Научная статья
УДК 517.977
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35

Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений

Геннадий Григорьевич Иванов[1], Геннадий Викторович Алфёров[2], Владимир Степанович Королёв[3]

[1, 2, 3]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
[1]guennadi.ivanov@gmail.com
[2]g.alferov@spbu.ru
[3]v.korolev@spbu.ru

Аннотация. Найдены условия, позволяющие определять как верхнюю, так и нижнюю оценки для числа почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого опрядка. Рассмотрены вопросы существования и устойчивости этих решений.

Ключевые слова: *производное число; периодические решения; почти периодические решения; негладкий анализ; производные Дини–Гёльдера*

Для цитирования: *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 22–35. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35.

Статья поступила в редакцию 26.07.2023; одобрена после рецензирования 26.10.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Study of Almost Periodic Solutions of Differential Equations

Gennadiy G. Ivanov[1], Gennady V. Alferov[2], Vladimir S. Korolev[3]

[1, 2, 3]St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia
[1]guennadi.ivanov@gmail.com
[2]g.alferov@spbu.ru
[3]v.korolev@spbu.ru

Abstract. Conditions and found that allow to determine both the upper and lower bounds for almost periodic solutions of ordinary differential equations of the first order. Reviewed questions of the existence and stability of these solutions.

Keywords: *derived number; periodic solutions; almost periodic solutions; nonsmooth analysis*

For citation: *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Study of Almost Periodic Solutions of Differential Equations. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):22-35. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35.

The article was submitted 26.07.2023; approved after reviewing 26.10.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

Различают два класса колебательных процессов – периодические и непериодические. В теории и практике существенное значение имеет промежуточный класс – почти периодические колебания.

Почти периодические колебания – это колебания, близкие к периодическим, которые слагаются из гармоник с несоизмеримыми периодами. Процесс, который состоит из суммы двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, также является почти периодическим колебанием.

Теория почти периодических колебаний начала развиваться в работах латвийского математика П.Г. Боля, датского математика Х.А. Бора и др.

П.Г. Боль заложил основы теории почти периодических функций и теории квазипериодических функций, доказал теорему о разложимости квазипериодических функций в ряд Фурье и теорему о квазипериодической функции [1].

Научные работы Харальда Бора относятся в основном к теории функций, он внес большой вклад в развитие теории почти периодических функций [2]. Именем Харальда Бора названы равномерные почти периодические функции.

Фундаментальные результаты в теории периодических и почти периодических колебаний получены в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [3], Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко, В.А. Плисса и др. [4–5].

Во многих задачах классической механики, небесной механики, робототехники и мехатроники встречаются процессы, в которых зависимость от времени не является периодической, а выражается посредством тригонометрических сумм.

В связи с этим возник интерес к исследованиям почти периодических решений дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [6–12, 36].

В последние годы встал вопрос об изучении почти периодических функций в робототехнике [13–29], динамических системах [30, 33–35], теории устойчивости [10, 14–18, 42–43], в частности, в системах управления космическими объектами [33–41].

Верхняя оценка числа почти периодических решений

Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

есть непрерывная на R^2 функция.

Теорема 1. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть возрастающая по x функция, причем существует момент t^* такой, что $f(t^*, x)$ строго возрастает, то уравнение (1) может иметь не более одного почти периодического решения.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, и пусть, напротив, уравнение (1) имеет два почти периодических решения $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$, начинающихся при $t = 0$ в точках x_1 и x_2 соответственно. Учитывая почти периодичности решений, нетрудно показать, что решения $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$ не пересекаются, и, следовательно, не нарушая общности, можно считать, что при всех t

$$\phi(t, x_1) < \phi(t, x_2). \tag{2}$$

Тогда, в силу монотонности функции f, при всех t будет справедливо неравенство

$$f(t, \phi(t, x_1)) \le f(t, \phi(t, x_2)), \tag{3}$$

а при $t = t^*$, в силу строгого возрастания функции $f(t^*, x)$ и ввиду неравенства (2), будет

$$f(t^*, \phi(t^*, x_1)) < f(t^*, \phi(t^*, x_2)). \tag{4}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $t^* > 0$. Выберем произвольное $T > t^*$.

Тогда

$$\int_0^T [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))]dt = \delta > 0. \tag{5}$$

Действительно, в силу (3) $\delta \ge 0$, а из непрерывности функции f следует, что неравенство (4) выполняется в некоторой окрестности точки t^*, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\delta)$.

По предположению, функции $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$ почти периодические и, следовательно, имеют общий ε-почти период.

Отсюда, существует $\omega' \geq T$ такое, что

$$|\phi(\omega', x_1) - x_1| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |\phi(\omega', x_2) - x_2| \leq \varepsilon.$$

Тогда, с одной стороны, из (1), с учетом (3) и (5), имеем

$$[\phi(\omega', x_2) - x_2] - [\phi(\omega', x_1) - x_1] =$$
$$\int_0^T [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))]dt +$$
$$\int_T^{\omega'} [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))]dt \geq \delta.$$

С другой стороны,

$$[\phi(\omega', x_2) - x_2] - [\phi(\omega', x_1) - x_1] \leq$$
$$|\phi(\omega', x_2) - x_2| + |\phi(\omega', x_1) - x_1| \leq$$
$$2\varepsilon < \delta.$$

Полученное противоречие и доказывает, что уравнение (1) не может иметь двух различных почти периодических решений.

Теорема 2. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть выпуклая по x функция, причем существует момент t^* такой, что $f(t^*, x)$ строго выпуклая, то уравнение (1) может иметь не более двух почти периодических решений.

Доказательство. Пусть выполнены условия утверждения, и пусть, напротив, уравнение (1) имеет три почти периодических решения $\phi(t, x_i)$, $i = 1, 2, 3$, начинающихся в точках x_1, x_2, x_3 при $t = 0$. В рассматриваемой ситуации уравнение (1) обладает свойством существования и единственности решений, и потому будем считать, что при всех t

$$\phi(t, x_1) < \phi(t, x_2) < \phi(t, x_3). \qquad (6)$$

Выпишем два очевидных тождества, которые ввиду (6) имеют смысл при всех t:

$$\frac{\dot\phi(t, x_3) - \dot\phi(t, x_2)}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)} = \frac{f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)}$$

и

$$\frac{\dot\phi(t, x_2) - \dot\phi(t, x_1)}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)} = \frac{f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)}.$$

Выберем произвольное $T > t^*$, как отмечалось в доказательстве теоремы 1, можно считать, что $t^* > 0$, и проинтегрируем эти равенства в пределах от 0 до T.

Тогда получим два новых тождества:

$$P(T) = \ln \frac{\phi(T, x_3) - \phi(T, x_2)}{x_3 - x_2} =$$
$$\int_0^T \frac{f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)} dt$$

и

$$Q(T) = \ln \frac{\phi(T, x_2) - \phi(T, x_1)}{x_2 - x_1} =$$
$$\int_0^T \frac{f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)} dt.$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем

$$\begin{aligned} &P(T) - Q(T) = \\ &\int_0^T [(f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))) \\ &(\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2))^{-1} - \\ &(f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))) \\ &(\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1))^{-1}]dt. \end{aligned} \qquad (7)$$

Представим решение $\phi(t, x_2)$ в виде:

$$\phi(t, x_2) = \alpha(t)\phi(t, x_1) + (1 - \alpha(t))\phi(t, x_3). \qquad (8)$$

В силу (6) очевидно, что при всех t $\alpha \in (0,1)$. Подставляя в (7) представление (8), получим

$$\begin{aligned} &P(T) - Q(T) = \\ &\int_0^T [\alpha(t) f(t, \phi(t, x_1)) + \\ &(1 - \alpha(t)) f(t, \phi(t, x_3)) - \\ &f(t, \alpha(t)\phi(t, x_1) + (1 - \alpha(t))\phi(t, x_3))] \\ &\times [\alpha(t)(1 - \alpha(t))(\phi(t, x_3) - \phi(t, x_1))]^{-1} dt \\ &= G(T). \end{aligned} \qquad (9)$$

Нетрудно проверить, что

$$G(T) = \delta > 0,$$

а из определения функции G и из выпуклости по x функции f следует, что для любого $T' > 0$ будет

$$G(T + T') = G(T) + G(T'),$$

причем $G(T') \geq 0$.

Вернемся снова к функциям P и Q. Непосредственно из их определения видно, что они почти периодические и что

$$P(0) = Q(0) = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\delta)$ и $\omega' \geq T$ такое, что

$$|P(\omega')| < \varepsilon, \quad |Q(\omega')| < \varepsilon.$$

Существование такого ω' следует из существования у функций P и Q общего ε-почти периода. Тогда для выбранного ω' из (9) с учетом указанных выше свойств функции G имеем

$$|P(\omega') - Q(\omega')| = P(\omega') - Q(\omega') =$$

$$G(\omega') = G(T) + G(\omega' - T) \geq \delta.$$

С другой стороны,

$$|P(\omega') - Q(\omega')| \leq |P(\omega')| + |Q(\omega')| \leq 2\varepsilon < \delta.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теперь следующим шагом является доказательство утверждения аналогичного теореме 3 [36].

В дальнейшем будем считать, что правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{10}$$

является непрерывной на R^2 функцией, имеющей непрерывную на R^2 производную по x $f'(t, x)$ выпуклую по x при каждом фиксированном t, причем существует момент t^* такой, что $f'(t^*, x)$ строго выпукла по x. Как и выше решение уравнения (10), начинающееся при $t = 0$ в точке x, будем обозначать через $\phi(t, x)$, и положим

$$\psi(t, x) = \ln \phi'(t, x) = \int_0^t f'(\tau, \phi(\tau, x) d\tau.$$

Теорема 3. Уравнение (10) не может иметь более трех почти периодических решений.

Доказательство. Пусть уравнение (10) имеет четыре почти периодических решения $\phi(t, x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда рассмотрим три последовательности $\{z_n^j\}$,

$$z_n^j = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |\phi(\omega_n, x) - x|, \qquad j = 1,2,3.$$

Они ограничены и, следовательно, не нарушая общности, их можно считать сходящимися. Положим

$$\lim_{n \to \infty} z_n^j = z^j, \qquad j = 1,2,3.$$

Покажем, что для любого $j = 1,2,3$ $z^j \neq 0$. Пусть, например, $z^1 = 0$. Тогда выберем произвольный интервал $[y_1, y_2] \subset (x_1, x_2)$. В силу функции $\phi'(t, y_1)$ и $\phi'(t, y_2)$ ограничены, откуда, на основании утверждения 4, заключаем, что совокупность функций $\phi(t, x)$, $x \in [y_1, y_2]$, является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной по x. Далее, последовательность функций $\{\phi'(\omega_n, x)\}$, $x \in [y_1, y_2]$, также является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной по x. Учитывая сказанное, последовательности функций $\{\phi(\omega_n, x)\}$ и $\{\phi'(\omega_n, x)\}$, без нарушения общности, можно считать равномерно сходящимися к непрерывным функциям $\phi(x)$ и $\phi'(x)$ соответственно.

Из предположения о том, что $z^1 = 0$, следует, что на $[y_1, y_2]$

$$\phi(x) = x,$$

и значит

$$\phi'(x) = 1.$$

Из последнего тождества получаем, что на $[y_1, y_2] \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_4)$

$$\psi(x) \equiv 0.$$

Но это невозможно, так как, в силу утверждения 9, $\psi(x)$ строго выпукла на любом замкнутом интервале, принадлежащем (x_1, x_4).

Полученное противоречие и показывает, что z^1 не может быть равной нулю. Для остальных двух интервалов рассуждения аналогичные.

Из доказанного факта, что $z^j > 0$, $j = 1,2,3$, следует существование такого $\delta > 0$, что для всех $j = 1,2,3$:

$$z^j > \delta.$$

Выберем N столь большим, чтобы для всех $n > N$ и всех $j = 1,2,3$ и $i = 1,2,3,4$ выполнялись следующие соотношения:

$$z_n^j > \frac{1}{2}\delta, \qquad |\phi(\omega_n, x_i) - x_i| < \frac{1}{2}\delta, \qquad \omega_n > t^*.$$

Зафиксируем произвольное $n > N$.

Тогда, в силу выбора N, функция

$$|\phi(\omega_n, x) - x|$$

на каждом из интервалов $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1,2,3$, достигает своего максимума в некоторой внутренней точке этого интервала. Следовательно, в каждом интервале (x_j, x_{j+1}), $j = 1,2,3$, существует точка y_j такая, что

$$\phi'(\omega_n, y_j) = 1.$$

Откуда, учитывая, что

$$\psi(t, x) = \ln \phi'(t, x),$$

получим

$$\psi(\omega_n, y_j) = 0, \qquad j = 1,2,3.$$

Итак, если уравнение (10) имеет четыре почти периодических решения, то для некоторого достаточно большого n на (x_1, x_4) существуют три различные точки y_j, в каждой из которых

$$\psi(\omega_n, y_j) = 0.$$

Но при $x \in [x_1, x_4]$ и $\omega_n > t^*$ функция $\psi(\omega_n, x)$ строго выпуклая и, следова-тельно, не может принимать в $[x_1, x_4]$ трех одинаковых значений.

Полученное противоречие и показывает невозможность нашего предположения.

Полученные здесь основные результаты запишем в единой форме, для чего введем обозначения, положив

$$f^{-1}(t, x) = \int_0^x f(t, y)dy,$$

$$f^0(t, x) = f(t, x),$$

$$f^1(t, x) = f'(t, x),$$

где $f(t, x)$ – непрерывная по совокупности аргументов функция.

Теорема 4. Если при некотором $k = 1,2,3$ функция $f^{k-2}(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов и выпукла по x при каждом фиксированном t, причем существует такой момент t^*, что $f^{k-2}(t^*, x)$ строго выпукла, то уравнение (1) может иметь не более k почти периодических решений.

Нижняя оценка числа почти периодических решений

В предыдущих теоремах были найдены условия, позволяющие определить максимально возможное число почти периодических решений в дифференциальном уравнении первого порядка. Теперь мы исследуем вопрос сущест-вования у рассматриваемого уравнения почти периодических решений, что позволит определить минимально возможное число почти периодических решений у исследуемого дифференциального уравнения.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{11}$$

где f – непрерывная на R^2 почти периодическая по t равномерно по x на каждом компактном множестве функция и такая, что уравнение (11) обладает свойством существования и единственности решений.

При доказательстве наличия у уравнения (11) почти периодического решения будем использовать результат, полученный в работе [36], который мы сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма. Пусть правая часть уравнения (11) такова, что $f(t, x)$ убывает по $x \in [a, b]$ при каждом фиксированном t. Тогда, если (11) имеет ограниченное решение $\phi(t)$ такое, что $\{\phi(t): 0 \le t < \infty\} \subset [a, b]$, то оно имеет почти периодическое решение $x(t)$, область значений которого принадлежит интервалу $[a, b]$.

Замечание. Если в уравнении (11) сделать замену переменной, положив $\tau = -t$, то получим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = -f(-\tau, x). \tag{12}$$

Ясно, что если уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то и уравнение (12) также имеет почти периодическое решение, и наоборот. Отсюда следует, что лемма остается в силе, если $f(t, x)$ возрастает по x при каждом фиксированном t.

Теорема 5. Если правая часть уравнения (11) есть функция, убывающая по x при каждом фиксированном t, причем

$$\lim_{x \to -\infty} f(t, x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \to +\infty} f(t, x) = -\infty$$

равномерно по t, то уравнение (11) имеет почти периодическое решение.

Доказательство. В силу предположения о том, что $f(t,x)\to+\infty$ при $x\to-\infty$ и $f(t,x)\to-\infty$ при $x\to+\infty$ равномерно по t, найдутся постоянные $K>0$ и $\alpha>0$ такие, что при $x<-K$ будет $f(t,x)\ge\alpha$, а при $x>K$ будет $f(t,x)\le-\alpha$ сразу для всех t.

Тогда для $|x|>K$ будет

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{(11)}(x^2)<0.$$

Следовательно, решение уравнения (11), начинающееся в любой точке x_0, $|x_0|\le K$, не может покинуть полосу $[-K,K]$.

Таким образом, уравнение (11) имеет ограниченное решение, из чего, в силу леммы, заключаем, что (11) имеет хотя бы одно почти периодическое решение.

Теорема 6. Пусть $f(t,x)$ убывает по x при каждом фиксированном t, и существует момент t^* такой, что $f(t^*,x)$ строго убывает. Тогда, для того чтобы уравнение (11) имело единственное почти периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы оно имело хотя бы одно ограниченное решение.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна, так как, если уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то это решение и будет являться искомым ограниченным решением.

Докажем достаточность.

Если (11) имеет ограниченное решение, то в таком случае выполняются требования леммы, из которой следует, что уравнение (11) имеет почти перио-дическое решение. Но в силу теоремы 1 уравнение (11) при выполнении условий теоремы 6 не может иметь более одного почти периодического решения. Объединяя эти два утверждения, получаем, что уравнение (11) имеет при выполнении условий теоремы 6 единственное почти периодическое решение.

Теорема 7. Пусть правая часть уравнения (11) такова, что уравнение

$$f(t,\gamma(t))\equiv 0$$

имеет n решений $\gamma_i(t)$, $i=1,2,3,4$, обладающих следующим свойством: для любого $k=0$, 1,, n в области

$$D_k=\{(t,x):t\in(-\infty,+\infty),\gamma_k(t)<x<\gamma_{k+1}(t)\},$$

где положено $\gamma_0=-\infty$, $\gamma_{n+1}=+\infty$, функция $f(t,x)$ знакопостоянная, причем знак функции меняется при переходе в соседнюю область. Тогда, если

$$\beta_j=\max_t\gamma_j(t)<\min_t\gamma_{j+1}(t)=\alpha_{j+1},$$
$$j=1,2,\ldots,n-1,$$

и в каждой полосе

$$\alpha_i\le x\le\beta_i$$

функция $f(t,x)$ является возрастающей или убывающей по x при каждом фиксированном t, то уравнение (11) имеет n почти периодических решений.

Доказательство. Прежде всего покажем, что если существуют ограниченные определенные на $(-\infty,+\infty)$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ такие, что $\alpha(t)\le\beta(t)$ и

$$G(\alpha)(t)=\dot\alpha(t)-f(t,\alpha(t))\le 0\le G(\beta)(t),$$
$$t\in(-\infty,+\infty),$$

то уравнение (11) имеет ограниченное решение.

Положим

$$c(t,x)=\alpha(t),x(t)<\alpha(t)x(t),$$
$$x(t)\in[\alpha(t),\beta(t)]\beta(t),x(t)>\beta(t)$$

и рассмотрим уравнение

$$\dot x+x=c(t,x)+f(t,c(t,x)). \qquad (13)$$

Ясно, что (13) переходит в (11), если уравнение (11) имеет решение $y(t)$ такое, что при всех t

$$\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t).$$

Покажем, что такое решение существует.

Пусть это не так. Тогда решение $y(t;0,y_0)$, начинающееся в произвольной точке $y_0\in[\alpha(0),\beta(0)]$, покидает с течением времени рассматриваемую область.

Пусть, например, оно попадает в область $y(t)<\alpha(t)$. Чтобы могла реализоваться такая возможность, обязательно должна существовать точка t^*, в которой $y(t^*)<\alpha(t^*)$ и $\dot y(t^*)\le\dot\alpha(t^*)$. В этом случае из уравнения (13) будем иметь

$$\dot y(t^*)-f(t^*,\alpha(t^*))=\alpha(t^*)-y(t^*). \qquad (14)$$

Но

$$\dot{y}(t^*) \le \dot{\alpha}(t^*),$$

а по условию

$$\dot{\alpha} \le f(t,\alpha),$$

следовательно,

$$\dot{y}(t^*) - f(t^*,\alpha(t^*)) \le 0.$$

С другой стороны,

$$\alpha(t^*) - y(t^*) > 0.$$

Таким образом, левая часть равенства (14) не превосходит нуля, а его правая часть строго больше нуля при $t = t^*$.

Полученное противоречие показывает, что решение $y(t;0,y_0)$ уравнения (13), начинающееся в точке $y_0 \in [\alpha(0),\beta(0)]$, не может попасть в область $y(t) < \alpha(t)$.

Аналогично доказывается, что это решение также не может попасть и в область $y(t) > \beta(t)$. Следовательно, при $t \ge 0$ будет иметь место оценка

$$\alpha(t) \le y(t) \le \beta(t),$$

из которой, в силу предположения об ограниченности функций α и β, следует существование у уравнения (13), а значит и у уравнения (11), ограниченного решения.

Подобным образом можно рассматривать ситуацию, когда

$$G(\alpha)(t) \ge 0 \ge G(\beta)(t).$$

Теперь выберем произвольное $i = 1,2,\ldots,n$ и, для определенности, будем считать, что в области D_{i-1}

$$f(t,x) \ge 0,$$

а в области D_i

$$f(t,x) \le 0.$$

По условию теоремы

$$\beta_j < \alpha_{j+1}, \qquad j = 1,2,\ldots,n-1.$$

Следовательно, для выбранного i будет при $x \equiv \alpha_i$

$$G(x)(t) \le 0,$$

а при $x \equiv \beta_i$

$$G(x)(t) \ge 0.$$

Таким образом, выполняются все требования только что доказанного утверждения, что позволяет сделать заключение о наличии у уравнения (11) ограниченного решения, располагающе-гося в полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i.$$

Но в этой полосе, по предположению, функция $f(t,x)$ является монотонной и почти периодической по t равномерно по x, т.е. в полосе $\alpha_i \le x \le \beta_i$ выполняются все требования леммы, в силу которой заключаем, что уравнение (11) имеет почти периодическое решение, расположенное в полосе $\alpha_i \le x \le \beta_i$.

Покажем, что в этой полосе не может существовать двух почти периодических решений. Пусть это не так.

Обозначим одно почти периодическое решение через $x_1(t)$, а другое – через $x_2(t)$. Пусть, для определенности, $x_1(0) < x_2(0)$. Разность $x_1(t) - x_2(t)$ представим в виде

$$x_1(t) - x_2(t) = x_1(0) - x_2(0) + \int_0^t [f(\tau,x_1(\tau)) - f(\tau,x_2(\tau))]d\tau.$$

В силу существования и единственности решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ никогда не пересекаются, и потому при всех t будет

$$x_1(t) < x_2(t).$$

Ясно, что в полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i$$

функция $f(t,x)$ убывает по x при каждом фиксированном t, следовательно, при всех t

$$f(t,x_1(t)) \ge f(t,x_2(t)).$$

Учитывая это, заключаем, что имеет место неравенство

$$[x_1(t) - x_2(t)] - [x_1(0) - x_2(0)] = \int_0^t [f(\tau,x_1(\tau)) - f(\tau,x_2(\tau))]d\tau \ge 0. \tag{15}$$

Чтобы быть почти периодическим решением $x_1(t)$ из области, расположенной над кривой $\gamma_i(t)$, обязательно должно перейти в область, расположенную под кривой $\gamma_i(t)$. Это значит, что существует момент $t' > 0$ такой, что $x_1(t') < \gamma_i(t') < x_2(t')$. Но по условию теоремы $f(t',\gamma_i(t')) = 0$, и график функции $\gamma_i(t)$ является границей областей перемены знака функции $f(t,x)$.

Следовательно, в точке t' должно выполняться неравенство

$$f(t', x_1(t')) > f(t', x_2(t')).$$

Из этого неравенства, поскольку функция $f(t,x)$ непрерывна, сразу следует, что в (15) при $t \geq t'$ имеет место знак строгого неравенства.

Покажем, что это противоречит предположению о почти периодичности решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Действительно, разность двух почти периодических функций есть функция почти периодическая. Выберем убывающую до нуля последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}$ и соответствующую ей последовательность $\{\omega_l\}$, где ω_l является ε_l-почти периодом функции $x_1(t) - x_2(t)$. Без нарушения общности, последовательность $\{\omega_l\}$ можно считать стремящейся к бесконечности при $l \to \infty$. Выберем L такое, что $\omega_L \geq t'$.

Тогда для всех $l > L$ будет

$$[x_1(\omega_l) - x_2(\omega_l)] - [x_1(0) - x_2(0)] =$$

$$\int_0^{\omega_l} [f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))]dt \geq \delta > 0,$$

что противоречит выбору последовательности $\{\omega_l\}$. Полученное противоречие и доказывает, что в полосе

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i$$

располагается только одно почти периодическое решение уравнения (11). Но таких полос n, по условию теоремы, из чего и заключаем, что уравнение (11) при выполнении условий теоремы 7 имеет n почти периодических решений.

Устойчивость почти периодических решений

Займемся теперь исследованием устойчивости решений уравнения (11).

Теорема 8. Если правая часть уравнения (11) есть функция, убывающая по x при каждом фиксированном t, то все решения этого уравнения являются равномерно устойчивыми.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11).

Положим $y = x - u$. Уравнение для y будет иметь вид:

$$\dot{y} = f(t, u + y) - f(t, u) = g(t, y). \qquad (16)$$

В качестве функции Ляпунова выберем функцию

$$v(y) = \frac{1}{2} y^2. \qquad (17)$$

Поскольку $f(t,x)$ убывает по x при каждом фиксированном t, то производная функции (17) на решениях уравнения (16) будет удовлетворять неравенству

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(16)} = yg(t, y) \leq 0,$$

из которого следует равномерная устойчивость решения $y = 0$ уравнения (16), а значит и решения $u(t)$ уравнения (11). Учитывая, что в качестве $u(t)$ было выбрано произвольное решение уравнения (11), убеждаемся в справедливости утверждения утверждения.

Заметим, из доказанной теоремы сразу следует, что в условиях теоремы 7 все n почти периодических решений уравнения (11) являются устойчивыми либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Обозначим через $\lambda_x[f](t,x)$ произвольное производное число функции $f(t,x)$ в точке x при фиксированном t.

Теорема 9. Если существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для любого фиксированного t и каждого производного числа $\lambda_x[f](t,x)$ выполняется неравенство

$$\lambda_x[f](t,x) \leq -\alpha,$$

то все решения уравнения (11) равномерно асимптотически устойчивы в целом. Если же дополнительно известно, что уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то все решения уравнения (11) являются асимптотически почти периодическими.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11). Введем функцию y, положив $y = x - u$. Ясно, что если x является решением уравнения (11), то y будет решением уравнения (16). Найдем производную функции (17) на решениях уравнения (16).

Нетрудно показать, что существуют производные числа, для которых имеет место соотношение:

$$f(t, y + u) - f(t, u) \leq y\lambda_{u+\theta y}[f](t, u + \theta y),$$

$$\theta \in (0,1).$$

Учитывая, что по условию утверждения

$$\lambda_{u+\theta y}[f](t,u+\theta y)\le -\alpha,$$

получим следующую оценку:

Из этого неравенства следует равномерная асимптотическая устойчивость в целом решения $y=0$ уравнения (16), а значит и решения $u(t)$ уравнения (11). Поскольку $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11), то из этого следует, что все решения уравнения (11) являются асимптотически устойчивыми в целом.

Если же уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то в силу его равномерной асимптотической устойчивости в целом и все решения уравнения (11) будут асимптотически почти периодическими.

Теорема 10. Если функция $f(t,x)$ из правой части уравнения (11) убывает по x при каждом фиксированном t, и на каждом компакте

$$\{(y,u): |u|\le u_0, d_1\le |y|\le d_2, d_1>0\}$$

при $t\to\infty$

$$sign(y)\int_0^t [f(\tau,y+u)-f(\tau,u)]d\tau \to -\infty$$

равномерно, то решение $y=0$ уравнения (16) будет равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное ограниченное решение уравнения (11). Положим

$$y=x-u.$$

Из теоремы 8 следует, что решение $y=0$ уравнения (16) равномерно устойчиво, покажем, что все решения уравнения (16) стремятся к 0 при $t\to\infty$.

Пусть это не так. Тогда для некото-рого решения $y(t;0,y_0)$ уравнения (16) найдется $d>0$ такое, что

$$y(t;0,y_0)>d.$$

Для определенности мы здесь предположили, что $y_0>0$. При доказательстве теоремы 8 мы показали, что имеет место неравенство

$$y\dot y\le 0,$$

из которого заключаем, что на решениях уравнения (16) $|y|$ не возрастает. Следовательно, в рассматриваемом случае при $t\ge 0$ будет $d\le y(t)\le y_0$.

Положим $u_0=\sup\limits_t |u(t)|$. Из (16) имеем

$$\frac{\dot y}{y}=\frac{g(t,y)}{y}\le\frac{g(t,y)}{y_0}.$$

Отсюда, в силу условий теоремы, получаем

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\le \lim_{t\to\infty} y_0 e^{1/y_0\int_0^t g(\tau,y)d\tau}=0,$$

что противоречит нашему предположению.

Случай $y_0<0$ рассматривается аналогично. Таким образом, решение $y=0$ уравнения (16) является равномерно асимптотически устойчивым.

Заключение

В работе представлено применение метода производных чисел [30, 31] в задачах оценки числа почти периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка. Найдены условия для определения верхней и нижней оценки количества почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого опрядка. Исследованы вопросы существования и устойчивости этих решений.

Список источников

1. *Боль П.Г.* Избранные труды. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1961.
2. *Bohr H.* Collected mathematical works: In 3 Vol. / Ed. E. Volner and B. Jessen. Koebenhavn, 1953.
3. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
4. *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью. ДАН СССР, 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.
5. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on The Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type, 2017. AIP Conference Proceedings 1863, 080003.
7. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions, 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA) 2017. С. 7973965.

8. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems, Chapter in book "Mechanical Systems: Research, Applications and Technology". 2017. С. 101–164.
9. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Дистанционное управление манипуляционными роботами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 34–43.
10. *G. Ivanov, G. Alferov, A. Sharlay, and P. Efimova*, "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System". 2017 AIP Conference Proceedings, 1863, 080002.
11. *F. Kulakov, G.V. Alferov, P. Efimova, S. Chernakova and D. Shymanchuk,* "Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects", in Memory of V.I. Zubov SCP, 2015 IEEE Conference Proceedings 7342075 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Saint-Petersburg, Russia, 2015), pp. 102–105.
12. *F. Kulakov, B. Sokolov, A. Shalyto, and G. Alferov*. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback. 2016. Applied Mathematical Sciences, 10(33-36). P. 1783–1796.
13. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Исследование структуры предельного инвариантного множества одного класса стационарных систем с векторным управлением // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2016. Вып. 48. С. 93–99.
14. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 33–34.
15. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). С. 13–15.
16. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 37–48.
17. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
18. *Иванов Г.Г., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Исследование структуры предельных инвариантных множеств стационарных управляемых систем с нелинейностями гистерезисного типа // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): матер. XIII междунар. конф. 2016. С. 163–165.
19. *Ефимова П.А., Алфёров Г.В., Иванов Г.Г.* Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединенными элементами // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 139–143.
20. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems. Chapter in book (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
21. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 121–122.
22. *Кулаков Ф.М., Алфёров, Г.В., Ефимова П.А.* Копирующее управление удаленными роботами с задержкой в передаче сигнала // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика 2019. Вып. 3(46). С. 47–55.
23. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863, С. N080003. DOI:10.1063/1.4992264.
24. *Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Интегрируемость негладких функций одной переменной // Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы: тез. докл. междунар. конф., посвященной памяти проф. В.Ф. Демьянова. 2017. С. 149–153.
25. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of Linear Systems with Multitask Right – Hand Member, Chapter in book (2018) Stohastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering, pp. 74-112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.

26. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control of Robot Manipulators with the Constraints at the Moving Objects // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov SCP 2015. Proceedings, ст. № 7342075, pp.102–105. DOI:10.1109/SCP.2015.7342075.
27. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 121–122.
28. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 20–30.
29. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. C. 7106742.
30. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Горовенко П.А.* Производные числа функций одной переменной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (42). С. 5–19.
31. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2023) Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 47–53.
32. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2023) Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28.
33. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1995. Вып. 29. С. 92–97.
34. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* Кинематический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 31–38.
35. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* Динамический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 39–46.
36. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С., Селицкая Е.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 5–15.
37. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Смирнов Е.Н.* Управление роботами, очувствленными по усилиям // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1996. Вып. 30. С. 113–120.
38. *Алфёров Г.В.* К расчету динамической модели манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1996. Вып. 30. С. 6–14.
39. *Алфёров Г.В.* К вопросу управления робототехнической системой на основе базы знаний // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1995. Вып. 29. С. 6–12.
40. *Кулаков Ф.М., Соколов Б.В., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Дистанционное управление космическими роботами с адаптацией к изменениям его внешней среды // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4(43). С. 16–26.
41. *Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* К вопросу об устойчивости в задачах проектирования роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1986. Вып. 1. С. 5–10.
42. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2022) Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56). С. 5–13.
43. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Об устойчивости решений системы ли-

нейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 31–39.

References

1. *Bol' P.G.* Izbrannye trudy. Riga: Izd-vo AN LatSSR; 1961. (In Russ.).
2. *Bohr H.* Collected mathematical works: In 3 Vol. Ed. E.Volner and B. Jessen. Koebenhavn; 1953.
3. *Krylov N.M., Bogolyubov N.N.* Vvedenie v nelinejnuyu mekhaniku. Kiev: Izd-vo AN USSR; 1937. (In Russ.).
4. *Pliss V.A.* O chisle periodicheskih reshenij uravneniya s polinomial'noj pravoj chast'yu. DAN SSSR. 1959;127(5):965-968. (In Russ.).
5. *Arnol'd V.I.* Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka; 1978. (In Russ.).
6. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on The Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type, 2017. AIP Conference Proceedings 1863:080003.
7. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrabiity of Nonsmooth One-Variable Functions, 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). 2017: 7973965.
8. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems, Chapter in book "Mechanical Systems: Research, Applications and Technology". 2017:101-164.
9. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Distancionnoe upravlenie manipulyacionnymi robotami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;4(47):34-43.
10. *G. Ivanov, G. Alferov, A. Sharlay, and P. Efimova,* "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System". 2017 AIP Conference Proceedings. 1863: 080002.
11. *F. Kulakov, G.V. Alferov, P. Efimova, S. Chernakova and D. Shymanchuk,* "Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects", in Memory of V.I. Zubov SCP. 2015 IEEE Conference Proceedings 7342075 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Saint-Petersburg, Russia. 2015:102-105.
12. *F. Kulakov, B. Sokolov, A. Shalyto, and G. Alferov.* Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback. Applied Mathematical Sciences. 2016;10(33-36):1783-1796.
13. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Issledovanie struktury predel'nogo invariantnogo mnozhestva odnogo klassa stacionarnyh sistem s vektornym upravleniem. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2016;(48):93-99. (In Russ.).
14. *Ivanov G.G.* K voprosu ustojchivosti linejno odnorodnyh sistem s pereklyucheniyami. Ustojchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:33–34. (In Russ.).
15. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems. 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP):13-15.
16. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Usloviya ustojchivosti linejnyh odnorodnyh sistem s pereklyucheniyami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2016;3(34):37-48. (In Russ.).
17. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Ustojchivost' selektorno-linejnyh differencial'nyh vklyuchenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017;2(37):25-30. (In Russ.).
18. *Ivanov G.G., Kulakov F.M., Alfyorov G.V.* Issledovanie struktury predel'nyh invariantnyh mnozhestv stacionarnyh upravlyaemyh sistem s nelinejnostyami gisterezisnogo tipa. Ustojchivost' i kolebaniya nelinejnyh sistem upravleniya (konferenciya Pyatnickogo): mater. XIII mezhdunar. konf. 2016:163-165. (In Russ.).
19. *Efimova P.A., Alfyorov G.V., Ivanov G.G.* Stabilizaciya programmnogo dvizheniya ob"ekta upravleniya s uprugo prisoedinennymi elementami. Processy upravleniya i ustojchivost'. 2017;4(1):139–143. (In Russ.).
20. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems. Chapter in book. Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. 2017:101-164.
21. *Efimova P.A., Kulakov F.M., Alfyorov G.V., SHimanchuk D.V., SHarlaj A.S.* Upravlenie mnogozvennymi manipulyacionnymi robotami pri nalichii svyazej u peremeshchaemyh

imi ob"ektov. Ustojchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:121-122. (In Russ.).

22. *Kulakov F.M., Alfyorov, G.V., Efimova P.A.* Kopiruyushchee upravlenie udalennymi robotami s zaderzhkoj v peredache signala. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika 2019;3(46):47-55. (In Russ.).
23. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type. AIP Conference Proceedings. 2017;1863:N080003. DOI:10.1063/1.4992264.
24. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A.* Integriruemost' negladkih funkcij odnoj peremennoj. Konstruktivnyj negladkij analiz i smezhnye voprosy: tez. dokl. mezhdunar. konf., posvyashchennoj pamyati prof. V.F. Dem'yanova. 2017:149-153. (In Russ.).
25. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of Linear Systems with Multitask Right – Hand Member, Chapter in book. Stohastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. 2018:74-112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
26. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control of Robot Manipulators with the Constraints at the Moving Objects. 2015 International Conference "Stability and Con-trol Processes" in Memory of V.I. Zubov SCP 2015;7342075:102-105. DOI:10.1109/SCP.2015.7342075.
27. *Efimova P.A., Kulakov F.M., Alfyorov G.V., SHimanchuk D.V., SHarlaj A.S.* Upravlenie mnogozvennymi manipulya-cionnymi robotami pri nalichii svyazej u peremeshchaemyh imi ob"ektov. Ustojchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:121-122. (In Russ.).
28. *Efimova P.A., SHimanchuk D.V.* Modelirovanie dvizheniya kosmicheskogo manipulyacionnogo robota. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:20-30. (In Russ.).
29. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots. International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015:7106742.
30. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Gorovenko P.A.* Proizvodnye chisla funkcij odnoj peremennoj. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018;3(42):5-19. (In Russ.).
31. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* (2023) Issledovanie reshenij linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023;1(60):47-53. (In Russ.).
32. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* (2023) Stabilizaciya programmnyh dvizhenij sistem peremennoj struktury. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023:2(61):16-28. (In Russ.).
33. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V.* Matematicheskie modeli gibkogo robota. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1995;29:92-97. (In Russ.).
34. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* Kinematicheskij analiz ispolnitel'noj sistemy manipulyacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:31-38. (In Russ.).
35. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* Dinamicheskij analiz ispolnitel'noj sistemy manipulyacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:39-46. (In Russ.).
36. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S., Selickaya E.A.* Periodicheskie resheniya differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;3(46):5-15. (In Russ.).
37. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Smirnov E.N.* Upravlenie robotami, ochuvstvlennymi po usiliyam. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1996;30:113-120. (In Russ.).
38. *Alfyorov G.V.* K raschetu dinamicheskoj modeli manipulyacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1996;(30):6-14. (In Russ.).
39. *Alfyorov G.V.* K voprosu upravleniya robototekhnicheskoj sistemoj na osnove bazy znanij. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz.

sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1995;(29):6-12. (In Russ.).

40. *Kulakov F.M., Sokolov B.V., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Distancionnoe upravlenie kosmicheskimi robotami s adaptaciej k izmeneniyam ego vneshnej sredy. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018;4(43):16-26. (In Russ.).
41. *Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* K voprosu ob ustojchivosti v zadachah proektirovaniya robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1986;1:5-10. (In Russ.).
42. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Teorema ob oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti i ee prilozheniya. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022;1(56):5-13. (In Russ.).
43. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Ob ustojchivosti reshenij sistemy linejnyh differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022;2(57):31-39. (In Russ.).

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 7342.

Information about the authors:

G. G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 116900;

G. V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 2873;

V. S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 7342.