold Splitting For the Vortex Equation in a Viscous Incompressible Fluid**

**N.K. Volosova<sup>1</sup>, K.A. Volosov<sup>2</sup>, A.K. Volosova<sup>2</sup>, M.I. Karlov<sup>3</sup>, D.F. Pastuhov<sup>4</sup>, Yu.F. Pastuhov<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Russian University of Transport (RUT MIIT), Moscow, Russia

<sup>3</sup>Moscow University of Physics and Technology (MIPT), Moscow, Russia

<sup>4</sup>Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

**Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru**



Эта работа © 2023 Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Abstract.** This work is the first to consider the possibility of N-fold ( $n=100,200$ ) splitting of an explicit difference scheme for the vortex equation in the system of equations of a hydrodynamic problem in a rectangular cavity with a viscous incompressible fluid and with the Reynolds number  $Re=1000$ . The algorithm proposed in the work allows us to significantly increase the maximum time step per iteration of the general problem and reduce the total calculation time by tens to hundreds of times. The splitting algorithm for the vortex equation explicit difference scheme is effective if the time spent by the program on the splitting cycle is many times less than the general problem on one iterationsolving time. It is shown numerically that the solution without splitting qualitatively coincides with the solution of the split circuit (match to five significant figures). In this case, the solution to the problem without splitting is not completely steady (the first five significant digits are constant in time after 400000 iterations). It is shown numerically that two-layer and three-layer explicit difference schemes have steady-state solutions with fields matching in 11-12 significant signs at each node of the computational grid (velocity, vortex, stream function) after 21000 iterations.

**Keywords:** numerical methods; hydrodynamics; splitting method, stability; difference schemes; vortex; stream function

**For citation:** Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. Explicit Difference Scheme N-fold Splitting for the Vortex Equation in a Viscous Incompressible Fluid. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):12-21. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21.

The article was submitted 30.09.2023; approved after reviewing 01.11.2023; accepted for publication 28.11.2023.

## Введение

Рассматривается гидродинамическая задача для вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной каверне с подвижной крышкой. Данная тестовая задача является полигоном для апробации новых вычислительных методов и алгоритмов, так как имеет в прямоугольной области две особые точки поля скорости [1], [2], [3]. При движении точки наблюдения по левой боковой стороне прямоугольника вверх в угол значение скорости равно нулю. Справа от угла на верхнем отрезке скорость скачком меняется с нуля до единицы и направлена вместе с крышкой вправо. Аналогичная ситуация происходит в верхнем правом углу. В работе предложен алгоритм  $n$ -кратного расщепления явной разностной схемы для уравнения вихря.

В работе Р.П. Федоренко описан [4, с. 137] метод расщепления уравнения в частных производных по физическим направлениям (разделение по слагаемым в общем уравнении). В методе расщепления на каждом дробном временном интервале  $\tau_1 = \tau_0 / n$  использовалось одно и то же уравнение вихря в общем виде, а число дробных шагов (кратность расщепления) было не  $n=2-3$  как в работе [4], а  $n=100, 200$ .

## Постановка задачи

Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области (каверне) с системой уравнений в частных производных, начальными и краевыми условиями для физических полей [1].

Обозначим  $(u(x, y), v(x, y))$  вектор скорости жидкой частицы (на твердой границе – боковых отрезках и на нижнем отрезке прямоугольной каверны скорость равна нулю – условие прилипания частиц жидкости). Также нормальная компонента скорости равна нулю на всей прямоугольной границе. Начало системы координат расположим в нижнем левом углу прямоугольника, направим ось  $y$ -вверх, ось  $x$ -вправо. Ширину прямоугольной каверны обозначим  $L$ , высоту буквой  $H$ .

В гидродинамической задаче в закрытой каверне подвижная верхняя крышка перемещается вправо с постоянной скоростью  $u_{\max}$  характерные масштабы длины  $L$ , времени  $\frac{L}{u_{\max}}$ , скорости  $u_{\max}$ , функции тока  $Lu_{\max}$ , вихря  $\frac{u_{\max}}{L}$ , числа Рейнольдса  $Re$ . Введем безразмерные переменные:  $\bar{x}$  – горизонтальная координата,  $\bar{y}$  – вертикальная координата,  $\bar{\psi}, \bar{w}$  – безразмерные функции тока и вихря соответственно,  $(\bar{u}, \bar{v})$  – вектор безразмерной скорости,  $\bar{t}$  – безразмерное время по формулам

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad Re = \frac{u_{\max} L}{\nu}$$

С безразмерными переменными и функциями запишем систему уравнений гидродинамики [1], [2]:

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{xx} + \overline{\psi}_{yy} = -\overline{w}(x, y), & 0 < \overline{x} = \frac{x}{L} < 1, & 0 < \overline{y} < k_{\max} \\ \overline{w} = \overline{v}_x - \overline{u}_y, \\ \overline{u} = \overline{\psi}_y; \overline{v} = -\overline{\psi}_x, \\ \overline{w}_t + \overline{u} \cdot \overline{w}_x + \overline{v} \cdot \overline{w}_y = \frac{1}{\text{Re}} (\overline{w}_{xx} + \overline{w}_{yy}), & 0 < \overline{t} = \frac{t}{T} \\ \overline{\psi}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}|_{\Gamma_1} = 0, \overline{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma_1$  – объединение боковых сторон и нижнего отрезка,  $\Gamma \setminus \Gamma_1$  – верхний отрезок прямоугольника  $\Gamma$ . Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для неизвестной функции тока и известной функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с четвертым или шестым порядком погрешности [5, 6]. Далее мы опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами.

Вторая строка системы (1) – функция вихря вычисляется через координатные производные поля скорости. Третья строка – компоненты скорости – вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка – уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственно явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника отсутствует вертикальная компонента скорости, а горизонтальная равна нулю на нижнем отрезке и боковых сторонах, а на верхнем отрезке она равна единице.

Кроме двух упомянутых особых точек поля скорости для тестирования алгоритма использовалось сильно нестационарное и завихренное начальное поле скоростей. Оно задавалось нами [2] на равномерной прямоугольной сетке по формуле (2):

$$\begin{cases} u(x_n, y_m) = -u_0(x_n) \left( \frac{y_m}{k} \right) \sin\left( \frac{3\pi y_m}{2k} \right), \\ x_n = nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{k}{n_2}, \\ n = \overline{0}, n_1, m = \overline{0}, n_2, n_1 = n_2 = 100 \end{cases} \quad (2)$$

где профиль (3) горизонтальной компоненты скорости на верхнем отрезке каверны

( $y = k = 1$ ) имел вид симметричной трапеции [2] без особых точек поля скорости:

$$u(x, k) \equiv u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tau}, & 0 \leq x \leq \tau, \tau = \frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{20} \\ 1, & \tau \leq x \leq 1 - \tau, \\ \frac{1-x}{\tau}, & 1 - \tau \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

Аналитически метод  $n$ -кратного расщепления уравнения вихря внутри одного временного интервала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{w^{k+((i+1)/n)} - w^{k+(i/n)}}{\tau_0/n} + u^k \cdot w_x^{k+(i/n)} + v^k \cdot w_y^{k+(i/n)} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^{k+(i/n)} + w_{yy}^{k+(i/n)}), i = \overline{0}, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Система рекуррентных уравнений (4) для вихря с замороженным полем скорости ( $u^k(x, y), v^k(x, y)$ ) состоит из  $n$  дробных шагов  $i = \overline{0}, n-1$ , верхний индекс  $i$  – указывает дробный слой времени в (4), индекс  $k$  – номер целого слоя времени в уравнении вихря в системе (1). Поля скорости, функции тока меняются последовательно, согласно системе (1), в которой поле вихря имеет уже не дробные индексы  $w^{k+i/n}$ , а целые  $w^k$ . В цикле с системой уравнений (4) изменяется только поле вихря  $w^{k+i/n}, i = \overline{0}, n-1$ . Поле скорости скачком изменяется, когда переменная внешнего цикла увеличивается на единицу от  $k$  до  $k+1$  в системе уравнений (1).

Идея решения системы уравнений (4) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений. Дифференциальные операторы по координате в (4) аппроксимированы, как и все уравнения системы (1), а также граничные условия с точностью  $O(h^4)$ , а по времени с точностью  $O(\tau)$ .

Предположим, что система уравнений (1) спектрально устойчива с максимальным временным шагом равным  $\tau_0$ , а система уравнений (4) с максимальным временным шагом  $\tau_0/n$ .

Таким образом, за время  $\tau_0/n$ , решая  $n$  раз уравнение (4), мы получаем уже скачок по времени  $\tau_0$  (в  $n$  раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (1)) и уменьшаем ошибку округления, так как внутри цикла системы (4) не решаем другие уравнения системы (1).

Второе важное преимущество схемы *n*-кратного расщепления уравнения вихря (4) заключается в достижении установившихся конечных полей скорости, вихря и функции тока (15 значащих цифр в каждой точке поля не меняются во времени после 21000 итераций).

Уравнение (4) линейно относительно координатных производных  $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$ . Аппроксимируя каждую производную с порядком  $O(h^4)$ , получим невязку уравнения (4) по координате с той же точностью. Для первой производной на симметричном шаблоне методом неопределенных коэффициентов [5], [6] имеем

$$w_x(0) = \frac{1}{h} \left( \frac{2}{3}(w_1 - w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 - w_{-2}) \right) + O(h^4). \quad (5)$$

Получим аналогичную формулу для второй производной на симметричном шаблоне [5], [6]:

$$w_{xx}(0) = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{5}{2}w_0 + \frac{4}{3}(w_1 + w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 + w_{-2}) \right) + O(h^4). \quad (6)$$

Формулы (5), (6), можно использовать на внутренних узлах, удаленных от сторон прямоугольника не менее чем на два координатных шага сетки.

На первом прямоугольном контуре с узлами, удаленными на один шаг от сторон прямоугольника, получим первую производную (методом м. н. к.) на шаблоне со смещенным центром [5], [6] (индекс -1 имеет узлы сетки на границе прямоугольника):

$$w_x(0) = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{4}w_{-1} - \frac{5}{6}w_0 + \frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{12}w_3 \right) + O(h^4). \quad (7)$$

Аналогично, для второй производной получим формулу (8) на шаблоне со смещенным центром (узел с нулевым индексом расположен на первом прямоугольном контуре, а узел с индексом -1 расположен на границе прямоугольника). Назовем прямоугольник и узлы на нем нулевым прямоугольным контуром [5], [6], [1], [2].

$$w_{xx}(0) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{5}{6}w_{-1} - \frac{5}{4}w_0 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{7}{6}w_2 - \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{12}w_4 \right) + O(h^4) \quad (8)$$

Разложив формулы (5), (6) в ряд Тейлора на центральном шаблоне, получим невязку (центр шаблона с координатой  $x=0$ ):

$$\frac{1}{h} \left( \frac{2}{3}(w_1 - w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 - w_{-2}) \right) = w_x(0) - \frac{1}{30}h^4 w_x^{(5)}(\xi_1), \quad (9)$$

$$\frac{1}{h^2} \left( -\frac{5}{2}w_0 + \frac{4}{3}(w_1 + w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 + w_{-2}) \right) = w_{xx}(0) - \frac{1}{90}h^4 w_{xx}^{(6)}(\xi_2), \quad (10)$$

$$\xi_1, \xi_2 \in (-2h, 2h).$$

Таким образом, для уравнения вихря в системе уравнений (1) во внутренних узлах с учетом формул (9), (10) можно найти невязку (11) на временном слое  $k$  с шагом  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned} & w_t^k + \frac{\tau_0}{2} w_{tt}^k + u^k \cdot \left( w_x(0) - \frac{1}{30}h^4 w_x^{(5)}(\xi_1) \right) + \\ & + v^k \cdot \left( w_y(0) - \frac{1}{30}h^4 w_y^{(5)}(\xi_2) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left( w_{xx}^k + w_{yy}^k - \right. \\ & \left. - \frac{h^4}{90} (w_x^{(6)}(\xi_3) + w_y^{(6)}(\xi_4)) \right), \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (-2h, 2h) \Leftrightarrow \\ & R = \frac{\tau_0}{2} w_{tt}^k - \frac{1}{30}h^4 (u^k w_x^{(5)}(\xi_1) + v^k w_y^{(5)}(\xi_2)) + \\ & + \frac{h^4}{90 \text{Re}} (w_x^{(6)}(\xi_3) + w_y^{(6)}(\xi_4)) = O(\tau_0 + h^4). \quad (11) \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации невязки  $R = O(\tau_0 + h^4)$  сохраняется и на первом прямоугольном контуре согласно формулам (7) и (8).

Рассмотрим спектральную устойчивость разностного уравнения вихря в системе (1) в пределе при быстром движении жидкости (число Рейнольдса  $\text{Re} = 1000$ ) и при медленном вязком течении, например, движении крови в капиллярах  $\text{Re} \rightarrow 0$  [7]. Приведем определение спектральной устойчивости из работы [6, с. 125].

**Определение** [6], [4]. Если при заданном законе стремлении  $\tau, h \rightarrow 0$  существует постоянная  $0 < c < \infty$ , такая, что для всех  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$  справедливо неравенство  $|\lambda(\varphi, \psi)| \leq \exp(c\tau)$ , то спектральный признак выполнен.

В первом случае в (1) при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  пренебрежем диффузией в уравнении вихря. Тогда с центральным шаблоном на внутренних узлах сетки запишем разностное уравнение переноса в системе уравнений (1):

$$\begin{aligned} & \frac{w^{k+1} - w^k}{\tau_0} + u^k \cdot w_x^k + v^k \cdot w_y^k = 0, z_1 = \frac{\tau_0}{h} \Leftrightarrow \\ & w_{m,n}^{k+1} - w_{m,n}^k + z_1 (u_{m,n}^k l_x w_{m,n}^k + v_{m,n}^k l_y w_{m,n}^k) = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$l_x w_{m,n}^k = \frac{2}{3} (w_{m,n+1}^k - w_{m,n-1}^k) - \frac{1}{12} (w_{m,n+2}^k - w_{m,n-2}^k),$$

$$l_y w_{m,n}^k = \frac{2}{3} (w_{m+1,n}^k - w_{m-1,n}^k) - \frac{1}{12} (w_{m+2,n}^k - w_{m-2,n}^k).$$

Подставляя в уравнение (12) функцию возмущения [4]  $w_{m,n}^k = \lambda^k(\varphi, \psi) \exp(i(n\varphi + m\psi))$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$  получим спектральное уравнение (13):

$$\lambda = 1 + iz_1 \left( u_{m,n}^k \left( \frac{4}{3} \sin(\varphi) - \frac{1}{6} \sin(2\varphi) \right) + v_{m,n}^k \left( \frac{4}{3} \sin(\psi) - \frac{1}{6} \sin(2\psi) \right) \right).$$

Рассмотрим задачу на максимум:

$$f(\varphi) = \left| \frac{4}{3} \sin(\varphi) - \frac{1}{6} \sin(2\varphi) \right| \rightarrow \max, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (14)$$

$$f(\varphi) = \frac{|\sin(\varphi)|}{3} |4 - \cos(\varphi)| = \frac{|\sin(\varphi)|}{3} |4 \pm \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)}| < \frac{5}{3}.$$

Обозначив  $x = |\sin(\varphi)|$ ,  $x \in [0, 1]$ , перейдем к задаче

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 \pm \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max, x \in [0, 1]:$$

а) запишем необходимое условие экстремума:

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left( 4 + \sqrt{1 - x^2} + x \left( \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^4 + 12x^2 - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{-3 + \sqrt{24}}{2} = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}, 0 < x = \sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}} < 1$$

$$f_{1\max} = \max_{x \in [0, 1]} \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) = \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) \Big|_{x = \sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}}}{3} \left( 4 + \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}} \right) \approx 1,37222;$$

б) во втором случае

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 - \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left( 4 - \sqrt{1 - x^2} - x \left( \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{1 - x^2} - 1 + 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^4 + 12x^2 - 15 = 0.$$

Но  $x^2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}, 4\sqrt{1 - x^2} = 1 - 2x^2 = 4 - 2\sqrt{6} < 0$

и локальных точек экстремума нет  $x \in (0, 1)$ :

$$f_{2\max} = \max_{x \in [0, 1]} \frac{x}{3} (4 - \sqrt{1 - x^2}) \Big|_{x=1} = \frac{4}{3},$$

$$f_{\max} = \max(f_{1\max}, f_{2\max}) = f_{1\max}.$$

Тогда из (13) получим абсолютное значение:

$$|\lambda| = \sqrt{1 + z_1^2 (u_{m,n}^k f(\varphi) + v_{m,n}^k f(\psi))^2} \leq \sqrt{1 + z_1^2 4(f_{\max})^2} \approx 1 + 2f_{\max}^2 z_1^2 = 1 + 2f_{\max}^2 \tau_0^2 = 1 + 2f_{\max}^2 \left( \frac{\tau_0}{h} \right)^2 = 1 + \tau_0 \left( 2f_{\max}^2 \frac{\tau_0}{h^2} \right).$$

Сравнивая последнее выражение с определением спектрального признака устойчивости получим [5], [6] постоянную с

$$|\lambda| \leq \exp(c\tau_0) \approx 1 + c\tau_0 \Leftrightarrow c = 2f_{\max}^2 \frac{\tau_0}{h^2} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\tau_0}{h^2} = \text{const}.$$

При медленном вязком течении [7]  $\text{Re} \rightarrow 0$  можно пренебречь конвективным переносом, но сохранить слагаемое с диффузией вихря.

Разностная схема для уравнения вихря в (1) на внутренних узлах сетки примет вид

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{\tau_0} = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^k + w_{yy}^k) z_2 = \frac{\tau_0}{\text{Re} h^2},$$

$$w^{k+1} = w^k + z_2 \left( -5w_{m,n}^k + \frac{4}{3} (w_{m,n+1}^k + w_{m,n-1}^k) - \frac{1}{12} (w_{m,n+2}^k + w_{m,n-2}^k) + \frac{4}{3} (w_{m+1,n}^k + w_{m-1,n}^k) - \frac{1}{12} (w_{m+2,n}^k + w_{m-2,n}^k) \right). \quad (15)$$

Подставим в разностную схему (15) функцию возмущения вида [4]:

$$w_{m,n}^k = \lambda^k(\varphi, \psi) \exp(i(n\varphi + m\psi)), i = \sqrt{-1}, \varphi, \psi \in [0, 2\pi],$$

получим спектральное уравнение.

$$\lambda = 1 + z_2 \left( -5 + \frac{8}{3} (\cos(\varphi) + \cos(\psi)) - \frac{1}{6} (\cos(2\varphi) + \cos(2\psi)) \right). \quad (16)$$

Введем вспомогательные переменные:

$$x = \cos(\varphi), y = \cos(\psi), x, y \in [-1, 1], \cos(2\varphi) = -1 + 2\cos^2(\varphi).$$

Перепишем уравнение (16) в виде

$$\lambda(x, y) = 1 + z_2 \left( -5 + \frac{8}{3} (x + y) - \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - 1) \right). \quad (17)$$

Исследуем на экстремум выражение, стоящее в круглых скобках формулы (17):

$$g(x, y) = -5 + \frac{8}{3} (x + y) - \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - 1) \rightarrow \text{extr} \Rightarrow$$

$$g_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - \frac{2}{3} x = 0 \Leftrightarrow x = 4,$$

$$g_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - \frac{2}{3} y = 0 \Leftrightarrow y = 4.$$

Но точка локального экстремума (4,4)  $\notin [-1,1] \times [-1,1]$  функции  $g(x, y)$ . Из симметрии функционала также следует равенство координат в точке экстремума. Поэтому достаточно вычислить функцию  $g(x, y)$  в точках (-1, -1) и (1, 1).

$$g(-1, -1) = -5 + \frac{8}{3}(-1-1) - \frac{1}{3}(1+1-1) = -\frac{32}{3},$$

$$g(1, 1) = -5 + \frac{8}{3}(1+1) - \frac{1}{3}(1+1-1) = 0.$$

Для спектральной устойчивости достаточно, чтобы  $|\lambda(x, y)| \leq 1 \forall x, y \in [-1, 1]$ , то

$$1 - \frac{32}{3}z_2 = 1 + z_2g(-1, -1) = -1 \leq \lambda(x, y) \leq 1 = 1 + z_2g(1, 1),$$

$$\frac{32}{3}z_2 = 2 \Leftrightarrow z_2 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}, z_2 \in \left[0, \frac{3}{16}\right]. \quad (18)$$

Таким образом, если уравнение переноса спектрально устойчиво для любого закона:

$\frac{\tau_0}{h^2} = const$ , то разностное уравнение (15) с диффузионным членом спектрально устойчиво только на отрезке  $z_2 \in \left[0, \frac{3}{16}\right]$ .

Или  $z_2 = \frac{\tau_0}{Re h^2} \leq \frac{3}{16} \Leftrightarrow \tau_0 \leq \frac{3}{16} Re h^2 (*)$ .

В формуле (\*) шаг  $\tau_0$  максимальный (соответствует верхней границе спектральной устойчивости) в задаче (1). На практике реальный шаг времени разностной схемы  $\tau_1 = \tau_0/n$  много меньше  $\tau_0$  из-за решения других уравнений системы в (1) и 2 особых точек поля скорости.

Обозначим реальный шаг

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{n}, n\tau_1 \leq \frac{3}{16} Re h^2 \equiv \tau_0.$$

Видно, что при достаточно большой кратности расщепления  $n$  явной разностной схемы (4) с шагом  $\tau_1$  всегда можно выполнить условие  $n\tau_1 \leq \frac{3}{16} Re h^2$ .

Отметим, что поиск новых значений вихря в цикле (4) проводится только для внутренних узлов, то есть для узлов первого прямоугольного контура и узлов, расположенных дальше от границы прямоугольника.

Граничные значения вихря со вторым порядком погрешности приведены в работах

[1], [2] в системе (19). На границе прямоугольника в (19) значения функции вихря связаны с граничными значениями функции тока и компонентами скорости [1], [2].

$$\left\{ \begin{aligned} W^{k+1}_{m,0} &= \frac{7\psi^{k+1}_{m,0} - 8\psi^{k+1}_{m,1} + \psi^{k+1}_{m,2}}{2h_1^2} - 3\frac{V^{k+1}_{m,0}}{h_1}, \\ W^{k+1}_{m,n_1} &= \frac{7\psi^{k+1}_{m,n_1} - 8\psi^{k+1}_{m,n_1-1} + \psi^{k+1}_{m,n_1-2}}{2h_1^2} + 3\frac{V^{k+1}_{m,n_1}}{h_1}, \\ m &= \overline{1, n_2 - 1} \\ W^{k+1}_{0,n} &= \frac{7\psi^{k+1}_{0,n} - 8\psi^{k+1}_{1,n} + \psi^{k+1}_{2,n}}{2h_2^2} + 3\frac{u^{k+1}_{0,n}}{h_2}, \\ W^{k+1}_{n_2,n} &= \frac{7\psi^{k+1}_{n_2,n} - 8\psi^{k+1}_{n_2-1,n} + \psi^{k+1}_{n_2-2,n}}{2h_2^2} - 3\frac{u^{k+1}_{n_2,n}}{h_2}, \\ n &= \overline{1, n_1 - 1}, \\ W^{k+1}_{0,0} &= \frac{W^{k+1}_{0,1} + W^{k+1}_{1,0}}{2}, W^{k+1}_{n_2,n_1} = \frac{W^{k+1}_{n_2,n_1-1} + W^{k+1}_{n_2-1,n_1}}{2}, \\ W^{k+1}_{0,n_1} &= \frac{W^{k+1}_{0,n_1-1} + W^{k+1}_{1,n_1}}{2}, W^{k+1}_{n_2,0} = \frac{W^{k+1}_{n_2,1} + W^{k+1}_{n_2-1,0}}{2}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Оценим время решения задачи (1) в трех случаях.

В первом случае (алгоритм А) система уравнений (1) решается последовательно, алгоритм расщепления ( $n = 1$ ) в системе уравнений (4) не используется, временной шаг ( $\tau_1 = \tau_0/n = \tau_0$ ).

Во втором случае (алгоритм В) уравнение вихря (4) решается на двухслойной схеме с кратностью расщепления  $n = 100$ . В алгоритме С  $n = 200$  и трехслойная схема по времени. Программы алгоритмов А, В, С запускались одновременно и заметного временного различия для достижения выбранного числа итераций (внешней переменной цикла  $k$ ) не обнаружено (из-за простоты явной разностной схемы (4)). Но если для наступления стационарного режима в алгоритме В было достаточно 1,5 часа работы программы, то для алгоритма А стационарный режим не был достигнут после двух суток работы программы. Тогда  $(\tau_A/\tau_B) \sim (3/16)/(1/300) = 56$  (рис. 2).

На рис. 1 показано поле линий тока для решения задачи с кратностью  $n = 1$  (отсутствие расщепления). Видно, что спустя 6000 шагов времени поле линий тока находится далеко от стационарного состояния. Центральный вихрь первого порядка обменивается моментом импульса с вихрями второго порядка, расположенных в нижних правом и левом углах прямоугольной каверны.

В работе [3] авторы А.А. Фомин и Л.Н. Фомина также получили численно стационарное решение задачи (1) и вихри трех порядков.

В работе Фоминых большее разрешение сетки  $2500 \times 2500$  ( $Re > 10000$ ), число ячеек в нашей сетке  $100 \times 100$  (и  $Re = 1000$  – в 10 раз меньше). Хотя нестационарный вихрь третьего порядка обнаружен нами на рис. 1.

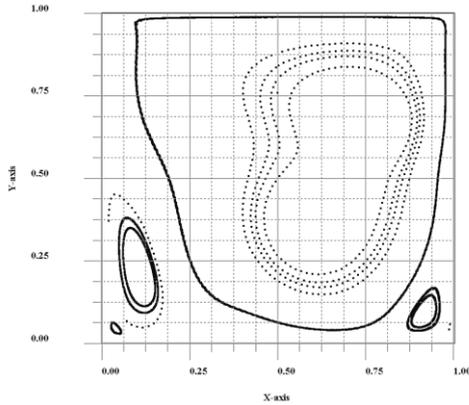


Рис. 1. Поле линий тока для решения задачи (1) без расщепления ( $n=1$ )  $Re=1000$ .

$$\text{Шаг времени } \tau = \frac{h^2 Re}{300}, n_1 = n_2 = 100, \\ h = 1/100 \text{ в момент } t = 6000 \tau$$

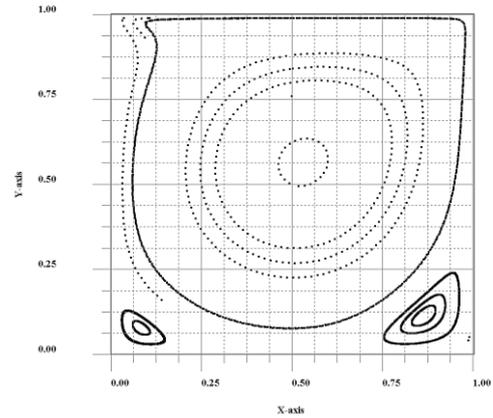
На рис. 2 показаны поля линий тока в предельных стационарных состояниях.

Рис. 2(А) соответствует решению задачи (1) без расщепления.

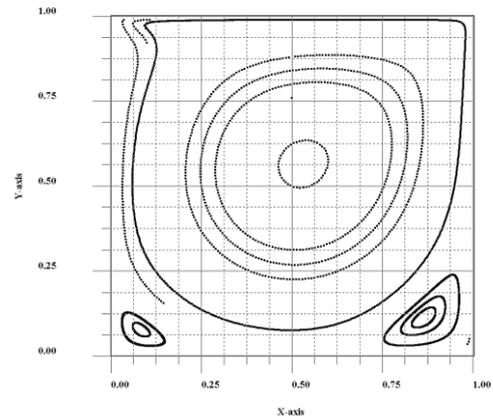
Рис. 2(В) соответствует решению задачи (4) с расщеплением  $n=100$  с двухслойной аппроксимацией производной по времени  $\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+i/n}}{\tau_0/n}$  и первым порядком погрешности  $O(\tau_1)$ , стационарное состояние достигается спустя  $N=21000$  итераций, после чего max и min значения функции тока сохраняются с 15 значащими цифрами.

Третий рисунок (рис. 2(С)) соответствует стационарному решению с трехслойной временной производной  $\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+(i-1)/n}}{2\tau_0/n}$  и со вторым порядком погрешности  $O(\tau_1^2)$  и с кратностью расщепления  $n=200$ .

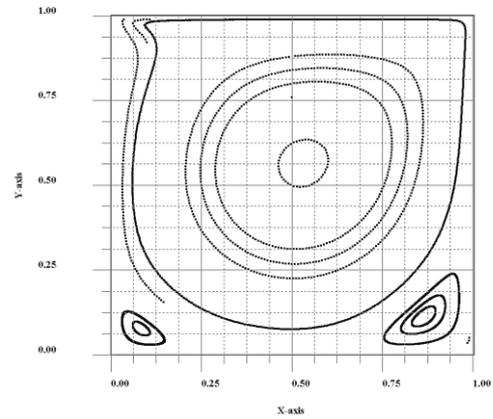
Поле тока становится стационарным спустя  $N=43000$  итераций.



А



В



С

Рис. 2. Установившееся поле линий тока для задачи (1), число Рейнольдса  $Re=1000$ ,  $n$  – кратность расщепления,  $\tau_1 = \tau_0/n$ .

$$\text{Рис. 2(А). } \tau_1 = \tau_0 = \frac{h^2 Re}{300}, t = 400000 \tau, n = 1;$$

$$\text{Рис. 2(В). } \tau_0 = \frac{3}{16} h^2 Re, t = 21000 \tau_0, n = 100;$$

$$\text{Рис. 2(С). } \tau_0 = \frac{3}{16} h^2 Re, t = 43000 \tau_0, n = 200$$

Общими показателями решения (1) являются максимальное и минимальное значение поля функции тока, поскольку все остальные поля можно получить через дифференциальные операторы от поля функции тока (как видно из задачи (1)).

Рассмотрим  $\max$  и  $\min$  значения функции тока в предельном (стационарном) состоянии решения задачи (1) для трех случаев:

**Таблица 1.** Сравнение значащих цифр в стационарном поле функции тока в задаче (1) для различных алгоритмов

Алгоритм	$\Psi_{\max}$	$\Psi_{\min}$
А) $n=1$	$1,71588 \cdot 10^{-3}$	-0,1183079
В) $n=100$	$1,715838733007 \cdot 10^{-3}$	-0,1183038468
С) $n=200$	$1,715838733009 \cdot 10^{-3}$	-0,1183038468

Примечание:

А)  $n=1$  (2-х слойная схема),  $N=400000$ ; В)  $n=100$  (2-х слойная схема),  $N=21000$ ; С)  $n=200$  (3-слойная схема),  $N=43000$

**Таблица 2.** Сравнение значащих цифр в нескольких точках стационарного поля горизонтальной компоненты скорости в задаче (1) для трех алгоритмов

Алгоритм	A:n=1	B:n=100	C:n=200
$\Gamma_1$	$3,258389 \cdot 10^{-2}$	$3,2583974148269 \cdot 10^{-2}$	$3,2583974148257 \cdot 10^{-2}$
$\Gamma_2$	$-9,77215 \cdot 10^{-2}$	$-9,7722656155239 \cdot 10^{-2}$	$-9,7722656155180 \cdot 10^{-2}$
$\Gamma_3$	$-1,73242 \cdot 10^{-2}$	$-1,732417602921899 \cdot 10^{-2}$	$-1,732417602922225 \cdot 10^{-2}$

Анализ  $\Psi_{\min}$ ,  $\Psi_{\max}$  показывает, что два разных алгоритма: В – двухслойная схема по времени с расщеплением  $n=100$ ; С – трехслойная временная схема с  $n=200$  дают одинаковые предельные решения, в которых стационарные  $\Psi_{\min}$ ,  $\Psi_{\max}$  совпадают в 11–12 значащих цифрах (табл. 1). То же можно сказать о горизонтальной компоненте и стационарного поля скорости в нескольких, но одних и тех же узлах сетки – совпадение в 11–12 значащих цифрах (табл. 2). Поэтому рис. 2(В) и рис. 2(С) неразличимы графически.

Решение без расщепления (алгоритм А) и решения с расщеплением (алгоритмы В, С) совпадают в 5 значащих цифрах.

Основные полученные результаты:

- 1) Впервые предложен алгоритм (4)  $n$ -кратного расщепления ( $n=100, 200$ ), явной разностной схемы для уравнения вихря в десятки раз ускоряющий время решения гидродинамической задачи.
- 2) В предельных случаях с большими и малыми числами Рейнольдса показано, что для спектральной устойчивости разностной схемы уравнения вихря следует выбирать закон [5], [6] стремления к нулю  $\tau_0, h$ .  

$$\tau_0 = O(h^2), \tau_0, h \rightarrow 0, n\tau_1 \leq \frac{3}{16} h^2 \text{Re} = \tau_0.$$
- 3) Решения с расщеплением в системе уравнений (1) и шагом времени  $\tau_0 = \frac{3}{16} h^2 \text{Re}$  соответствуют верхней границе спектральной устойчивости. Спектральная устойчивость с  $\tau_0$  подтверждена численно.
- 4) Предложена двухслойная временная схема для уравнения вихря с аппроксимацией  $O(\tau + h^4)$ .

**Список источников**

1. Salih A. Streamfunction – Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
2. Сборник статей по гидродинамике / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова [и др.]. 2-е изд. М.: МИИТ, 2023. 231 с. EDN: UDVEDI.
3. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 363–377.
4. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие для вузов / Р.П. Федоренко; Федоренко Р.П.; под ред. и с доп. А.И. Лобанова. 2-е изд., испр. и доп. Долгопрудный (Моск. обл.): Изд. дом Интеллект, 2008. 503 с. (Физтеховский учебник). ISBN 978-5-91559-011-2. EDN: QJUAEP.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие для студ. физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; Мос. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. 7-е изд. М.: Бином. Лаб. знаний, 2011. 636 с. (Классический университетский учебник). ISBN 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL

6. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ, 2010. 240 с.
7. *Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В.* Моделирование "пульсирующих" режимов динамики свертывания крови. Математическое моделирование. 2014. Т 26, № 12. С. 14–32.
4. *Fedorenko R.P.* Vvedenie v vychislitel'nyuyu fiziku: ucheb. posobie dlya vuzov / R.P. Fedorenko; Fedorenko R.P.; pod red. i s dop. A.I. Lobanova. 2-e izd., ispr. i dop. Dolgoprudnyj (Mosk. obl.): Izd. dom Intellect; 2008. 503 p. (Fiztekhovskij uchebnyk). ISBN 978-5-91559-011-2. EDN: QJUAEP. (In Russ.).

## References

1. *Salih A.* Streamfunction – Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. P. 10.
2. *Sbornik statej po gidrodinamike / N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova [i dr.].* 2-e izd. М.: МИТ; 2023. 231 p. EDN: UDVEDI. (In Russ.).
3. *Fomin A.A., Fomina L.N.* CHislennoe modelirovanie techeniya zhidkosti v ploskoj kaverne pri bol'shix chislah Rejno'l'dsa. Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. 2014;(7(4):363-377. (In Russ.).
5. *Bahvalov N.S.* CHislennye metody: ucheb. posobie dlya stud. fiz.-mat. special'nostej vuzov. Mos. gos. un-t im. M.V. Lomono-sova. 7-e izd. Moskva: Binom. Lab. Znaniy; 2011. 636 p. (Klassicheskij universitetskij uchebnyk). ISBN 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL. (In Russ.).
6. *Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V.* CHislennye metody v zadachah i uprazhneniyah. М.: BINOM; 2010. 240 p. (In Russ.).
7. *Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V.* Modelirovanie "pul'sirubshchih" rezhimov dinamiki svyortyvaniya krovi. Matematicheskoe modelirovanie. 2014;(26(12)):14–32. (In Russ.).

## Информация об авторах:

*Наталья Константиновна Волосова* – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), [navalosova@yandex.ru](mailto:navalosova@yandex.ru);

*Константин Александрович Волосов* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), [konstantinvolosov@yandex.ru](mailto:konstantinvolosov@yandex.ru), AuthorID 128228;

*Александра Константиновна Волосова* – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), [alya01@yandex.ru](mailto:alya01@yandex.ru), AuthorID 607500;

*Михаил Иванович Карлов* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического университета (МФТИ) (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), [karlov@shade.msu.ru](mailto:karlov@shade.msu.ru), AuthorID 14680;

*Дмитрий Феликсович Пастухов* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru), AuthorID 405101;

*Юрий Феликсович Пастухов* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [pulsar1900@mail.ru](mailto:pulsar1900@mail.ru), AuthorID 405109.

**Information about the authors:**

*Natalya K. Volosova* – Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5-1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, Russia, 105005), [navalosova@yandex.ru](mailto:navalosova@yandex.ru);

*Konstantin A. Volosov* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9-9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russia, 127994), [konstantinvolosov@yandex.ru](mailto:konstantinvolosov@yandex.ru), AuthorID 128228;

*Aleksandra K. Volosova* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (9-9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russia, 127994), [alya01@yandex.ru](mailto:alya01@yandex.ru), AuthorID 607500;

*Mikhail I. Karlov* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow University of Physics and Technology (9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), [karlov@shade.msu.ru](mailto:karlov@shade.msu.ru), AuthorID 14680;

*Dmitriy F. Pastukhov* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), [dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru), AuthorID 405101;

*Yuriy F. Pastukhov* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), [pulsar1900@mail.ru](mailto:pulsar1900@mail.ru), AuthorID 405109.