Научная статья

УДК 512.54
DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23

Ослабления условия инцидентности для подгрупп, рассмотренные алгебраистами Пермского университета

Яков Давидович Половицкий[1], Татьяна Михайловна Коневских[2]
[1,2]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
[1]yakovpol1935@mail.ru;
[2]konevskihtm@yandex.ru

Аннотация. В первой части статьи приводятся условия инцидентности, введенные и рассмотренные в публикациях алгебраистов Пермского университета, и сведения о том, где и какие классы групп ими описаны. Во второй части анонсируются результаты, полученные пермскими алгебраистами при изучении групп с рядом новых обобщений условий инцидентности для нециклических подгрупп: приводятся формулировки доказанных ими 14 новых теорем. Доказательства этих теорем предполагается опубликовать в серии отдельных статей.

Ключевые слова: *группа; инцидентность; нециклическая подгруппа*

Для цитирования: *Половицкий Я. Д., Коневских Т. М.* Ослабления условия инцидентности для подгрупп, рассмотренные алгебраистами Пермского университета // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 15–23. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23.

Статья поступила в редакцию 07.08.2023; одобрена после рецензирования 24.11.2023; принята к публикации 16.03.2024.

Research article

Weakening Incidence Conditions for Subgroups Considered by Algebraists From Perm University

Yakov D. Polovitsky[1], Tatiana M. Konevskikh[2]

[1,2]Perm State University, Perm, Russia
[1]yakovpol1935@mail.ru;
[2]konevskihtm@yandex.ru

Abstract. In the first part of this article incidence conditions, introduced and considered by algebraists from Perm University, and information about where and which class of groups are described by them, are given. In the second part, the results, received by algebraists from Perm University in considering of groups with several new generalizations of incidence conditions for noncyclic subgroups, are announced: the formulations of the 14 new theorems proved by them are given. The proofs of these theorems are supposed to be published in a series of separate articles.

Keywords: *group; incidence; noncyclic subgroup*

For citation: Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2024), "Weakening Incidence Conditions for Subgroups Considered by Algebraists From Perm University", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 15-23. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23.

The article was submitted 07.08.2023; approved after reviewing 24.11.2023; accepted for publication 16.03.2024.

Введение

В начале 1990-х годов доцент кафедры высшей алгебры и геометрии Пермского университета Я. Д. Половицкий предложил студенту механико-математического факультета В. Л. Чечулину рассмотреть в курсовой, а затем и дипломной работах конечные группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп. В 1994–1997 гг. на этой кафедре работал приехавший из Киева профессор Н. С. Черников. Он проявил интерес к этой тематике и описал бесконечные локально ступенчатые группы с этим условием и внес существенные коррективы в полученное Я.Д. Половицким и В. Л. Чечулиным описание конечных групп такого рода. Полученные результаты опубликованы в 1995 г. в совместной статье [1] этих трех авторов*.

С этого времени сотрудниками и студентами Пермского университета рассмотрено более 15 различных ослаблений условия инцидентности для подгрупп, предложенных Я.Д. Половицким. Ряд результатов, полученных в выпускных работах студентов, не был опубликован. К настоящему времени опубликованы результаты изучения некоторых классов групп с 13 условиями такого рода. Перечень рассмотренных в этих публикациях условий и классов описанных там групп приведен в первой части настоящей статьи.

Во второй ее части анонсируются еще не опубликованные результаты изучения групп с рядом новых обобщений условия инцидентности для нециклических подгрупп.

Основные определения

Определение A. Две подгруппы группы G называются *инцидентными*, если одна из них содержится в другой.

Определение B. Пусть Π – некоторое свойство, формулируемое на языке пар подгрупп группы G. Если в этой группе либо любая пара подгрупп, обладающая свойством Π, инцидентна, либо в G нет ни одной пары различных подгрупп, которая обладает свойством Π, то будем говорить, что G *удовлетворяет условию инцидентности для пар подгрупп со свойством* Π.

Ниже, в пункте 1, в качестве Π рассматривается условие "иметь пересечение определенного вида", а вид пересечения в каждом из пунктов 1.1–1.7 указывается.

Определение C. Пусть Σ – теоретико-групповое свойство. Будем говорить, что группа *удовлетворяет условию инцидентности для Σ-подгрупп*, если она является Σ-группой и не содержит ни одной пары неинцидентных Σ-подгрупп.

Ниже, в пунктах 2.1–2.3, перечисляется три условия инцидентности для Σ-подгрупп, а то, какое свойство Σ рассматривается в каждом из этих пунктов, видно из формулировки, приведенной в этом пункте.

Условия инцидентности, рассмотренные в публикациях алгебраистов Пермского университета

Эти условия можно разбить на три группы.

1. Условия инцидентности для подгрупп, имеющих пересечения определенного вида.
   1.1 Инцидентность подгрупп с нетривиальным пересечением.
   В [2] описаны локально ступенчатые и абелевы группы с этим условием.
   1.2 Инцидентность подгрупп, порядок пересечения которых делит фиксированное число n.
   Конечные разрешимые группы с этим условием описаны в [3].
   1.3 Примарное пересечение неинцидентных подгрупп непримарной группы.
   В [4] описаны конечные разрешимые непримарные группы с этим условием.
   1.4 Пересечение любых двух неинцидентных непримарных подгрупп является p-группой, где p – фиксированное простое число.
   На базе результатов изучения групп с условием 1.3 в [4] получено описание конечных непримарных разрешимых групп с условием 1. 4.
   1.5 Порядок пересечения любой пары неинцидентных подгрупп делит p^m, где m – фиксированное число, а p – простое число, причем простые числа

*В теореме 1 из [1] следует внести изменение в определяющем соотношении для групп типа 7. Там в показателе степени элемента a стоит сумма двух чисел, первое из которых либо 1, либо (-1). Нужно оставить только 1. Причина ошибки в том, что в пункте 2 доказательства достаточности в теореме 1 не приведено доказательство утверждения "H нормальна в G" (доказательство заменено словами "нетрудно видеть"). А это утверждение верно для всех рассмотренных в этом пункте случаев, кроме исключенного выше случая с (-1).

p у разных пар неинцидентных подгрупп могут быть как различными, так и одинаковыми.

Описание конечных разрешимых групп с этим условием для случаев $m = 1$ и $m = 2$ получено в [5], а для произвольного m – в [4].

1.6 Пересечение любых двух неинцидентных подгрупп является циклической группой.

В [6] описаны конечные разрешимые и бесконечные бинарно конечные группы с этим условием.

1.7 Пересечение любых двух неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой выбранной подгруппе группы G, является циклической группой.

Формулировка этого условия использует идею изучения групп с сепарирующими подгруппами, выдвинутую С. Н. Черниковым в [7]. Описание конечных разрешимых групп с условием 1. 7. проводилось в [8] и [9], а его результат анонсирован в [10]. Завершение доказательства приведенной в [10] теоремы будет опубликовано в отдельной статье.

2. Условия инцидентности для подгрупп, обладающих определенным свойствам.
   2.1. Инцидентность непримарных подгрупп.

   Локально конечные группы с этим условием описаны в [11].

   2.2. Инцидентность ненильпотентных подгрупп.

   В [12] получено описание конечных ненильпотентных групп с этим условием.

   2.3. Инцидентность неразрешимых подгрупп.

   В [12] показано, что описание неразрешимых групп с этим условием, имеющих минимальную неразрешимую подгруппу, сводится к описанию минимальных неразрешимых групп и их расширений с помощью примарных циклических или квазициклических групп.

3. Частичное обращение одного из следствий теоремы Лагранжа.

   Имеется в виду такое следствие: порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы.

   3.1. Условие L_Σ: для любых двух подгрупп A и B конечной группы G, из которых A является Σ-группой, таких, что $|A| \neq |B|$ и $|A| \mid |B|$, выполняется $A < B$ (здесь Σ – некоторое теоретико-групповое свойство).

   Рассмотрены группы с L_Σ-условием для следующих свойств Σ:

   3.1.1. Σ – свойство "быть подгруппой";

   3.1.2. Σ – свойство "быть подгруппой непростого порядка”.

   В [13] описаны конечные группы с условием L_Σ для каждого из свойств 3. 1. 1. и 3. 1. 2.

   3.1.3. Σ – свойство "быть нециклической группой".

   Описание конечных групп с условием L_Σ для свойства 3. 1. 3. начато в [14] и завершено в [15].

Анонс результатов, полученных алгебраистами Пермского университета при изучении групп с рядом обобщений условия инцидентности для нециклических подгрупп

Приводимые ниже новые условия инцидентности и теоремы, являющиеся результатом изучения достаточно широких классов групп с этими условиями, еще не публиковались. Доказательства этих теорем будут приведены позднее в серии отдельных статей.

Теоремы 1–13 получены авторами настоящей статьи, а теорема 14 – Я.Д. Половицким и О. В. Дербеневой.

Определение 1. Будем говорить, что в группе G выполняется J_{HH} *-условие* (J_{ni} *-условие*, $J_{H\overline{M}}$*-условие*), если либо любые две ее конечные нециклические неинцидентные подгруппы, соответственно, изоордны (изоморфны, являются максимальными в G), либо в G нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп.

Определение 2. Нециклическую группу, в которой выполняется J_{HH}-условие (J_{ni}-условие, $J_{H\overline{M}}$ -условие), назовем, соответственно, J_{HH} *-группой* (J_{ni} *-группой*, $J_{H\overline{M}}$ *-группой*).

Теорема 1. Конечная p-группа P тогда и только тогда является J_{HH}-группой, когда она – группа одного из следующих типов:

1. P–нециклическая группа и $|P| = p^3$;

2. $Z_{p^{n-1}} \times Z_p$, $n \geq 2$;
3. модулярная группа M_{p^n}, $n \geq 4$;
4. кватернионная группа Q_{16};
5. $Z_{p^2} \times Z_{p^2}$;
6. $|P| = p^n$, $n \geq 4$, $p^n \neq 16$, $\Omega_1(P) \subset \Phi(P)$, $\Phi(P) \cong Z_{p^{n-3}} \times Z_p$, каждая максимальная подгруппа группы P изоморфна либо $M_{p^{n-1}}$ (и хотя бы одна такая подгруппа в P существует), либо $Z_{p^{n-2}} \times Z_p$;
7. $P =< a > \leftthreetimes < b >$, $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p}$.

Теорема 2. Для бесконечной локально конечной p-группы P равносильны следующие условия:
1. J_{HH}-условие;
2. J_{ni}-условие;
3. $J_{H\bar{M}}$-условие;
4. в P нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп;
5. группа P изоморфна одной из следующих групп: C_{p^∞} или $C_{p^\infty} \times Z_p$.

Теорема 3. Для примарных локально конечных групп J_{HH}-условие и $J_{H\bar{M}}$-условие равносильны.

Теорема 4. Примарные локально конечные J_{ni}-группы – это все примарные локально конечные J_{HH}-группы, за исключением всех тех групп типа 6 теоремы 1, в каждой из которых есть хотя бы одна абелева максимальная подгруппа, и только такие группы.

Определение 3. Конечную непримарную группу G, имеющую хотя бы одну истинную нециклическую подгруппу, в которой для любой нециклической максимальной подгруппы M выполняется $|M| = m$, где m – одно и то же для всех таких M, назовем *in-группой* (а само указанное выше условие, которому удовлетворяет G, назовем *in-условием*).

Замечание 1. Из определения 3 видно, *in*-группа – это конечная непримарная группа с изоордными нециклическими максимальными подгруппами или с единственной нециклической максимальной подгруппой.

Теорема 5. Группа G тогда и только тогда является *in*-группой, когда она – группа одного из следующих типов:

1. $G = H \times Q$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_{q^m}$, $q \nmid |H|$, $Q \neq 1$;
2. $G = R \leftthreetimes P$, $R \cong Z_{r^k}$, $r \neq 2$, $k \geq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $(Z(G) \cap P) < P$;
3. $G = P \leftthreetimes R$, P – конечная p-группа, $R \cong Z_{r^l}$, $C_P(R) = \Phi(P)$ – циклическая группа, $(R \times \Phi(P)) < G$. Если P – циклическая группа, то $|P| = p \neq 2$ и $\left|R/_{R \cap Z(G)}\right| \geq r^2$.

Следствие. Для конечной непримарной группы G, имеющей не менее двух нециклических максимальных подгрупп, равносильны следующие условия:
1. все нециклические максимальные подгруппы группы G изоордны;
2. все нециклические максимальные подгруппы группы G составляют один класс сопряженных подгрупп;
3. $G = R \leftthreetimes P$, $R \cong Z_{r^m}$, $r \neq 2$, $m \geq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $(Z(G) \cap P) < P$;
4. все нециклические максимальные подгруппы группы G изоморфны.

Определение 4. Пусть G – конечная группа, не являющаяся минимальной нециклической. Если в G и в каждой ее нециклической подгруппе, не являющейся минимальной нециклической, выполняется *in*-условие, то G назовем *ins-группой*.

Теорема 6. Непримарная группа G тогда и только тогда является *ins*-группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду $Z = Z(G)$):
1. $G = H \times Q$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 1$, $q \nmid |H|$;
2. $G = R \leftthreetimes P$, $R \cong Z_{r^m}$, $r \neq 2$, $m \geq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $Z < P$;
3. $G = P \leftthreetimes R$, $|P| = p^n$, в P есть истинная нециклическая подгруппа, $R \cong Z_{r^m}$, $(Z \cap R) = 1$, для любой R_1, такой, что $1 < R_1 \leq R$, $C_P(R_1) = \Phi(P) \cong Z_{p^l}$, а для $G_1 = P \leftthreetimes R_1$, справедливо $(\Phi(P) \times R_1) < G_1$; для $R_0 < G$, такой, что $|R_0| = r$, справедливо утверждение: всякая истинная R_0-допустимая подгруппа группы P содержится в $\Phi(P)$;
4. $G = P \leftthreetimes R$, $R \cong Z_{r^m}$ и выполняется одно из следующих условий:
   - 4.1. $P \cong Q_8$, $r = 3$, $(Z \cap R) < R$;
   - 4.2. $P \cong E_{p^2}$, $G' \neq 1$, $r \nmid (p-1)$;
   - 4.3. $|P| = p$, $\left|R/_Z\right| \geq r^2$.

Теорема 7. Непримарная локально конечная группа G тогда и только тогда является J_{HH}-группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду $Z = Z(G)$):
1. $G = H \times Q$, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 1$, H изоморфна либо Q_8, либо E_{p^2}, $q \nmid |H|$;

2. $G = R \leftthreetimes P$, $R \cong Z_{r^2}$, $r \neq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $Z < P$;
3. $G = P \leftthreetimes R$, $R \cong Z_{r^m}$, $R_0 = \Omega_1(R)$ и выполняется одно из условий:
   3.1. либо $P \cong E_{p^2}$, либо $P \cong E_{p^3}$ и в P нет собственных R_0 -допустимых подгрупп;
   3.2. $P = (< a > \times < z >) \leftthreetimes < c >$, $a^p = z^p = c^p = 1, < z >= Z$, $c^{-1}ac = az$ и Z – единственная собственная R_0 -допустимая подгруппа группы P;
   3.3. $|P| = p \neq 2$, $G' \neq 1$;
   3.4. $P \cong Q_8$, $R \cong Z_{3^k}$, $(Z \cap R) < R$;
4. $G = H \times Q$, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 1$, $H = R \leftthreetimes P$, $|R| = r \neq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $Z(H) < P$;
5. бесконечная периодическая непримарная локально циклическая группа (то есть прямое произведение циклических p-групп и квазициклических p-групп по разным простым p);
6. $G = H \times P$, $P \cong C_{p^\infty}$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $p \nmid |H|$.

Следствие. (из теорем 1, 2 и 7). Локально конечная группа G тогда и только тогда является J_{HH}-группой, когда она – группа одного из типов теоремы 1, теоремы 2 или теоремы 7.

Теорема 8. Локально конечные J_{ni} -группы – это все локально конечные J_{HH}-группы, за исключением всех тех групп типа 6 теоремы 1, в каждой из которых есть хотя бы одна абелева максимальная подгруппа, и только такие группы.

Теорема 9. Для любой бесконечной локально конечной группы G равносильны следующие условия:
1. J_{HH}-условие;
2. J_{ni}-условие;
3. $J_{H\bar{M}}$-условие;
4. в G нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп;
5. G – группа одного из следующих видов:
   5.1. бесконечная периодическая локально циклическая группа;
   5.2. $G = C_{p^\infty} \times Z_p$;
   5.3. $G = C_{p^\infty} \times H$, где H – конечная минимальная нециклическая группа и $p \nmid |H|$.

В [1] определено понятие J_H -группы. Ниже приведем его в несколько иной форме.

Определение 5. Будем говорить, что в группе G выполняется J_H *-условие*, если в G нет ни одной пары неинцидентных нециклических подгрупп. Нециклическую группу с J_H*-условием* назовем J_H*-группой*.

Определение 6. Группу G назовем W*-группой* (*минимальной не* J_H*-группой*), если в каждой ее истинной подгруппе выполняется J_H-условие, а в самой группе G это условие не выполняется.

Теорема 10. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда является W-группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже p, q, r – различные простые числа, $Z = Z(G)$):
1. D_8;
2. E_{p^3};
3. G изоморфна p-группе P одного из типов 4–7 теоремы 1;
4. $G = M \leftthreetimes A$, $M \cong Q_8$, $|A| = 2$, $\Omega_1(G) \cong E_4$;
5. $G = P \leftthreetimes B$, $B = Q \times R$, $|P| = p$, $Q \cong Z_{q^m}$, $R \cong Z_{r^t}$, $Z \subset B$ и $\left|{}^{B}/_{Z}\right| = qr$;
6. $G = (A \leftthreetimes Q) \times R$, $Q \cong Z_{q^m}$ и выполняется одно из условий:
   6.1. $R = 1$, A изоморфна Z_{p^2} или Z_{pr}, $Z \subset Q$ и $\left|{}^{Q}/_{Z}\right| = q$;
   6.2. $|A| = p$, $|R| = r$, $\left|{}^{Q}/_{Q \cap Z}\right| = q^2$;
7. $G = H \times K$, H – конечная непримарная минимальная нециклическая группа, $K \cong Z_{p^r}$, $(|H|, |K|) = 1$;
8. $G = P \leftthreetimes Q$, $G' \neq 1$, $P \cong E_{p^2}$ и выполняется одно из условий:
   8.1. $Q \cong E_{q^2}$; $q \nmid (p - 1)$;
   8.2. $Q \cong Z_{q^m}$, $q \mid (p - 1)$, $\left|{}^{Q}/_{Q \cap Z}\right| = q$;
9. $G = P \leftthreetimes S$, $[P, S] \neq 1$, $P \cong E_{p^2}$, $S = QR$, $|Q| = q$, $|R| = r$ и если $[P, Q] \neq 1$, то $q \nmid (p - 1)$, а если $[P, R] \neq 1$, то $r \nmid (p - 1)$;
10. $G = P \leftthreetimes Q$, $|Q| = q$ и либо $P \cong M_{p^3}$ $(p \neq 2)$, либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$. Группа G либо нильпотентна, либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$, $q \nmid (p - 1)$ и $\Omega_1(P) \not\subset C(Q)$;
11. $G = Q \leftthreetimes P$, $|Q| = q \neq 2$ и выполняется одно из условий:
    11.1. Либо $P \cong M_{p^3}$ $(p \neq 2)$, либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$. В каждом из этих случаев $C(Q) = Q \times \Omega_1(P)$;
    11.2. $P \cong Q_8$, $[Q, P] \neq 1$;

12.$G = Q \leftthreetimes B$, $[Q,B] \neq 1$, $Q \cong Q_8$ и выполняется одно из условий:
   12.1. $B = B_1 \times B_2$, $|B_i| = 3$, $i = 1,2$, $(B \cap Z) = B_2$;
   12.2. $B = PR$, $|P| = 3$, $|R| = r$, $r \nmid 6$, $G = (Q \times R) \leftthreetimes P$, $[Q,P] \neq 1$;

13.$G = P_0 \times (Q \leftthreetimes P_1)$, $|P_0| = |P_1| = p$, $|Q| = q \neq 2$, $G' \neq 1$;

14.$G = P \times S$, P – конечная минимальная нециклическая p-группа, S – либо конечная минимальная нециклическая q-группа, либо $|S| = qr$.

Замечание 2. Среди конечных W-групп есть и неразрешимые – например, простая группа A_5.

Определение 7. (см. [16]). Группу, все вторые максимальные подгруппы которой циклические, назовем *SMC-группой*.

В [16] показано, что всякая конечная *SMC*-группа разрешима. С помощью этого результата доказана

Теорема 11. Всякая конечная $J_{H\bar{M}}$-группа разрешима.

Следствие. Класс конечных $J_{H\bar{M}}$-групп содержится в объединении классов конечных разрешимых минимальных не J_H-групп и конечных J_H-групп.

Теорема 12. Конечная группа G является $J_{H\bar{M}}$-группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (ниже p, q, r – различные простые числа; некоторые типы пересекаются):

1. конечная J_H-группа (они описаны в [13]);
2. группа одного из типов теоремы 1;
3. нециклическая группа порядка p^3, p^2q или pqr;
4. группа одного из следующих типов теоремы 10: 6, 10, 11.2 или типа 9, в котором подгруппа S циклическая;
5. $G = (Q \leftthreetimes P) \times R$, $Q \cong Q_8$, $|P| = 3$, $|R| = r$, $r \nmid 6$, $P \not\subset Z(G)$;
6. $G = H \times K$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $K \cong Z_{pr}$, $(|H|, |K|) = 1$;

Из групп теоремы 12 можно выделить подкласс класса конечных $J_{H\bar{M}}$-групп – конечные *SMC*-группы, описание которых получено в [16].

Теорема 13. Конечная нециклическая группа G тогда и только тогда является *SMC*-группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду p, q, r – различные простые числа, $Z = Z(G)$; некоторые типы пересекаются):

1. конечная минимальная нециклическая группа;
2. нециклическая группа порядка p^3, p^2q или pqr;
3. Q_{16};
4. $G = H \times Q$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_q$, $q \nmid |H|$;
5. $G = Q_8 \leftthreetimes Z_3$, $Z_3 \not\subset Z$;
6. $G = Z_p \leftthreetimes Q_8$, $p \neq 2$, $Z_p \not\subset Z$;
7. $G = A \leftthreetimes Q$, $A \cong Z_{p^2}$ или $A \cong Z_{pr}$, $Q \cong Z_{q^m}$, $Z \subset Q$, $\left|{}^{Q}/_{Z}\right| = q$;
8. $G = P \leftthreetimes Q$, $P \cong Z_p$, $p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 2$, $Z \subset Q$, $\left|{}^{Q}/_{Z}\right| = q^2$.

Замечание 3. В описании *SMC*-групп в [16] большая часть типов таких групп задается образующими элементами и определяющими соотношениями. При этом в формулировках ряда теорем эти задания иногда отличаются от тех, что приведены там в доказательствах и определяют не *SMC*-группы. В частности, в типах 1,4, 5 теоремы 2.7 из [16] циклическая подгруппа $< a >$ непростого порядка должна быть неинвариантной (это следует из описания конечных непримарных минимальных нециклических групп, являющихся максимальными подгруппами группы G). Есть и другие неточности и опечатки. В типе 9 основной теоремы из [16] вместо $b^2 = 1$ нужно $b^4 = 1$, а в типе 7 этой теоремы вместо прямого произведения должно стоять полупрямое.

Определение 8. Пусть в группе G существует такая истинная подгруппа S, что выполняется одно из следующих условий:

1. любые две нециклические подгруппы группы G, не содержащиеся в S, инцидентны;
2. все истинные подгруппы группы G, не содержащиеся в S, циклические. Такую группу G назовем *SIN-группой*.

Теорема 14. Конечная группа G является *SIN*-группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (некоторые из них могут пересекаться; ниже всюду $Z = Z(G)$):

1. конечная группа, имеющая не более одной нециклической максимальной подгруппы (описание таких групп получено в [17]);
2. $G = H \times A$, $A \cong Z_k$, $(k, |H|) = 1$ и выполняется одно из условий:

2.1 H – конечная минимальная нециклическая группа, $|\pi(k)| = 2$;
2.2 H – конечная группа с единственной нециклической максимальной подгруппой, $|\pi(k)| = 1$;
3. Q_{16};
4. SD_{16};
5. D_8;
6. $G = P \leftthreetimes A$, P – конечная нециклическая p-группа, $A \cong Z_m$, $p \nmid m$, $A \ntriangleleft G$, $F = C(A) = P_1 \times A$, $P_1 \cong Z_l$, $\Phi(P) \leq P_1 \leq Z$, ${}^{F}\!/_{\Phi(P)} \lessdot {}^{G}\!/_{\Phi(P)}$ и выполняется одно из условий:
   6.1. $P_1 = \Phi(P)$, $|\pi(m)| = 2$ и для некоторой силовской r-подгруппы R группы A все истинные R-допустимые подгруппы группы P содержатся в P_1;
   6.2. $P_1 > \Phi(P)$, $A = Q$ является q-группой, в P существует хотя бы одна истинная Q-допустимая подгруппа, не содержащаяся в P_1, и каждая такая подгруппа содержит G';
   6.3. $P_1 > \Phi(P)$, $A = Q$ является q-группой, для любой Q_1, удовлетворяющей условию $1 < Q_1 \leq Q$, все истинные Q_1-допустимые подгруппы группы P, не содержащиеся в $F = G' \cdot \Phi(P)$, циклические и содержатся в P_1;
7. $G = P_1 \times (P_2 \leftthreetimes Q)$, $P_1 \cong Z_{p^{n-1}}$, $|P_2| = p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^m}$, $G' = P_2$;
8. $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$, $|P| = p$, $Q \cong Z_{q^m}$, $R \cong Z_{r^t}$, $Q \not\subset Z$, $R \not\subset Z$.

Заключение

Каждое из условий инцидентности, наложенное на группу, вводит определенные ограничения на граф подгрупп этой группы. В связи с этим было бы интересно изучить свойства таких графов для групп с рядом условий инцидентности, сформулированных выше в настоящей статье.

Список источников

1. *Черников Н. С., Половицкий Я. Д., Чечулин В. Л.* Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп // Укр. матем. журн. 1996. Т. 48, № 4. С. 533–539.
2. *Волочков А. А., Половицкий Я. Д.* Группы с условием инцидентности для подгрупп с нетривиальным пересечением // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль, 2001. № 4. С. 13–17.
3. *Половицкий Я. Д.* Конечные разрешимые группы, в которых порядок пересечения любых двух неинцидентных подгрупп является делителем числа n // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4. С. 8–17.
4. *Половицкий Я. Д.* Некоторые классы конечных групп с примарными пересечениями неинцидентных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 1. С. 5–18.
5. *Половицкий Я. Д.* Конечные разрешимые группы с одним условием для пересечений неинцидентных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 2. С. 10–21.
6. *Половицкий Я. Д., Коневских Т. М.* О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 23–31.
7. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. С. 6–14.
8. *Половицкий Я. Д., Коневских Т. М.* О конечных группах с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 5–16.
9. *Половицкий Я. Д., Коневских Т. М.* Конечные бипримарные группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4(51). С. 14–23.
10. *Коневских Т. М., Половицкий Я. Д.* Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Конференция "Алгебра и ее приложения", посвященная 70-летию Пермской алгебраической школы С. Н. Черникова: тез. докл. Пермь. 2020. С. 30–31.
11. *Половицкий Я. Д.* Группы с условием инцидентности для некоторых типов подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4. С. 32–36.

12. *Половицкий Я. Д.* Группы с условием инцидентности для ненильпотентных (неразрешимых) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 1. С. 24–28.
13. *Половицкий Я. Д.* Конечные группы с некоторыми условиями инцидентности, связанными с теоремой Лагранжа // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 5–20.
14. *Половицкий Я. Д.* Конечные группы с одним условием инцидентности, связанным с обращением теоремы Лагранжа. Ч. 1 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 5–18.
15. *Половицкий Я. Д.* Конечные группы с одним условием инцидентности, связанным с обращением теоремы Лагранжа. Ч. 2 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3(38). С. 13–26.
16. *Ma L., Meng W., Ma W.* Finite groups whose all second maximal subgroups are cyclic // Open Mathematics. 2017. V. 15, No. 1. P. 646–654.
17. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы, обладающие циклической максимальной подгруппой // Укр. матем. журнал. 1976. Т. 48, № 5. С. 646–539.

References

1. Chernikov, N. S., Polovitsky, Ya. D., Chechulin, V. L. (1996), "Groups with incidence condition for noncyclic subgroups", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, pp. 533-539.
2. Volochkov, A. A., Polovitsky, Ya. D. (2001), "Groups with the incidence condition for subgroups with non-trivial intersection", *Modern problems of mathematics and informatics. Yaroslavl*, no. 4, pp. 13-17.
3. Polovitsky, Ya. D. (2010), "Finite solvable groups in which the order of intersection of any two non-incident subgroups is a divisor of the number *n*", *Bulletin of the Perm University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4, pp. 8-17.
4. Polovitsky, Ya. D. (2012), "Some classes of finite groups with primary intersections of non-incident subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 1, pp. 5-18.
5. Polovitsky, Ya. D. (2011), "Finite solvable groups with one condition for intersections of non-incident subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 2, pp. 10-21.
6. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2019), "On groups with cyclic intersections of non-incident (maximal) subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(46), pp. 23-31.
7. Chernikov, S. N. (1973), "Groups having separating subgroups", *Groups with given properties of subgroups. Kyiv: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, pp. 6-14.
8. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T M. (2020), "About finite groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(50), pp. 5-16.
9. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2020), "Finite biprimary groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4(51), pp. 14-23.
10. Konevskikh, T. M., Polovitsky, Ya. D. (2020), "Finite solvable groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Conference "Algebra and its applications", dedicated to the 70th anniversary of the Perm algebraic school of S. N. Chernikov. Abstracts of reports. Perm*, pp. 30-31.
11. Polovitsky, Ya. D. (2008), "Groups with the incidence condition for some types of subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4, pp. 32-36.
12. Polovitsky, Ya. D. (2010), "Groups with the incidence condition for non-nilpotent (irresolvable) subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 1, pp. 24-28.
13. Polovitsky, Ya. D. (2016), "Finite groups with some incidence conditions related to the Lagrange theorem", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3 (34), pp. 5-20.
14. Polovitsky, Ya. D. (2017), "Finite groups with one incidence condition connected with the inversion of Lagrange's theorem. P. 1", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 2(37), pp. 5-18.

15. Polovitsky, Ya. D. (2017), "Finite groups with one incidence condition related to the inversion of Lagrange's theorem. P. 2", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(38), pp. 13-26.
16. Ma, L., Meng, W., M,a W. (2017), Finite groups whose all second maximal subgroups are cyclic. *Open Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 646-654.
17. Pylaev, V. V., Kuzenn,y N. F. (1976), "Finite groups with a cyclic maximal subgroup" *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, pp. 646-539.

Информация об авторах:

Я. Д. Половицкий – кандидат физико-математических наук, почетный профессор механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 537881;

Т. М. Коневских – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 972024.

Information about the authors:

Yakov D. Polovitsky – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Honorary Professor of Mechanics and Mathematics the Faculty of Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 537881;

Tatiana M. Konevskikh – PhD, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 972024.