Научная статья
УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-55-63

Динамика перманентного движения твердого тела в псевдоевклидовом пространстве

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия
nmakeyev@mail.ru; https://orcid.org /0000-0003-2807-977X

Аннотация. Исследуются условия существования и свойства перманентного движения абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного полюса, в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. На тело воздействуют силовой вектор-момент, постоянный относительно системы координат, неизменно связанной с телом, а также система гироскопических сил с результирующим вектор-моментом, линейным относительно угловой скорости тела. Найдены первые алгебраические интегралы динамической системы, а также необходимые условия существования перманентного движения тела. Получены уравнения подвижного годографа угловой скорости в этом движении. Исследованы структурно-кинетические свойства осей перманентного вращения и геометрия их распределения относительно тела.

Ключевые слова: *абсолютно твердое тело; псевдоевклидово пространство; гироскопический момент; перманентное движение; ось перманентного вращения*

Для цитирования: *Макеев Н.Н.* Динамика перманентного движения твёрдого тела в псевдоевклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 3(62). С. 55–63. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2023-3-55-63.

Статья поступила в редакцию 05.07.2023; одобрена после рецензирования 07.08.2023; принята к публикации 15.09.2023.

Research article

Dynamics of a Rigid Body Permanent Motion in Pseudo-Euclidean Space

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia
nmakeyev@mail.ru; https: //orcid.org / 0000-0003-2807-977X

Abstract. The conditions for the existence and properties of the permanent motion of an absolutely rigid body rotating around a fixed pole are studied in the pseudo-Euclidean space. The body is affected by a force vector-moment, which is constant relative to the coordinate system, invariably associated with the body, as well as a system of gyroscopic forces with a resulting vector-moment, which is linear relative to the angular velocity of the body. The first algebraic integrals of a dynamical system are found, as well as the necessary conditions for the existence of a permanent motion of a body. The equations of the moving hodograph of the angular velocity in this motion are obtained. The structural-kinetic properties of the axes of permanent rotation and the geometry of their distribution in space relative to the body are studied.

Keywords: *absolutely rigid body; pseudo-Euclidean space; gyroscopic moment; permanent movement; axis of permanent rotation*

For citation: *Makeev N. N.* Dynamics of a Rigid Body Permanent Motion in Pseudo-Euclidean Space. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;3(62):55-63. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-55-63.

The article was submitted 05.07.2023; approved after reviewing 31.07.2023; accepted for publication 15.09.2023.

Введение

Н.Е. Жуковским [1] исследована задача о движении неизменяемой материальной плоской фигуры в плоскости Лобачевского. Эта задача в трехмерном евклидовом пространстве однозначно соответствует движению изгибающейся (термин Н.Е. Жуковского) материальной псевдосферической фигуры по неподвижной псевдосфере, которое эквивалентно ее движению в плоскости Лобачевского кривизны $\rho = \kappa^{-2}$. Все точки этой фигуры должны находиться на действительной сфере радиуса κ псевдоевклидова пространства R_3^1.

Вместе с тем, вследствие существующего гомеоморфизма, данная задача эквивалентна задаче о вращении абсолютно твёрдого тела (далее − твердого тела) вокруг неподвижного полюса в псевдоевклидовом пространстве R_3^1 с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) − орты заданного координатного орторепера в пространстве R_3^1. Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна, плоскость Лобачевского представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij} x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j – контравариантные координаты.

Под твердым телом в пространстве R_3^1 понимается материальное тело, расположенное внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O − вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов точек этого тела имеем $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы по определению являются собственными.

Понятия и определения, относящиеся к величинам для неевклидовых пространств, приведены в работе [2], а также в источниках, цитированных в этой работе и в статье [3].

1. Предварительные положения

Под геометрией перманентного движения (движение здесь рассматривается только в механическом смысле) понимаются конфигурационные свойства данного движения, выражающиеся в характере распределения в пространстве осей перманентного вращения тела, построении годографов вектора его угловой скорости и поверхностей, несущих эти оси.

Введем правые координатные орторепера с общим началом в неподвижном полюсе O: репер R_0, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства, и репер $R(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с данным телом, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями тензора инерции тела.

Обозначим: A_j − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными осевыми моментами инерции и собственными значениями оператора инерции тела; $\boldsymbol{\omega}\,(\omega_j)$ − его абсолютная угловая скорость. Здесь и всюду далее индекс j принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) обозначает всю совокупность значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

На тело действует система сил с результирующим вектор-моментом:

$$\mathbf{L}^k(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Gamma}\,\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где задана кососимметрическая матрица:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & -k_2 \\ k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

k_j − введнные постоянные ненулевые (в общем случае) параметры.

Согласно равенству (1) для компонент вектора $\mathbf{L}^k(L_j)$ имеем [3]:

$$\begin{aligned} L_1^k(\boldsymbol{\omega}) &= -k_3\omega_2 - k_2\omega_3, \\ L_2^k(\boldsymbol{\omega}) &= \ \ k_1\omega_3 + k_3\omega_1, \\ L_3^k(\boldsymbol{\omega}) &= \ \ k_2\omega_1 - k_1\omega_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Система сил, порождающая вектор-момент с компонентами (3), является *гироскопической системой* (по У. Томсону и П. Тэту [4]), а характерная матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ (2) − *гироскопической* с элементами − гироскопическими коэффициентами k_j.

Вместе с моментом (1) на тело действует система внешних активных сил с результирующим вектор-моментом $\mathbf{L}$ (L_j), постоянным относительно орторепера R.

Движение тела, происходящее под воздействием моментов $\mathbf{L}^k, \mathbf{L}$ относительно полюса O, определяется эволюционной динамической системой, представленной в проекциях на координатные оси подвижного орторепера R [5]:

$$\begin{aligned} &A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2)\,\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 + k_2\omega_3 = L_1, \\ &A_2\dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3)\,\omega_3\,\omega_1 - k_1\,\omega_3 - k_3\,\omega_1 = L_2, \\ &A_3\,\dot{\omega}_3 - (A_2 - A_1)\,\omega_1\,\omega_2 - k_2\,\omega_1 + k_1\,\omega_2 = -L_3. \end{aligned} \qquad (4)$$

В уравнениях (4) главные осевые моменты инерции A_1, A_2 − моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2, а момент A_3 − относительно собственной главной оси инерции Ox_3. Моменты инерции тела относительно изотропных осей здесь и всюду далее не рассматриваются.

Согласно свойству гомеоморфности между движениями тела в псевдоевклидовом пространстве и в плоскости Лобачевского моменты инерции A_1, A_2 в этой плоскости являются главными моментами инерции сдвига, а момент A_3 − главным моментом инерции вращения тела относительно его центра инерции. При этом каждый главный момент инерции тела на плоскости Лобачевского представляется в виде алгебраической суммы соответствующего планарного момента массы тела M и величины $M\kappa^2$ с размерностью момента инерции [2].

Уравнения (4) представляют 9-параметрическую автономную динамическую систему с квадратичной нелинейностью, содержащую инерционные, гироскопические и моментно-силовые параметры.

Целью работы является определение динамических и кинематических свойств перманентных движений твердого тела, движущегося согласно системе уравнений (4) при заданных предпосылках: необходимых условий существования перманентного движения, его кинематических характеристик и геометрической структуры множества осей перманентного движения относительно координатного орторепера R.

2. Интегралы динамической системы

Определим условия существования общих первых алгебраических интегралов системы уравнений (4). Введем матрицу моментов инерции $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$, линейную по ω_j форму:

$$F_1(\boldsymbol{\omega}) = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3 \quad (\|\mathbf{L}\|^2 \neq 0)$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Для того, чтобы система уравнений (4) допускала первый квадратичный по ω_j интеграл

$$I_1 \equiv (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) = h^2 \quad (h \neq 0), \qquad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$F_1(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (t \in T = [0, +\infty), \qquad (6)$$

где h − постоянная интегрирования.

Доказательство. Необходимость. Дифференцируя равенство (5) по t, в силу уравнений системы (4), выделяя форму F_1, получаем условие (6).

Достаточность. Исключая из заданного равенства (6) параметры L_j в силу уравнений системы (4), путем выделения формы F_1 получаем равенство (5), являющееся первым интегралом динамической системы (4).

Условие (6) выражает равенство нулю величины мощности системы сил, порождающей результирующий вектор-момент активных внешних сил $\mathbf{L}$ [4].

Следствие 1. Интеграл (5) существует тогда и только тогда, когда величина мощности вектор-момента $\mathbf{L}$ тождественно равна нулю. При этом для любого $t \in T$ векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{L} \neq 0$ взаимно ортогональны, либо имеем $\mathbf{L} = 0$.

Замечание. Величина мощности вектор-момента $\mathbf{L}^k$ тождественно равна нулю согласно определяющему свойству мощности при вращении тела [4, с. 104].

Пусть $\mathbf{G}(G_j)$ − вектор кинетического момента тела относительно полюса O:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\omega}) = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 - G_3\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_j$ − орты осей Ox_j репера R, $G_j(\omega_j)$ − кинетические моменты тела относительно осей этого орторепера ($G_j = A_j\,\omega_j + k_j$).

Введем линейную по ω_j форму:

$$F_2(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{3}(A_j\omega_j + k_j)L_j \quad (\|\mathbf{L}\|^2 \neq 0)$$

и приведем утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы динамическая система (4) имела первый квадратичный по ω_j интеграл

$$I_2 \equiv (G_1)^2 + (G_2)^2 - (G_3)^2 = H^2, \qquad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$F_2(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (t \in T), \qquad (8)$$

где $H \neq 0$ − постоянная интегрирования.

Доказательство теоремы проводится аналогично предыдущему, на основе уравнения теоремы об изменении кинетического момента тела:

$$\dot{G}^r \mathbf{e}_r + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}) = \mathbf{L} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Следствие 2. Квадратичный первый интеграл (7) существует тогда и только тогда, когда, согласно условию (8), векторы $\mathbf{G}(\boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{L}$ при $\mathbf{L} \neq 0$ для значений $t \in T$ взаимно ортогональны, либо когда $\mathbf{L} = 0$.

Следствие 3. Если ненулевые векторы $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарны, то векторы $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{L} \neq 0$ образуют некомпланарную тройку векторов при условиях следствий 1, 2.

Очевидно, что для системы уравнений (4) при $\mathbf{L} = 0$ существует первый интеграл

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k} = \mathbf{const} = G\mathbf{s}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{s}(s_j)$ − орт постоянного направления в инерциальном пространстве относительно орторепера R_0, заданного начальным условием. Тогда, согласно равенству (9), имеет место инвариант:

$$I_3 \equiv \|\mathbf{s}\|^2 = -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = \ell, \qquad (10)$$

являющийся при $\mathbf{L} = 0$ тривиальным первым интегралом системы уравнений (4). Здесь значения $\ell = (1, -1, 0)$ в случаях, при которых орт $\mathbf{s}$ − собственный, идеальный и изотропный, соответственно.

В равенствах (5), (7), (10) интеграл энергии I_1 выражает свойство гироскопичности моментно-силового воздействия на тело; интеграл модуля кинетического момента I_2 порожден группой симметрий и выражает постоянность его величины. Интеграл I_3 отражает свойство инвариантности относительно действия группы поворотов по отношению к направлению орта $\mathbf{s}$, порождающего векторное поле этой группы. Этим же интегралом определяется пятимерное фазовое пространство тела.

3. Свойства перманентных движений

Рассмотрим движения твердого тела, являющиеся его вращениями вокруг главных осей инерции (осей орторепера R) с постоянными скоростями ω_j^0 (перманентные вращения) [5]:

$$\boldsymbol{\omega}^0 = [(\omega_1^0, 0, 0); (0, \omega_2^0, 0); (0, 0, \omega_3^0)]. \qquad (11)$$

Теорема 3. Для того чтобы твердое тело, движение которого определяется системой уравнений (4), совершало перманентные вращения (11) вокруг главных осей инерции тела, необходимо, чтобы компоненты результирующего вектор-момента $\mathbf{L}$ были заданы в виде, соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= (0, -k_3\omega_1^0, k_2\omega_1^0), \\ \mathbf{L}_2 &= (k_3\omega_2^0, 0, -k_1\omega_2^0), \\ \mathbf{L}_3 &= (k_2\omega_3^0, -k_1\omega_3^0, 0), \end{aligned} \qquad (12)$$

где символ $\mathbf{L}_j$ обозначает совокупность координат этого вектора по оси номера j.

Доказательство теоремы проводится путем вычислений на основе условий (11) и уравнений системы (4).

Следствие 4. При перманентном вращении (11), согласно равенствам (12), вектор-момент $\mathbf{L}$ ортогонален *оси перманентного вращения* (ОПВ) тела и векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{L}$ взаимно ортогональны ($\mathbf{L} \neq 0$).

Рассмотрим особенности случаев перманентного вращения тела, обозначая элементы упорядоченного множества $(\boldsymbol{\omega}^0, \mathbf{L})$ (11), (12) через (B_1, B_2, B_3), соответственно (далее нулевой индекс при величинах ω_j для перманентного движения опущен).

При движениях B_1, B_2 векторы $\mathbf{k}, \mathbf{L}$ расположены в псевдоевклидовых плоскостях, а при движении B_3 они могут находиться в евклидовой, полуевклидовой или псевдоевклидовой плоскостях. Вследствие этого в случаях B_1, B_2, если $\mathbf{k}$ − собственный вектор, то $\mathbf{L}$ − вектор идеальный. В случае, при котором $\mathbf{k}$ − идеальный вектор, $\mathbf{L}$ − собственный вектор. Если же вектор $\mathbf{k}$ − изотропный, то вектор $\mathbf{L}$ − либо идеальный, либо изотропный. При движении B_3 вектор $\mathbf{L}$ − идеальный, а вектор $\mathbf{k}$ может быть собственным, идеальным или изотропным.

Теорема 4. В перманентном движении тела относительно любых ОПВ, если это движение существует, то при любых вектор-параметрах $\mathbf{k}, \mathbf{L}$ имеют место тождества:

$$\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3 = 0, \qquad (13)$$

$$(A_1\omega_1 + k_1)L_1 + (A_2\omega_2 + k_2) - \\ - (A_3\omega_3 + k_3)L_3 = 0. \qquad (14)$$

Доказательство проводится путем стандартных вычислений на основе уравнений системы (4).

Равенства (13), (14) отражают свойства перманентного движения, идентичные упомянутым ранее свойствам этого движения по отношению к взаимному расположению пар векторов **ω**, **L** и **G**, **L**, а также векторов **k**, **L**.

Определим выражения для величин ω_j в общем случае перманентного движения, при котором система уравнений (4) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&(A_3 + A_2)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 + k_2\omega_3 = L_1, \\
&(A_1 + A_3)\omega_3\omega_1 + k_1\omega_3 + k_3\omega_1 = -L_2, \\
&(A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + k_2\omega_1 - k_1\omega_2 = L_3.
\end{aligned} \qquad (15)$$

Выражая из системы (15) последовательно величины ω_1, ω_3, согласно третьему и первому уравнениям, получаем, соответственно:

$$\omega_1 = \frac{k_1\omega_2 + L_3}{(A_2 - A_1)\omega_2 + k_2} \qquad (16)$$

при условиях

$$\omega_2 \neq (A_1 - A_2)^{-1}k_2, \quad (A_1 - A_2)k_2 \neq 0,$$

$$\omega_3 = \frac{-k_3\omega_2 + L_1}{(A_2 + A_3)\omega_2 + k_2} \qquad (17)$$

при $\omega_2 \neq -(A_2 + A_3)^{-1}k_2$.

Подставляя выражения (16), (17) во второе уравнение системы (15), в результате получаем

$$P_2\omega_2^2 + P_1\omega_2 - P_0 = 0, \qquad (18)$$

где обозначено

$$P_2 = (A_1 - A_2)(A_2 + A_3)L_2,$$

$$P_1 = -(A_2 + A_3)k_1L_1 + (A_1 - 2A_2 - A_3)k_2L_2 + \\ + (A_1 - A_2)k_3L_3,$$

$$P_0 = (A_1 + A_3)L_1L_3 + k_2N,$$

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = \sum_{j=1}^{3} k_j L_j.$$

Определяющее уравнение (18) с дискриминантом $D(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = P_1^2 + 4P_0P_2$ при условии

$$(A_1 - A_2)L_2 \neq 0 \qquad (19)$$

в пространстве параметров L_j имеет область действительных корней с границей $D = 0$, являющейся алгебраической поверхностью третьего порядка. Полагая,

$$N_1(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = P_1 \mp \sqrt{D}, \qquad (20)$$

согласно уравнению (18), при требуемых условиях $D > 0$, (19) получаем:

$$\omega_2(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = (2P_2)^{-1}N_1, \qquad (21)$$

откуда в силу соотношений (16), (17) следует:

$$\begin{aligned}
\omega_1(\mathbf{k}, \mathbf{L}) &= \frac{2P_2L_3 + k_1N_1}{2P_2k_2 + (A_2 - A_1)N_1}, \\
\omega_3(\mathbf{k}, \mathbf{L}) &= \frac{2P_2L_1 - k_3N_1}{2P_2k_2 + (A_2 + A_3)N_1}.
\end{aligned} \qquad (22)$$

При этом должны выполняться условия:

$$2P_2k_2 + (A_2 - A_1,\ A_2 + A_3)N_1 \neq 0. \qquad (23)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 5. Если перманентное состояние твёрдого тела, движущегося согласно системе уравнений (4), существует, то оно соответствует режиму, определяемому равенствами (20)−(22) при условиях (19), (23).

Равенства (20)−(22) представляют собой двупараметрические (по вектор-параметрам **k**, **L**) уравнения подвижного годографа вектора **ω** (термин [6]) относительно орторепера *R*.

Согласно равенствам (20) при $D > 0$ существуют два режима перманентного движения тела, которые на границе $D = 0$ переходят в один общий режим.

Исключая из системы равенств (21), (22) величину N_1, определяемую выражением (20), при условии (19) получаем уравнения подвижного (относительно орторепера *R*) годографа вектора **ω** в явной форме:

$$\omega_2 = \frac{L_3 - k_2\omega_1}{(A_2 - A_1)\omega_1 - k_1} = \frac{L_1 - k_2\omega_3}{(A_2 + A_3)\omega_3 + k_3}, \qquad (24)$$

справедливые при условиях:

$$(\omega_1, \omega_3) \neq [(A_2 - A_1)^{-1}k_1,\ -(A_2 + A_3)^{-1}k_3].$$

Рассмотрим случай осевой кинетической симметрии тела, при котором для системы уравнений (15) выполняется условие

$$A_1 = A_2 \qquad (25)$$

с присоединенным к нему ограничением

$$k_1^2 + k_2^2 \neq 0. \qquad (26)$$

Полагая в силу условия (26), в дальнейшем $k_2 \neq 0,$ из третьего уравнения системы (15) при ограничении (25) находим:

$$\omega_1 = k_2^{-1}(k_1\omega_2 + L_3). \qquad (27)$$

Введем условия

$$\begin{gathered} N_0 = k_1 L_1 + k_2 L_2 \neq 0, \quad L_3 \neq 0, \\ (A_1 + A_3)L_1 + k_2 k_3 \neq 0 \end{gathered} \qquad (28)$$

и подставим выражения (17), (27) во второе уравнение системы (15). Тогда при условиях (28) получаем:

$$\omega_2(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = -\frac{P_0}{(A_1 + A_3) N_0}, \qquad (29)$$

откуда, согласно зависимости (27), следует:

$$\omega_1(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = \frac{(A_1 + A_3) L_2 L_3 - k_1 N}{(A_1 + A_3) N_0}. \qquad (30)$$

Из равенства (17) согласно соотношению (29) находим:

$$\omega_3(\mathbf{k}, \mathbf{L}) = -\frac{N}{(A_1 + A_3) L_3}. \qquad (31)$$

В результате доказана следующая

Теорема 6. Если перманентное движение твердого тела, состояние которого подчинено уравнениям (4), существует, то оно совершается в режиме, определяемом равенствами (29)−(31) при условиях (25), (26), (28).

Таким образом, теоремы 5, 6 выражают необходимые условия существования перманентного состояния твердого тела, движущегося согласно уравнениям системы (4) при заданных ограничениях.

Равенства (29)−(31) при указанных условиях истолковываются как двупараметрические уравнения подвижного годографа вектора угловой скорости тела.

Полагая $N k_1 k_2 \neq 0$ и исключая из равенств (29)−(31) величину N, получаем уравнения подвижного годографа вектора угловой скорости тела в явной форме:

$$\begin{aligned} k_2 (N_0\omega_1 - L_2 L_3) = k_1 (N_0\omega_2 + L_1 L_3) = \\ = k_1 k_2 L_3 \omega_3, \end{aligned} \qquad (32)$$

представленные относительно подвижного орторепера R.

Уравнения (32) линейны по компонентам ω_j , в отличие от нелинейных уравнений (24), относящихся к кинетически несимметричному случаю. Вследствие этой линейности для случая с условием (25) имеем единственный режим перманентного движения тела.

Из равенств (32) следует система:

$$\begin{gathered} k_2\omega_1 - k_1\omega_2 = L_3, \\ k_2 L_3 \omega_3 - N_0 \omega_2 = L_1 L_3, \end{gathered}$$

представляющая в пространстве переменных ω_j уравнения двух непараллельных плоскостей, взаимное пересечение которых определяет прямую − подвижный годограф вектора скорости $\boldsymbol{\omega}$.

4. Конус осей перманентных вращений

Оси перманентных вращений (ОПВ) твердого тела, движущегося вокруг неподвижного полюса в однородном силовом поле были открыты Б.К. Млодзеевским и О. Штауде [7, с. 142] в 1894 г. Конус ОПВ тела в поле силы тяжести исследован В.В. Румянцевым [8] и П.В. Харламовым [9].

Известно, что если ОПВ тела существует, то эта ось неподвижна относительно каждого из координатных ортореперов R_0, R. Пусть $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, $\mathbf{e}\,(e_j) -$ орт ОПВ относительно орторепера R. Тогда в перманентном движении имеем:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}, \quad \omega_j = \omega e_j \quad (j = 1, 2, 3), \qquad (33)$$

причем $\mathbf{s} = \mathbf{e}$ и имеет место условие:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \ell, \qquad \ell = (1, -1, 0), \qquad (34)$$

где указанные значения параметра ℓ соответствуют собственному, идеальному и изотропному ортам $\mathbf{e}$.

Поскольку орт $\mathbf{s}$ здесь совмещен с $\mathbf{e}$ и постоянное направление в инерциальном пространстве задается постоянным вектором $\mathbf{L}$, то $\mathbf{L} = L\mathbf{e}$, $L_j = L e_j$ (j = 1, 2, 3), где $L = |\mathbf{L}|$, а величина параметра ℓ определяется равенствами (34).

Согласно равенствам (33), из уравнений (15) следует система:

$$\begin{aligned} &(A_2 + A_3)\,\omega^2 e_2 e_3 + (k_3 e_2 + k_2 e_3)\,\omega = L e_1, \\ &(A_3 + A_1)\,\omega^2 e_3 e_1 + (k_1 e_3 + k_3 e_1)\,\omega = -L e_2, \\ &(A_2 - A_1)\,\omega^2 e_1 e_2 + (k_2 e_1 - k_1 e_2)\,\omega = L e_3. \end{aligned} \qquad (35)$$

Рассмотрим систему уравнений (35) при условиях

$$A_1 \neq A_2, \qquad e_1 e_2 e_3 \neq 0. \qquad (36)$$

Обозначая левые части уравнений (35) через V_1, V_2, V_3 и составляя линейную комбинацию вида $V_1 e_1 - V_2 e_2 - V_3 e_3$, согласно равенствам (34), в результате соответственно получаем:

$$\begin{gathered}(A_3 + A_2) e_1 \omega_2 \omega_3 - (A_1 + A_3) e_2 \omega_3 \omega_1 + \\ + (A_1 - A_2) e_3 \omega_1 \omega_2 - (k_2 e_3 + k_3 e_2) \omega_1 + \\ + (k_3 e_1 + k_1 e_3) \omega_2 + (k_2 e_1 - k_1 e_2) \omega_3 = \\ = L_1 e_1 + L_2 e_2 - L_3 e_3 \equiv L \ell.\end{gathered} \tag{37}$$

Поверхность (37) в пространстве квазикоординат ω_j относительно орторепера *R* является несущей для множества ОПВ поверхностью второго порядка с геометрическими инвариантами:

$$S_1 = \det [a_{ij}] \quad (i, j) = (1, \ldots, 4),$$
$$a_{ij} = - a_{ji} \ (i \neq j), \quad a_{ij} = 0 \quad (i = j),$$
$$S_2 = - \frac{1}{4} Q e_1 e_2 e_3, \tag{38}$$
$$Q = (A_1 - A_2)(A_2 + A_3)(A_3 + A_1),$$
$$S_3 = \mathrm{Tr}\,(a_{ii}) \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$S_4 = - \sum_{(1\,2\,3)} a_{12}^2,$$

где параметры a_{ij} определяются равенствами

$$\begin{gathered}2a_{12} = (A_1 - A_2) e_3, \quad 2a_{23} = (A_2 + A_3) e_1, \\ 2a_{31} = -(A_1 + A_3) e_2, \ 2a_{14} = -(k_2 e_3 + k_3 e_2), \\ 2a_{24} = k_3 e_1 + k_1 e_3, \quad 2a_{34} = k_2 e_1 - k_1 e_2, \\ a_{44} = - L \ell.\end{gathered}$$

В равенстве (38) для S_4 символ (1, 2, 3) под знаком суммы обозначает суммирование по величинам с данными индексами согласно правилу их циклической перестановки.

Поверхность (37) в начале координат касается плоскости:

$$\begin{gathered}(k_2 e_3 + k_3 e_2) \omega_1 - (k_3 e_1 + k_1 e_3) \omega_2 + \\ + (k_1 e_2 - k_2 e_1) \omega_3 = 0.\end{gathered} \tag{39}$$

Согласно условиям (36), для инвариантов (38) в этом случае имеем:

$$S_1 = S_3 = 0, \quad S_2 \neq 0, \quad S_4 < 0, \tag{40}$$

в силу чего поверхность с уравнением (37) − действительный невырожденный конус второго порядка. В соответствии с условиями (33), (40) этот конус является конусом ОПВ с вершиной в полюсе *O*.

Асимптотическим конусом поверхности (37) является аналог конуса Штауде:

$$\begin{gathered}(A_3 + A_2) e_1 \omega_2 \omega_3 - (A_1 + A_3) e_2 \omega_3 \omega_1 + \\ + (A_1 - A_2) e_3 \omega_1 \omega_2 = 0,\end{gathered}$$

существующий в пространстве R_3^1, в который предельным при $k \to 0$ переходом преобразуется поверхность (37).

Если вектор $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e})$ ортогонален координатной плоскости $Ox_1 x_2$ орторепера *R*, то при $\mathbf{k} = k\,\mathbf{e}\,(k \neq 0)$ плоскость с уравнением (39) не существует. При этом сферическая кривая, являющаяся множеством точек пересечения конуса ОПВ с единичной сферой, центр которой совпадает с полюсом *O*, является направляющей конуса осей перманентных вращений.

В случае осевой кинетической симметрии тела, при условии (25), согласно равенству (38) для S_2 имеем $S_2 = 0$ и поверхность (37) не является центральной. Здесь могут иметь место случаи вырождения конуса ОПВ, при которых должно быть либо $\mathbf{L} = 0$, либо, если $\mathbf{L} \neq 0$, то вектор $\mathbf{e}$ должен являться изотропным. При этом вектор $(\mathbf{k} \times \mathbf{e})$ должен быть ортогональным плоскости $Ox_1 x_2$ репера *R*.

5. Виды несущих поверхностей

Рассмотрим классификацию случаев, при которых несущая поверхность общего вида (37) порождает частные виды действительных множеств ОПВ.

При условиях (36) имеем $S_2 \neq 0$ и поверхность (37) является центральной, соответствующей гиперболоидам: однополостному для $S_1 > 0$ и двуполостному для $S_1 < 0$. В пограничном случае, при котором $S_1 = 0$, имеем действительный конус ОПВ.

Если, в отличие от условий (40), принять $S_1 \neq 0, S_2 = 0$, то получаем гиперболический параболоид, а при $S_1 = S_2 = 0$, если выполняется дополнительное условие

$$\sum_{(1\,2\,3)} a_{12} (2a_{14} a_{24} - a_{12} a_{44}) = 0,$$

то существуют две распавшиеся плоскости.

Таким образом, среди частных видов несущих поверхностей имеются линейчатые поверхности, образующие которых могут являться ОПВ. Другие возможные случаи вырождения несущих поверхностей здесь не рассматриваются.

Аналогичная классификация поверхностей, несущих ОПВ в евклидовом пространстве, для твердого тела, движущегося вокруг неподвижного центра в однородном поле силы тяжести, приведена П.В. Харламовым [9].

Определение видов геометрических поверхностей, несущих ОПВ, принципиально важно для исследования устойчивости и управляемости перманентного движения тела, а также для применения качественных методов исследования данного движения в пространстве состояний динамической системы.

Заключение

Свойства перманентного вращения гиростата, движущегося вокруг неподвижного полюса в свободном от силовых полей евклидовом пространстве, происходящего под воздействием постоянного силового вектор-момента, исследованы в аналогичной задаче, содержащейся в работе [10]. Ее динамическим аналогом является задача, относящаяся к псевдоевклидову пространству, приведенная в настоящей работе.

Сопоставление результатов этих работ показывает наличие некоторых общих аналоговых признаков и свойств перманентных движений, совершаемых в соответствующих случаях. В частности, как в евклидовом, так и в псевдоевклидовом пространстве, при перманентном движении существует взаимная ортогональность пар векторов **ω**, **L**, и **G**, **L** для **L** $\neq$ 0. Кроме того, при **k** = 0, $(A_1 - A_2)L\ell \neq 0$ в пространстве R_3^1 несущая поверхность общего вида (37) для ОПВ является аналогом конуса Штауде, существующего в этом пространстве.

Исследование режимов перманентного движения тела с применением подвижного годографа вектора угловой скорости открывает возможность рассмотрения свойств этого движения в касательном пространстве с анализом касательного расслоения многообразий. Нахождение этого поля и его применение в случае псевдоевклидова пространства в представленной задаче осуществляется, по-видимому, впервые.

Список источников

1. *Жуковский Н.Е.* О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // Полн. собр. соч.: в 10 т. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Т. 1. С. 490−535.
2. *Широков А.П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196−207.
3. *Макеев Н.Н.* Задача восстановления в динамике твердого тела // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 1 (13). С. 19−26.
4. *Ламб Г.* Теоретическая механика: в 3 т. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Т. 3. 291 с.
5. *Макеев Н.Н.* Устойчивость перманентных вращений гиростата в пространстве R_3^1 // Дифференциальная геометрия: межвузовский научный сб. 1972. Вып. 4. С. 150−156.
6. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1965. 221 с.
7. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
8. *Румянцев В.В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 51−66.
9. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 373−375.
10. *Смольников Б.А., Степанова М.В.* Перманентные вращения гиростата с самовозбуждением // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1981. № 3. С. 107−113.

References

1. *Zhukovskiy N.E.* O dvizhenii material`noy psevdosfericheskoy figury po poverkhnosti psevdosfery. Poln. sobr. soch.: v 10 t. M.; L.: ONTI. 1937;(1):490−535. (In Russ.).
2. *Shirokov A.P.* Vintovaya regulyarnaya pretsessiya v prostranstve Lobachevskogo. Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta. 1963; (123:1):196−207. (In Russ.).
3. *Makeev N.N.* Zadacha vosstanovleniya v dinamike tvyerdogo tela. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2013;1(13):19−26. (In Russ.).
4. *Lamb G.* Teoreticheskaya mekhanika: v 3 t. M.; L.: ONTI; 1936. 291 p. (In Russ.).
5. *Makeev N.N.* Ustoychivost` permanentnykh vrashcheniy girostata v prostranstve $R_3^1$. Differentsial`naya geometriya: mezhvuzovskiy nauchnyy sb. 1972;(4):150−156. (In Russ.).

6. *Kharlamov P.V.* Lektsii po dinamike tvyerdogo tela. Novosibirsk: Izd-vo Novosibirskogo un-ta; 1965. 221 p. (In Russ.).
7. *Magnus K.* Giroskop. Teoriya i primenenie. M.: Mir; 1974. 528 p. (In Russ.).
8. *Rumyantsev V.V.* Ustoychivost` permanentnykh vrashcheniy tyazhyelogo tvyerdogo tela. Prikladnaya matemaika i mekhanika. 1956;(20:1):51−66. (In Russ.).
9. *Kharlamov P.V.* O ravnomernykh vrashcheniyakh tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku. Prikladnaya matematica i mekhanika. 1965;(29:3):373−375. (In Russ.).
10. *Smol`nikov B.A., Stepanova M.V.* Permanentnye vrashcheniya girostata s samovozbuzhdeniem. Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tvyerdogo tela. 1981;(3):107−113. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020.

Information about the author:

N. N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535, WoS: AAW--4380-2020.