

«Механика»

Научная статья

УДК 531.787.11

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-19-30

**Динамическое проникание жесткого плоского ударника
в неоднородную преграду по нормали и под углом****Валерий Нагимович Аптуков¹, Лидия Владимировна Ландик²,
Анна Вячеславовна Вашкевич³**^{1, 2, 3} Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия¹aptukov@psu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8048-3804>²lllvvv@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0446-3083>³vashkevich_02@list.ru

Аннотация. Рассмотрена задача динамического проникания жесткого плоского ударника в неоднородную преграду по нормали и под углом. В статье представлены математическая модель, дифференциальные уравнения и соответствующие задачи Коши. Алгоритм численного решения поставленной задачи реализован на языке Turbo Pascal в объектно-ориентированной среде компилятора Borland Delphi 7 с использованием необходимых для визуализации результатов графических средств и высокоточных численных методов. Верификация модели основана на аналитическом решении для задачи проникания по нормали. На основе численных экспериментов получены рациональные характеристики двухслойной преграды минимального веса.

Ключевые слова: динамическое проникание; жесткий ударник; неоднородная преграда; проникание под углом; оптимальная двухслойная преграда

Для цитирования: Аптуков В.Н., Ландик Л.В., Вашкевич А.В. Динамическое проникание жесткого плоского ударника в неоднородную преграду по нормали и под углом // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 3(62). С. 19–30. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-19-30.

Статья поступила в редакцию 08.08.2023; одобрена после рецензирования 01.09.2023; принята к публикации 15.09.2023.

«Mechanics»

Research article

**Dynamic Penetration of a Rigid Flat Striker Into
an Inhomogeneous Target Along the Normal and at an Angle****Valeriy N. Aptukov¹, Lidiya V. Landik², Anna V. Vashkevich³**^{1, 2, 3} Perm State University, Perm, Russia¹aptukov@psu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8048-3804>²lllvvv@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0446-3083>³vashkevich_02@list.ru

Abstract. The problem of dynamic penetration of a rigid flat striker into an inhomogeneous target along the normal and at an angle is considered. The article presents a mathematical model, differential equations and corresponding Cauchy problems. The algorithm for the numerical solution of the problem is implemented in the Turbo Pascal language in the object-oriented environment of the Borland Delphi 7 compiler using graphical tools and high-precision numerical methods necessary for visualizing the results. Verification of the model is based on an analytical solution for the problem of normal penetration. Based on numerical experiments, rational characteristics of a two-layer target of minimum weight are obtained.



Эта работа © 2023 Аптуков В.Н., Ландик Л.В., Вашкевич А.В. под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: *dynamic penetration; rigid striker; non-uniform target; penetration at an angle; optimal two-layer target*

For citation: *Aptukov V.N., Landik L.V., Vashkevich A.V. Dynamic Penetration of a Rigid Flat Striker Into an Inhomogeneous Target Along the Normal and at an Angle. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;3(62):19-30. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-19-30.*

The article was submitted 08.08.2023; approved after reviewing 01.09.2023; accepted for publication 15.09.2023.

Введение

Вопросам ударного взаимодействия деформируемых тел посвящено большое количество работ. Существенное продвижение в изучении этой проблемы началось с 40–50-х гг. прошлого столетия. Развитие аппаратуры и методов наблюдения за быстропротекающими процессами, появление лабораторных баллистических установок способствовало повышению эффективности экспериментальных исследований.

Накопление большого количества опытных данных не только привело к установлению новых эмпирических зависимостей, но и ускорило теоретические исследования.

Процессу проникания сопутствует широкий спектр явлений сложной физической природы, проявляющих себя на макроуровне в виде большого количества термомеханических эффектов. Скорость удара, механические свойства, геометрия бойка и размеры плиты – все эти факторы могут значительно изменять картину процесса или конечный результат взаимодействия. Именно поэтому, как правило, экспериментальные и теоретические исследования касаются весьма конкретных узких условий взаимодействия.

Наряду с численными методами решения задач проникания в 2D- и 3D-постановках широко применяются и инженерные подходы, основанные на эмпирических соотношениях для удельной силы сопротивления преграды прониканию жесткого ударника [1, 2] – так называемые, модели локального взаимодействия (МЛВ). С помощью инженерного подхода решается большое количество прикладных задач, в том числе задач оптимизации структуры защитной неоднородной пластины минимального веса [3–5].

Решение задачи оптимизации для простого случая нормального соударения осуществляется путем применения принципа максимума Понтрягина [6] в аналитической форме.

Динамическое проникание под углом описывается более сложной системой дифференциальных уравнений, что не позволяет сформулировать результаты в аналитической форме. Тем не менее, с помощью численного решения ранее были получены некоторые интересные результаты, в частности, при проникании ударника под углом в анизотропной преграде [7].

В настоящей статье представлены результаты численного моделирования динамического проникания плоского жесткого ударника под углом в двухслойной металлической преграде. Получено рациональное соотношение слоев преграды минимального веса при некоторых заданных параметрах ударника.

1. Постановка задачи

Рассмотрим жесткий плоский ударник массой m с локальной системой координат O_1XYZ в кончике ударника и осью Z , направленной вдоль его оси симметрии. Это может быть, например, прямоугольник с клиновидной головной частью (рис. 1). Длина ударника h , огибающая ударника записывается в локальной системе координат в виде функции $Y = f(Z)$, где Y – переменный поперечный размер ударника.

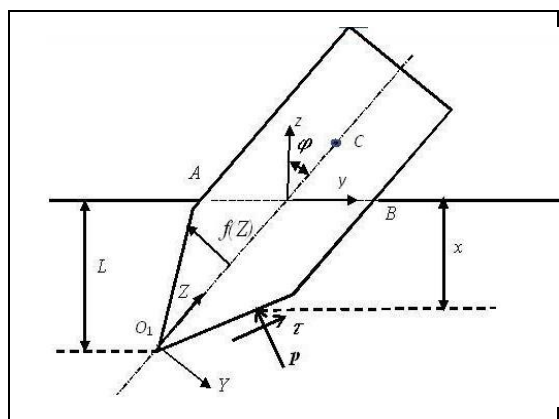


Рис. 1. *Схема проникания ударника в преграду*

Момент инерции ударника относительно оси X равен J . Расстояние от центра тяжести

сти C ударника до начала локальной системы координат O_1 (кончика ударника) равно L_c .

Глобальная система координат $Oxyz$ связана с преградой (плитой), толщина преграды w , начало координат расположено на поверхности плиты в точке начала взаимодействия кончика ударника с плитой.

Начальный и текущий угол между осью ударника и нормалью к плите (осью z) φ_0 и φ . Преграда может быть однородной, непрерывно неоднородной или слоистой.

В ходе проникания ударника локальная система координат O_1YZ поворачивается относительно глобальной системы координат Oyz :

$$\begin{aligned} y &= Z \sin \varphi + Y \cos \varphi, \\ z &= Z \cos \varphi - Y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Нормальное сопротивление преграды прониканию $p(x)$ является функцией квадрата скорости элементарной площадки dS поверхности ударника, на которой определяется сопротивление [1, 2]:

$$\bar{p}(x) = \bar{n}(x)[H_d(x) + k\rho(x)V^2], \quad (1.2)$$

где $H_d(x)$ – динамическая твердость (величина, связанная с пределом текучести преграды); $\rho(x)$ – плотность преграды; k – коэффициент формы, зависящий от угла между направлением скорости V и нормалью $\bar{n}(x)$ к элементарной площадке поверхности.

При вычислении нормального сопротивления необходимо учитывать, что элементарная площадка ударника взаимодействует с материалом преграды только в случае, если $\bar{V} \cdot \bar{n} > 0$.

В противном случае, если $\bar{V} \cdot \bar{n} \leq 0$, давление равно нулю, так как между площадкой ударника и материалом преграды образуется зазор.

Коэффициент формы k определяется как квадрат косинуса угла β между вектором скорости и нормалью:

$$k = \frac{(\bar{V} \cdot \bar{n})^2}{(\bar{V})^2}. \quad (1.3)$$

В процессе проникания ударника в преграду будем рассматривать угол между его образующей и осью – α , тогда $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Если ударник имеет форму клина, то угол $\alpha = const$.

Если форма ударника более сложная, то угол α будет зависеть от огибающей $Y = f(Z)$ ударника, поэтому $tg \alpha = f'(Z)$.

Динамическая твердость $H_d(x)$ и плотность $\rho(x)$ преграды зависят от глобальной координаты x , отсчитываемой от поверхности

преграды, поскольку плита может быть неоднородная, например слоистая.

Касательное сопротивление $\tau(x)$ связано с величиной предела текучести преграды $\tau_s(x)$ и, следовательно, также может зависеть от координаты x , т.е. $\tau(x) = k_s \tau_s(x)$, где эмпирический коэффициент $k_s \leq 1$.

Нормальное и касательное сопротивления действуют по всей поверхности ударника, погруженной в преграду AO_1B (точки пересечения с лицевой поверхностью A и B).

Уравнения движения ударника в плоском случае

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = F_z, \quad J \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (1.4)$$

где m – масса ударника, J – момент инерции, v_y, v_z – проекции вектора скорости центра тяжести C ударника (рис. 1) на координатные оси Y, Z (скорость v следует отличать от скорости V элементарной площадки), ω – угловая скорость ударника относительно центра тяжести.

Правые части дифференциальных уравнений (1.4) представляют собой интегралы по поверхности ударника, внедренной в текущий момент t в материал преграды

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{S_B} (p_y(x) + \tau_y(x)) dS, \\ F_z &= \int_{S_B} (p_z(x) + \tau_z(x)) dS, \\ M &= \int_{S_B} (\bar{p}(x) + \bar{\tau}(x)) l_c dS, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $(\dots)_y, (\dots)_z$ – проекции величин на координатные оси Y, Z ; $(\dots)_l$ – проекции величин на направление, перпендикулярное отрезку l_c , соединяющему элементарную площадку с центром тяжести ударника.

Будем считать, что все точки поверхности ударника взаимодействуют с преградой, никаких свободных зон от сопротивления $p(x)$ и $\tau(x)$ здесь не образуется.

Таким образом, задача проникания ударника через преграду представляет собой задачу Коши с известными начальными условиями. Процесс решения задачи выполняется до тех пор, пока либо ударник остановится в преграде, т.е. его скорость $v(t_k) = 0$, либо его головная часть не выйдет на тыльную сторону преграды.

Рассмотрим частные случаи направления удара к поверхности преграды – по нормали и под углом. В случае удара по нормали для ударника в форме клина можно провести верификацию постановки задачи путем сравнения численного и аналитического решений.

2. Проникание жесткого плоского ударника в полупространство при ударе по нормали

Рассмотрим частный случай – жесткий плоский ударник массой m проникает по нормали в преграду. Рассмотрим ударник в форме клина (рис. 2), а также в форме диска. Геометрические и физические свойства преграды: толщина w ; длина клина $h = h_0 + h_1$; силы сопротивления (непрерывные или кусочно-постоянные) – динамическая твердость $H_d(x)$, плотность $\rho(x)$, касательное сопротивление $\tau(x)$.

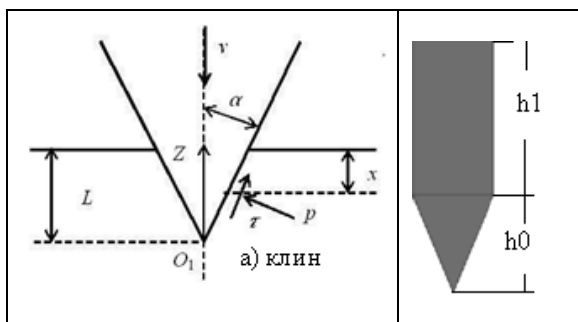


Рис. 2. Схема проникания плоского ударника в плиту по нормали

Пусть $v(x)$ – скорость ударника,
 $p(x) = H_d(x) + \cos^2\beta \cdot \rho(x)v^2(x)$,
 $\tau(x) = k_s\tau_s(x)$

– нормальное и касательное сопротивления на боковой поверхности на расстоянии x от поверхности преграды; L_k – текущая глубина проникания; все точки ударника с локальной координатой Z взаимодействуют с преградой, никаких свободных зон от сопротивления $p(x)$ и $\tau(x)$ не образуется.

В этом случае три уравнения (1.4) движения ударника в преграде сводятся к одному (поступательное движение по вертикали)

$$\frac{mdv}{dt} = -F_z. \quad (2.1)$$

Дифференциальное уравнение (2.1) дополняется уравнением для глубины проникания

$$\frac{dL}{dt} = v. \quad (2.2)$$

В результате получаем задачу Коши с начальными условиями

$$t = t_0 = 0 : v = V_0, L = 0. \quad (2.3)$$

Процесс решения задачи выполняется до тех пор, пока либо ударник остановится (скорость $v(t_k) = 0$) в преграде, либо ударник полностью пройдет через преграду, т.е. например, для клина $L(t_k) \geq w + h_0 + h_1$.

Сила сопротивления F_z в преграде определяется как

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{S_B} [p_z(x) + \tau_z(x)] dS = \\ &= 2 \int_{L_0=0}^{L_1} [p(x)\sin\alpha + \tau(x)\cos\alpha] \frac{dZ}{\cos\alpha} = \\ &= 2 \int_{L_0}^{L_1} \{ [H_d(x) + \sin^2\alpha \rho(x)v^2(x)] t g\alpha + \\ &\quad + \tau(x) \} dZ. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если плоский ударник имеет форму клина с углом α , то огибающая ударника имеет вид $(Z) = Ztg\alpha$, т.е. $t g\alpha = f'(Z) = const$.

Если плоский ударник имеет форму диска, то уравнение огибающей ударника можно получить из уравнения окружности

$$\left(Z - \frac{d}{2}\right)^2 + (f(Z) - 0)^2 = \frac{d^2}{4}.$$

В результате уравнение огибающей диска имеет вид $f(Z) = \sqrt{d \cdot Z - Z^2}$, а угол наклона, необходимый для вычисления действующих сил, в уравнении (2.1) будет иметь вид

$$t g\alpha = f'(Z) = 0.5(d - 2Z)/\sqrt{d \cdot Z - Z^2}.$$

Локальные пределы интегрирования определяются из соответствующих условий. Возможны следующие случаи:

1) ударник не полностью внедрился в преграду, т.е. текущая глубина внедрения $L_k < H_0$, или $L_k < H_0 + H_1$ для клина и $L_k < d/2$ для диска. В этом случае нижний локальный предел $L_0=0$, верхний $L_1 = L_k$, а глобальная координата $x = L_k - Z$ при вычислении $p(x), \tau(x)$;

2) ударник полностью внедрился в преграду и в ней находится, т.е. $L_k < w$; $L_k > H_0 + H_1$ для клина или $L_k > d$ для диска.

В этом случае нижний локальный предел $L_0=0$, а верхний $L_1 = H_0 + H_1$ или $L_1 = d/2$ для диска, а глобальная координата $x = L_k - Z$;

3) ударник прошел сквозь преграду и частично вышел из преграды, т.е.

$$L_k > w; \text{ и } L_k < w + H_0 + H_1.$$

В этом случае нижний локальный предел $L_0 = L_k - w$, верхний предел $L_1 = H_0 + H_1$, а глобальная координата $x = L_k - Z$.

При вычислении интегралов свойства преграды, которая в общем случае может быть слоистой, учитываются естественным образом при проникании ударника из одного слоя в следующий слой.

3. Аналитическое решение проникания ударника по нормали в преграду

Рассмотрим ударник в форме клина (рис. 1) и его проникание по нормали в преграду с кусочно-однородными физико-механическими свойствами.

Построим аналитическое решение для скорости ударника как функции глубины проникания $v(L)$.

3.1. Однослойная преграда

Для простой однородной преграды толщиной h выражение (2.4) упрощается:

$$F_z = 2 \int_{L_0=0}^{L_1} \{[H_d + \sin^2 \alpha \cdot \rho v^2]tg \alpha + \tau\} dZ = 2\{[H_d + \sin^2 \alpha \cdot \rho v^2]tg \alpha + \tau\}L. \quad (3.1)$$

Для аналитического решения задачи Коши для уравнений (2.1) и (2.2) запишем уравнение движения ударника в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_z}{m} = -(A + Bv^2)L, \quad (3.2)$$

где

$$A = \frac{2(H_d tg \alpha + k_s \tau)}{m}, \quad B = \frac{2 \sin^2 \alpha tg \alpha \rho}{m}. \quad (3.3)$$

Ускорение в (3.2) представим в виде

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dL}\right) \left(\frac{dL}{dt}\right) = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dL} = -(A + Bv^2)L. \quad (3.4)$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое можно записать в виде, удобном для интегрирования в переменных v, L :

$$\frac{d(v^2)}{A + Bv^2} = -2LdL. \quad (3.5)$$

При интегрировании получим аналитическое выражение связи между квадратом текущей скорости и соответствующей глубиной проникания в однородную преграду:

$$v^2(L) = -\frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B} + v_0^2\right) e^{-BL^2}. \quad (3.6)$$

Если ударник находится внутри преграды, то его скорость на выходе из преграды будет иметь вид

$$V_h^2 = v^2(h) = -\frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B} + v_0^2\right) e^{-Bh^2}. \quad (3.7)$$

Если в (3.7) выражение для определения V_h меньше нуля, то это означает – ударник остановится в преграде и нужно определить глубину проникания L_k из соотношения (3.7).

В результате

$$L_k = \left[\frac{1}{B} \ln\left(1 + \frac{B}{A} v_0^2\right)\right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Для контроля определим конечную скорость V_k ударника в преграде (должно быть ~ 0):

$$V_k^2 = v^2(L_k) = -\frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B} + v_0^2\right) e^{-B \cdot L_k^2}. \quad (3.9)$$

Для случая проникания ударника по нормали в однородную преграду, сравнение скорости ударника $v(L)$ в численном решении задачи (2.1)–(2.3) с аналитическим решением (3.6) показало их совпадение. Это следует из графиков $v(L), V_k$.

Анализ графика невязки $\delta(L) = v(L) - V_k$ показал, что даже в однородной преграде в момент времени, когда скорость ударника стремится к нулю (~ 10 – 20 м/сек), в преграде возникает некоторая особая точка, в окрестности которой невязка $\delta(L)$ между численным и аналитическим решениями растет скачком.

3.2. Двуслойная преграда

Пусть преграда многослойная и каждый слой обладает однородными своими физическими свойствами (толщина h_i , динамическая твердость H_{di} , плотность ρ_i , касательное сопротивление τ_i), то в уравнении движения ударника (2.1) величина силы сопротивления $F_z = \sum_1^k F_{zi}$ при проникании в очередной k -й слой преграды будет меняться, а потому можно ввести обозначения – для i -го слоя:

$$F_{zi} = \int_{L_{i-1}}^{L_i} \{[H_{di} + \sin^2 \alpha \cdot \rho_i v^2]tg \alpha + \tau_i\} dZ = 2\{[H_{di} + \sin^2 \alpha \cdot \rho_i v^2]tg \alpha + \tau_i\}(L_i - L_{i-1}). \quad (3.10)$$

Для текущего k -слоя проникания ударника сила сопротивления:

$$F_{zk} = \int_{L_{k-1}}^L \{[H_{dk} + \sin^2 \alpha \cdot \rho_k v^2]tg \alpha + \tau_k\} dZ = 2\{[H_{dk} + \sin^2 \alpha \cdot \rho_k v^2]tg \alpha + \tau_k\}(L - L_{k-1}). \quad (3.11)$$

Пусть преграда состоит из двух слоев, а ударник вошел во второй слой, т.е. текущая глубина проникания $L > h_1$. В этом случае уравнение проникания во 2-й слой имеет вид $\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dL} = -(A_1 + B_1 v^2)h_1 - (A_2 + B_2 v^2)(L - h_1)$,

где

$$A_1 = \frac{2(H_{d1} tg \alpha + k_{s1} \tau_1)}{m}, \quad B_1 = \frac{2 \sin^2 \alpha tg \alpha \rho_1}{m}.$$

Итак, нужно решить уравнение (3.12) с начальным условием

$$v^2(h_1) = -\frac{A_1}{B_1} + \left(\frac{A_1}{B_1} + v_0^2\right) e^{-B_1 h_1^2}, \quad (3.13)$$

где

h_1 – толщина лицевого слоя при условии, что $v^2(h_1) > 0$.

Уравнение (3.12) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dL} &= -[(B_1 - B_2)h_1 + B_2 L]v^2 - \\ &- [(A_1 - A_2)h_1 + A_2 L] = \\ &= (a + bL)v^2 + (c + dL), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -(B_1 - B_2)h_1, \quad b = -B_2, \\ c &= -(A_1 - A_2)h_1, \quad d = -A_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dL} = (a + b \cdot L)v^2 + (c + d \cdot L). \quad (3.16)$$

Рассмотрим классический метод решения дифференциальных уравнений – метод вариации постоянных.

Представим (3.16) в виде

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(a + b \cdot x), \\ q(x) &= 2(c + d \cdot x), \quad x \equiv L, \quad y \equiv v^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Решение ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}.$$

Применив метод вариации постоянных, получим

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_s^x p(\xi)d\xi} ds. \quad (3.19)$$

В соответствии с (3.18) аналитическое решение задачи Коши для уравнения (3.17) имеет вид

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{2[a(x-x_0)+0,5b(x^2-x_0^2)]} + \\ &+ \int_{x_0}^x 2(c + d \cdot s) e^{2[a(x-s)+0,5b(x^2-s^2)]} ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Полученное решение имеет численно-аналитическое представление, так как интеграл вычисляется численно.

Начальными условиями являются значения текущей глубины и скорости при выходе острия клина на границу слоев:

$$x_0 = h_1, \quad y_0 = v^2(h_1).$$

Запишем полученное решение в обозначениях проникания в двухслойную преграду:

$$\begin{aligned} v^2(L) &= v^2(h_1) e^{2[a(L-h_1)+\frac{b}{2}(L^2-h_1^2)]} + \\ &+ \int_{h_1}^L 2(c + d \cdot s) e^{2[a(L-s)+\frac{b}{2}(L^2-s^2)]} ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Результаты численного эксперимента показали, что для случая проникания ударника по нормали в двухслойную преграду невязка между численным и аналитическим решением мала, но может увеличиваться при остановке ударника.

4. Проникание жесткого плоского ударника в преграду при ударе под углом

Рассмотрим схему проникания плоского заостренного ударника (с произвольной образующей $f(Z)$ в локальной системе координат O_1YZ) под углом φ_0 к поверхности преграды (рис. 3).

Текущий угол поворота φ ударника – это угол между осью симметрии ударника и нормалью к преграде.

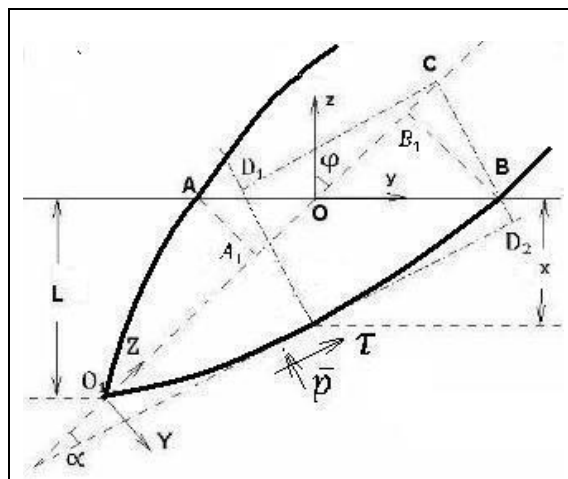


Рис. 3. Схема проникания ударника в плиту под углом φ

В этом случае уравнения движения (1.4) ударника в преграде сводятся к двум уравнениям (поступательное движение под углом к преграде)

$$\frac{mdv}{dt} = -F, \quad J \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (4.1)$$

Здесь v, F – скорость и сила ударника вдоль оси; J, M, ω – момент инерции ударника относительно центра тяжести, момент сил сопротивления и скорость изменения угла наклона.

Дифференциальные уравнения (4.1) дополняются уравнениями для глубины проникания и угла наклона φ :

$$\frac{dL}{dt} = v \cos \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (4.2)$$

В результате получаем задачу Коши с начальными условиями:

$$t = t_0: v = V_0, L = 0, \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0. \quad (4.3)$$

Сила сопротивления F и момент M от элементарных сил сопротивления $\tau(x)$ и $p(x)$ складываются из соответствующих сил и моментов вдоль левой образующей O_1A_1 и правой образующей O_1B_1 (соответственно верхняя и нижняя часть ударника):

$$F = F_{left} + F_{right}, M = M_{left} + M_{right}. \quad (4.4)$$

$$F_{left} = \int_{L_0}^{O_1A_1} [p(x) \cdot tg\alpha + \tau(x)] dZ, \quad (4.5)$$

$$F_{right} = \int_{L_0}^{O_1B_1} [p(x) \cdot tg\alpha + \tau(x)] dZ.$$

$$M_{left} = \int_{L_0}^{O_1A_1} [dM_{left}(p(x)) + dM_{left}(\tau(x))] dZ,$$

$$M_{right} = \int_{L_0}^{O_1B_1} [dM_{right}(p(x)) + dM_{right}(\tau(x))] dZ. \quad (4.6)$$

При вычислении подворачивающего момента от касательного усилия $\tau(x)$ и нормального усилия $p(x)$, для каждой точки, лежащей на левой и правой образующих ударника, нужно определять соответствующее "плечо" CD_1 и CD_2 , т. е. расстояния от точек D_1 и D_2 до центра тяжести C .

Для вычисления моментов от элементарных сил проще определить расстояние между центром тяжести C и текущей точкой D , лежащей на соответствующей образующей ударника.

Левой образующей соответствует

$$Y = -f(Z), \text{ а правой} - Y = f(Z).$$

Из прямоугольного треугольника получим

$$CD = \sqrt{(L_c - Z)^2 + f^2(Z)}, \quad (4.7)$$

где $L_c = O_1C$ – расстояние от центра тяжести до начала ударника.

Для получения элементарного момента от усилия $p(x)$ нужно спроектировать соответствующее усилие на направление, перпендикулярное к отрезку CD :

$$dM_{left}(p(x)) = -dM_{right}(p(x)) = -p(x) \frac{dZ}{\cos\alpha} CD \cdot \cos(\psi - \alpha). \quad (4.8)$$

Аналогично

$$dM_{left}(\tau(x)) = -dM_{right}(\tau(x)) = \tau(x) \frac{dZ}{\cos\alpha} CD \cdot \sin(\psi - \alpha). \quad (4.9)$$

Здесь $\sin\psi = (L_c - Z)/CD$, ψ – угол между осью Y и направлением CD .

Момент, увеличивающий угол φ между нормалью и осью ударника (денормализующий) считаем положительным, а уменьшающий этот угол (нормализующий момент) – отрицательным.

Для определения момента инерции рассмотрим параметрический вид частного случая ударника (рис. 4).

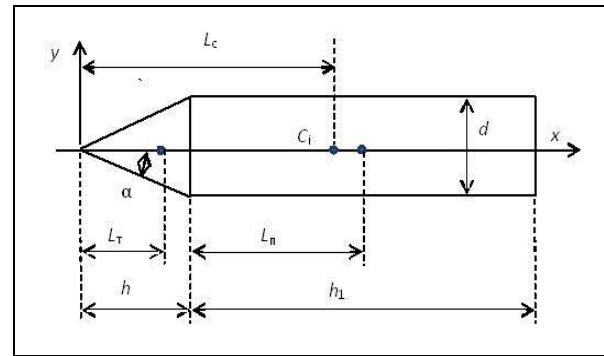


Рис. 4. Схема ударника

Длина головной части ударника – h , прямоугольной части – h_1 , диаметр – d .

Расстояние от "носика" ударника до центров тяжести частей ударника

$$L_T = (2/3)h, \quad L_{II} = (1/2)h_1.$$

Вес ударника складывается из головной и прямоугольной частей:

$$P = \left(\frac{hd}{2} + h_1d\right)\gamma, \quad (4.10)$$

где γ – удельный вес материала ударника.

Центр тяжести C_1 расположен на оси x (рис. 4) на расстоянии L_c от "носика" ударника

$$L_c = \frac{L_T S_T + (h + L_{II})h_1d}{S_T + S_{II}} = \frac{(1/3)h^2 + hh_1 + (1/2)h_1^2}{(1/2)h + h_1}, \quad (4.11)$$

где $S_T = 0.5hd$ – площадь треугольной части ударника, а $S_{II} = h_1d$ – площадь прямоугольной части.

Момент инерции J , фигурирующий в уравнении поворота ударника (4.1), представляет собой полярный момент инерции ударника относительно его центра тяжести C_1 , равен сумме соответствующих осевых моментов инерции:

$$J_C = J_x + J_y, \quad (4.12)$$

где J_y – момент инерции относительно оси, параллельной оси y и проходящей через центр тяжести ударника C_1 .

Моменты инерции головной (треугольной) и прямоугольной частей ударника относительно осей, проходящих через их центры тяжести:

$$\begin{aligned} J_{\text{тх}} &= dh^3/48, \quad J_{\text{ту}} = dh^3/36, \\ J_{\text{пх}} &= h_1d^3/12, \quad J_{\text{пу}} = dh_1^3/12. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Соответствующие осевые моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести ударника:

$$\begin{aligned} J_{\text{тус}} &= J_{\text{ту}} + S_{\text{т}}(L_c - \frac{2}{3}h)^2, \\ J_{\text{пус}} &= J_{\text{пу}} + S_{\text{п}}(h + \frac{1}{2}h_1 - L_c)^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Суммарные осевые моменты, определяющие итоговый момент (4.12):

$$J_x = J_{\text{тх}} + J_{\text{пх}}, \quad J_y = J_{\text{тус}} + J_{\text{пус}} \quad (4.15)$$

В результате, момент инерции относительно центра тяжести тела, входящий в уравнение поворота, определяется как

$$J_c = \frac{m}{V} \int xy dV = \frac{m}{V} J, \quad (4.16)$$

где J – момент инерции (4.12); $m, V, \frac{m}{V}$ – масса, объем и средняя плотность ударника.

При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (4.1)–(4.2) нужно в каждый момент времени выполнить следующие подзадачи:

Подзадача 4а: для заданной функции $f(Z)$, текущем значении φ угла наклона ударника и соответствующей глубине проникания L нужно определить текущие точки пересечения образующей ударника с лицевой поверхностью преграды, т. е. координаты точек A и B . Если из этих точек опустить перпендикуляры на ось ударника, то получим точки A_1 и B_1 . Эти точки определяют локальные верхние пределы интегрирования O_1A_1 и O_1B_1 соответственно по левой и правой кривой-образующей ударника при вычислении суммарных проекций сил на оси Oyz , связанные с преградой.

Прямая с отрезком AB в локальной системе координат ZO_1Y записывается как

$$Z = \frac{L}{\cos\varphi} + Ytg\varphi. \quad (4.17)$$

Левая и правая образующие ударника записываются как

$$Y = -f(Z) \quad \text{и} \quad Y = f(Z). \quad (4.18)$$

Пересечения линии AB с образующими ударника определяют положения точек A и B .

Решая уравнения (4.17) и (4.18), исключая Y , получим уравнения для определения длин отрезков O_1A_1 и O_1B_1 , которые задают

пределы интегрирования вдоль образующей ударника при суммировании усилий и моментов вдоль левой и правой образующей ударника:

$$\frac{L_k}{\cos\varphi} - f(O_1A_1)tg\varphi - O_1A_1 = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{L_k}{\cos\varphi} + f(O_1B_1)tg\varphi - O_1B_1 = 0. \quad (4.20)$$

В качестве частного случая функции $f(Z)$ – для проверки – можно выбрать кусочно-линейную функцию:

$$f(Z) = \begin{cases} Ztg\alpha, & 0 \leq Z \leq H_0, \\ H_0tg\alpha, & Z > H_0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Таким образом, для каждого временно-го шага при вычислении интегралов по боковым поверхностям (образующим) плоского ударника необходимо предварительно решить уравнения (4.19) и (4.20) для определения локальных пределов интегрирования по Z : O_1A_1 и O_1B_1 .

В результате, в *подзадаче 4а* возможны следующие случаи с учетом текущего угла φ_k наклона ударника:

1) ударник не полностью внедрился в преграду, т. е.

$$L_k < H_0 \cos\varphi_k \quad \text{или} \quad L_k < (H_0 + H_1) \cos\varphi_k.$$

В этом случае нижний локальный предел $L_0=0$, верхний предел $L_1 = L_k/\cos\varphi_k$, а глобальная координата при интегрировании:

$$x = L_k - Z \cos\varphi_k;$$

2) ударник полностью внедрился в преграду и в ней находится, т. е.:

$$L_k < w \quad \text{и} \quad L_k > (H_0 + H_1) \cos\varphi_k.$$

В этом случае локальные пределы интегрирования

$$L_0=0, \quad L_1 = H_0 + H_1, \quad \text{а} \quad x = L_k - Z \cos\varphi_k;$$

3) ударник прошел сквозь преграду и частично вышел из преграды, т. е.:

$$L_k > w \quad \text{и} \quad L_k < w + (H_0 + H_1) \cos\varphi_k.$$

В этом случае нижний локальный предел: $L_0 = L_k - w$, верхний предел: $L_1 = H_0 + H_1$, а глобальная координата: $x = L_k - Z$.

В процессе проникания в преграду текущий угол наклона ударника может увеличиваться и достигать 90° , то далее при движении возникает эффект "рикошета". Поэтому в *подзадаче 4а* значения $\cos\varphi_k$ и $tg\varphi_k$ вычисляются по модулю.

Подзадача 4б: вычисление интегралов по поверхности ударника (4.4)–(4.9) для определения силы сопротивления и подворачивающих моментов.

Для каждой точки, лежащей на левой и правой образующих ударника, нужно определять соответствующее "плечо" CD_1 и CD_2 – расстояния от точек D_1 и D_2 до – центра тяжести C ударника.

Подзадача 4в: определение силы сопротивления F и момента M (формулы 4.3–4.6) для решения дифференциальных уравнений (4.1–4.2).

5. Модуль для решения задачи проникания ударника в неоднородную преграду

Алгоритм построенной модели динамического проникания жесткого ударника в преграду реализован на алгоритмическом языке Turbo Pascal в объектно-ориентированной среде компилятора Borland Delphi 7 с использованием необходимых для визуализации результатов графических средств и высокоточных численных методов.

Реализованы следующие задачи:

– **задача "task1"** – численное решение дифференциальных уравнений (2.1)–(2.2) проникания ударника *по нормали* к поверхности преграды. В задаче предусмотрено вычисление аналитического решения (3.20) и визуальное графическое сравнение с численным решением. На рис. 5 приведена активная форма модуля для задачи динамического проникания ударника в преграду по нормали.

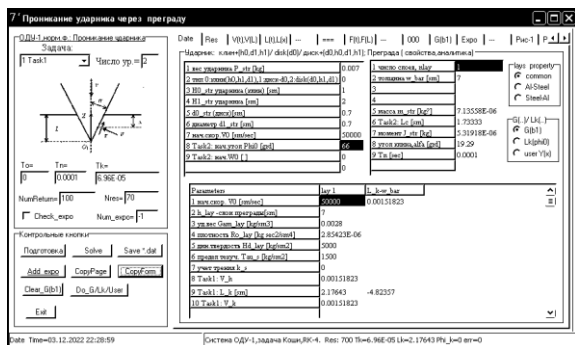


Рис. 5. Активная форма для задачи – удар по нормали

– **задача "task2"** – численное решение уравнений (4.1)–(4.2) проникания ударника *под углом* к поверхности преграды. На рис. 6 приведена одна из вкладок активной формы, соответствующая задаче динамического проникания ударника в двухслойную преграду под углом.

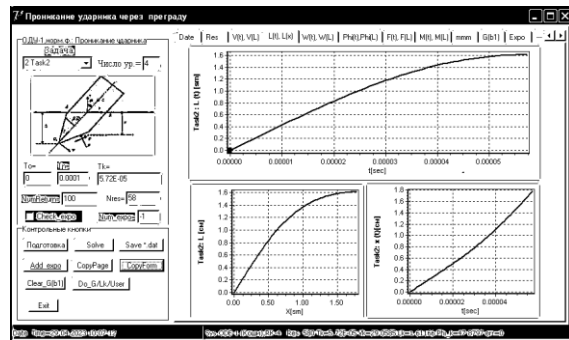


Рис. 6. Удар под углом: графики $L(t)$, $L(x)$, $x(t)$

В алгоритме модуля предусмотрено:

- 1) возможность возникновения "рикошета" при проникании ударника под углом;
- 2) интерактивная возможность задать свойства преграды – число слоев, свойства слоев;
- 3) интерактивное накопление результатов различных расчетов на одной **chart-диаграмме**;
- 4) интерактивное формирование данных в серии расчетов для построения графика функциональной зависимости от характерного параметра задачи;
- 5) визуализация получаемых решений (таблица, графики);
- 6) возможность сохранения таблицы результатов в буфере для сохранения их в текстовом файле.

Для выполнения интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих условиям выбранной задачи Коши, и вычисления интегралов был использован пакет процедур по численным методам "Turbo Pascal Numerical Methods Toolbox by Borland International" [9].

Решение систем дифференциальных уравнений выполняется методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности, а для вычисления интегралов используется метод Симпсона.

В задаче проникания ударника под углом для решения нелинейных алгебраических уравнений (4.19) и (4.20) при определении верхнего предела интегрирования использован метод деформируемых многогранников Нелдера–Мида [8], в котором задача сводится к геометрическому формированию функционала с привлечением штрафных функций для поиска минимума функционала.

Метод хорошо апробирован и используется во многих коммерческих прикладных пакетах программ.

На активной форме модуля расположены:

- информационная панель (слева) для интерактивного выбора – задачи, некоторых базовых параметров, структуры и свойств преграды, и панель контрольных кнопок для выполнения предусмотренных в модуле действий;

- панель Page Control с набором вкладок для интерактивного ввода и уточнения входных технических параметров задачи, для результатов решения задачи и визуализации полученного решения.

На вкладках после решения будут расположены соответственно графики:

1) скорость $v(t), v(L)$; 2) глубина проникания $L(t), L(X), X(t)$; 3) скорость изменения угла наклона ударника $w(t), w(L)$; 4) угол наклона $\varphi(t), \varphi(L)$; 5) $F(t), F(L)$; 6) момент $M(t), M(L)$. Возможное возникновение "рикошета" начинается после контрольной отметки на графиках.

6. Численные результаты

В качестве примера работы расчетного модуля на рис. 7 приведены графики зависимости $v(L)$ для различных начальных углов соударения

$$\varphi_0 = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ.$$

Для $\varphi_0 = 50^\circ$ и более в расчете был выявлен эффект рикошета ударника.

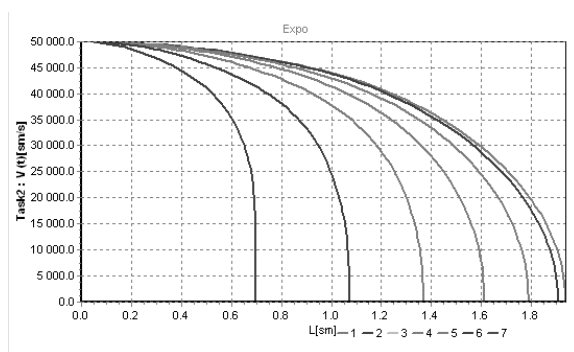


Рис. 7. Зависимости скорости от глубины проникания при различных начальных углах соударения

На рис. 8 показаны зависимости текущих углов ориентации ударника от глубины проникания при различных начальных углах соударения.

Как следует из рис. 8, на начальной стадии процесса проникания угол практически не меняется, резкое увеличение угла происходит на конечной стадии, когда скорость проникания падает более чем в два раза.

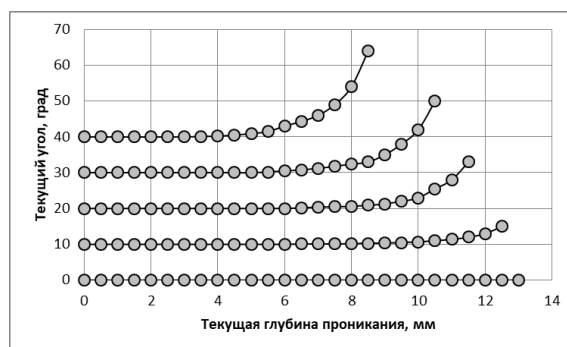


Рис. 8. Зависимости текущего угла от глубины проникания при различных начальных углах соударения

При этом возможна ситуация, называемая рикошетом, когда угол между осью ударника и нормалью к поверхности преграды достигает 90 и более градусов.

Чем больше начальный угол удара, тем меньше конечная глубина проникания – тем выше защитные свойства преграды. На рис. 9 (для тех же параметров задачи) представлена зависимость конечной глубины проникания от начального угла удара при фиксированной начальной скорости 500 м/с.

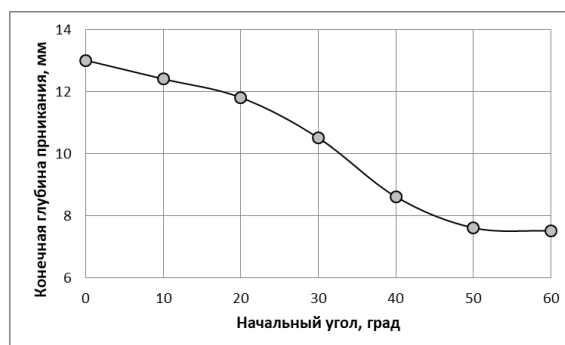


Рис. 9. Зависимость конечной глубины проникания от начального угла соударения

Рассмотрим теперь некоторые результаты расчетов процесса проникания жесткого ударника в неоднородную преграду. Ранее [3–5], было показано, что при ударе по нормали в классе пластин с кусочно-непрерывными механическими свойствами по толщине, оптимальными защитными свойствами (минимального веса) обладает двухслойная преграда с более твердым и тяжелым лицевым слоем.

Представляет интерес проверить, выполняется ли данный результат при ударе под углом. Была проведена серия расчетов для двухслойных пластин с отношением твердостей слоев $H_{д1}/H_{д2} = 5$ и отношением удельного веса $\gamma_1/\gamma_2 = 2,9$.

Для случая двухслойной преграды введено понятие погонного веса преграды как функции от толщины h_1 лицевого 1-го слоя преграды

$$G(h_1) = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 (L_k - h_1),$$

где γ_1, γ_2 – удельный вес слоев преграды, а L_k – глубина проникания ударника.

Было подтверждено, что и для случая проникания под углом, аналитические результаты по оптимальной структуре преграды, полученные ранее, являются справедливыми.

Более того, выигрыш по весу от применения оптимальной двухслойной преграды может возрастать от 20–25 % (при ударе по нормали) до 30–35 % (при ударе под большими углами) по сравнению с однородной преградой.

Кроме того, получено, что отношение слоев оптимальной двухслойной преграды зависит от начального угла соударения. Относительная толщина первого слоя (от общей толщины двухслойной преграды) находится в диапазоне от 10 % до 35 % в зависимости от вероятных параметров соударения.

Заключение

Представлена инженерная постановка задачи динамического проникания плоского жесткого ударника в неоднородную преграду по нормали и под углом.

Разработан и реализован алгоритм решения задачи на языке Turbo Pascal в объектно-ориентированной среде компилятора Borland Delphi 7 с визуализацией результатов.

Выполнен анализ особенностей кинематики проникания ударника по нормали и под углом.

Получены оптимальные по весу двухслойные защитные системы при различных начальных углах и скоростях ударника.

Список источников

1. *Витман Ф.Ф., Степанов В.А.* Влияние скорости деформации на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10^2 – 10^3 м/с // *Некоторые проблемы прочности твердого тела.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 208–221.
2. *Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях* / под ред. Н.А. Златина и Г.И. Мишина М.: Наука, 1974. 344 с.
3. *Аптуков В.Н.* Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным рас-

пределением свойств по толщине // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* 1985. № 3. С. 149–152.

4. *Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В.* Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 104 с.
5. *Аптуков В.Н., Дубинский А.В., Хасанов А.Р.* Исследование и оптимизация защитных свойств многослойных металлических преград при высокоскоростном ударе. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т. 2019. 430 с.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
7. *Аптуков В.Н.* Взаимодействие ударника с анизотропной преградой / Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 103–110.
8. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.
9. *Пакет процедур по численным методам "TurboPascal Numerical Methods Toolbox".* Copyright© 1986, 87 by Borland International: справ. описание. Пермь: ПГУ, 1997.

References

1. *Vitman F.F., Stepanov V.A.* Vliyanie skorosti deformacii na soprotivlenie deformirovaniyu metallov pri skorostyakh udara 102–103 m/s. Nekotorye problemy prochnosti tverdogo tela. M.: Izd-vo AN SSSR; 1959. P. 208–221. (In Russ.).
2. *Zlatina N.A., Mishina G.I.* Ballisticheskie ustanovki i ih primeneniye v eksperimental'nyh issledovaniyah / pod red. N.A. Zlatina i G.I. Mishina. M.: Nauka; 1974. 344 p. (In Russ.).
3. *Aptukov V.N.* Optimal'naya struktura neodnorodnoj plastiny s nepreryvnyim raspredeleniem svojstv po tolshchine. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1985;(3): 149–152. (In Russ.).
4. *Aptukov V.N., Murzakaev R.T., Fonarev A.V.* Prikladnaya teoriya pronikaniya. M.: Nauka; 1992. 104 p. (In Russ.).
5. *Aptukov V.N., Dubinskij A.V., Hasanov A.R.* Issledovanie i optimizaciya zashchitnyh svojstv mnogoslujnyh metallicheskih pregrad pri vysokoskorostnom udare. Perm': Perm. gos. nac. issled. un-t; 2019. 430 p. (In Russ.).
6. *Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V. i dr.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov. M.: Nauka; 1976. 392 p. (In Russ.).

7. *Aptukov V.N. Vzaimodejstvie udarnika s anizotropnoj pregradoj / Sticheskie i dinamicheskie zadachi uprugosti i vyazkouprugosti. Sverdlovsk: UNC AN SSSR; 1983. P. 103–110. (In Russ.).*
8. *Himmel'blau D. Prikladnoe nelinejnoe programmirovaniye (Applied Nonlinear Programming, 1972). M.: Mir; 1975. 536 p. (In Russ.).*
9. *Paket procedur po chislennym metodam "TurboPascal Numerical Methods Toolbox". Copyright© 1986, 87 by Borland International: sprav. opisanie. Perm': PSU; 1997. (In Russ.).*

Информация об авторах:

В. Н. Амтуков – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID (РИНЦ): 11997;

Л. В. Ландик – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID (РИНЦ): 119528;

А. В. Вашкевич – студент-бакалавр механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15).

Information about the authors:

V. N. Aptukov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, the Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID (RINTS): 11997;

L. V. Landik – Engineer of the Department of Computational and Experimental Mechanics, the Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID (RINTS): 119528 ;

A. V. Vashkevich – Bachelor student, the Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068).