«Математика»

Научная статья
УДК 517.977
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11

Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка

Саадат Тофик кызы Алиева[1], Камил Байрамали оглы Мансимов[2]
[1, 2]Бакинский государственный университет, Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
[1]saadata@mail.ru
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. В настоящей работа рассматривается задача оптимального управления системами линейных двухмерных разностных уравнений дробного порядка. Предполагается, что управляющая функция входит в граничное условие и функционал является линейным. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума. В случае нелинейного, но выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: *допустимое управление; оптимальное управление; открытое множество; разностное уравнение дробного порядка; дробный оператор; линеаризованный принцип максимума; дробная сумма; необходимое и достаточное условие*

Для цитирования: *Алиева С. Т., Мансимов К. Б.* Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 5–11. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11.

Статья поступила в редакцию 13.07.2023; одобрена после рецензирования 10.09.2023; принята к публикации 28.11.2023.

«Mathematics»

Research article

Optimality Condition of the Pontryagin Maximum Principle Type in the Control Problem of Fractional Series Linear Difference Equations

Saadat T. Alieva[1], Kamil B. Mansimov[2]
[1,2]Baku State University, Institute of control system of Azerbaijan National academy of sciences, Baku, Azerbaijan
[1]saadata@mail.ru
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. The optimal control problem of fractional order linear two-dimensional difference equations systems is considered. It is assumed that the control function is included in the boundary condition, and the functional is linear. A necessary and sufficient optimality condition is proved in the discrete maximum principal form. A sufficient optimality condition is proved in the nonlinear but convex cost functional case.

Keywords: *admissible control; optimal control; open set; fractional order difference equation; fractional operator; linearized maximum principle; fractional sum; necessary and sufficient condition*

For citation: *Alieva S. T., Mansimov K. B.* Optimality Condition of the Pontryagin Maximum Principle Type in the Control Problem of Fractional Series Linear Difference Equations. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):5-11. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11.

The article was submitted 13.07.2023; approved after reviewing 10.09.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

В работе [1] получено представление решения краевой задачи, для системы линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка.

В этой работе для рассматриваемого уравнения изучается задача оптимального управления при предположении, что управляющая функция входит в граничное условие, а функционал является линейным.

Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума.

В случае нелинейного, но выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме линейного функционала

$$S(u) = c'a(x_1) + d'z(t_1, x_1) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(x) \in U \subset R^r, x \in X = \\ = \{x_0, x_0+1, \dots, x_1-1\}. \tag{2}$$

$$\Delta^\alpha z(t+1, x+1) = \\ A(t,x)z(t,x) + B(t,x)z(t+1,x) \\ +C(t,x)z(t,x+1) + D(t,x), \tag{3}$$

$$z(t_0, x) = a(x), x \in X \cup x_1, \tag{4}$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in T \cup t_1, \\ T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\} \tag{5}$$

$$a(x_0) = b(t_0) = a_0,$$

$$\Delta^\beta a(x+1) = K(x)a(x) + g\big(x, u(x)\big), \\ x \in X, \\ a(x_0) = a_0. \tag{6}$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $K(x)$ заданные $(n \times n)$-дискретные матричные функции, $D(t,x)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, $b(t)$ – заданная дискретная вектор-функция, a_0, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, $g(x,u)$ – заданная непрерывная по u при всех x, n-мерная вектор-функция, $u(x) - r$-мерная вектор-функция управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (допустимое управление), c и d – заданные n-мерные постоянные векторы, а $\Delta^\alpha z(t,x)$, и $\Delta^\beta a(x), 0 < \alpha, \beta < 1$ дробные операторы порядка α и β (см., например, [2–7], а операция $(')$ означает транспонирование.

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (1), при ограничениях (2)–(6) назовем оптимальным управлениям.

Формула приращения функционала качества

Пусть $u(x), \bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$ – два допустимых управления. Через

$$\big(a(x), \quad z(t,x)\big), (\,\bar{a}(x) = a(x) + \\ \Delta a(x), \bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x))$$

обозначим соответствующие им решения системы (2)–(6).

Тогда приращение функционала (1) примет вид

$$\Delta S(u) = c'\Delta a(x_1) + d'\Delta z(t_1, x_1). \tag{7}$$

Здесь $\Delta a(x)$, $\Delta z(t,x)$ являются решениями задач:

$$\Delta^\beta \Delta a(x) = K(x)\Delta a(x) + \Delta_{\bar{u}(x)} g[x], \tag{8}$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \tag{9}$$

$$\Delta^\alpha \Delta z(t+1, x+1) = \\ = A(t,x)\Delta z(t,x) + B(t,x)\Delta z(t+1,x) + \\ +C(t,x)\Delta z(t,x+1), \tag{10}$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), x \in X \cup x_1, \tag{11}$$

$$\Delta z(t, x_0) = 0, t \in T \cup t_1, \tag{12}$$

соответственно, где по определению

$$\Delta_{\bar{u}(x)} g[x] = g\big(x, \bar{u}(x)\big) - g\big(x, u(x)\big).$$

Как видно уравнения, (8) и (10) являются системами линейных неоднородных разностных уравнений относительно $\Delta a(x)$ и $\Delta z(t,x)$ соответственно.

Имеет место (см. [9]).

Теорема 1. Решение $y(t)$ системы линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка

$$\Delta^{\alpha} y(t+1) = A(t)y(t) + g(t)$$

с начальными условиями

$$y(t) = y_0$$

допускает представление

$$y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [+R_{\alpha}(t-1,j)A(j)] + \\ + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)f(j) \times \\ \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)], \qquad (13)$$

где

$$R_{\alpha}(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

А биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Здесь для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ – гамма функция, для которой выполняется тождество $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

По теореме 1, решение уравнения (8) с начальными условиями (9) представляется в виде

$$\Delta a(x) = \\ = \sum_{j=x_0}^{x-1} R_{\beta}(x-1,j)\Delta_{\overline{u}(j)} g[j] \times \\ \times \textstyle\prod_{m=j+1}^{x-1} \left[1 + R_{\beta}(x-1,m)K(m)\right]. \qquad (14)$$

Введем следующее обозначение

$$\Phi(x,j) = R_{\beta}(x-1,j) \times \\ \times \prod_{m=j+1}^{x-1} \left[1 + R_{\beta}(x-1,m) \times \right. \\ \left. \times K(m)\right). \qquad (15)$$

Тогда

$$\Delta a(x) = \sum_{j=x_0}^{x-1} \Phi(x,j)\Delta_{\overline{u}(j)} g[j]. \qquad (16)$$

Из результата же работы [1] следует

Теорема 2. Решение $z(t,x)$ краевой задачи (3)–(5) для системы линейных 2D разностных уравнений дробного порядка допускает представление в следующем виде:

$$z(t,x) = a(x_0) + \\ + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,x-1;j,x_0-1) \times \\ \times C(j,x_0-1)b(j) + \\ + \sum_{s=x_0}^{x-1} R_{\alpha}(t_0-1,x-1;t_0-1,s) \times \\ \times B(t_0-1,s)a(s) + \\ + \sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_{\alpha}(t-1,j;s)D(j,s). \qquad (17)$$

Здесь

$$R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s) = \\ = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}\binom{x-s+\alpha-1}{x-s},$$

где $R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)$ является решением следующей задачи:

$$R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)A(j,s) = \\ = -R_{\alpha}(t-1,x-1;j-1,s)B(j-1,s) - \\ -R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s-1)C(j,s-1), \\ j = t-1,\dots,t_0, s = x-1,\dots,x_0, \qquad (18)$$

$$R_{\alpha}(t,x;t-1,x-1) = E.$$

Тогда ясно что,

$$\Delta z(t,x) = \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_{\alpha}(t-1,x-1;t_0-1,s) \times \\ \times B(t_0-1,s)\Delta a(s). \qquad (19)$$

Подставляя (16) в (19) будем иметь:

$$\Delta z(t,x) = \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_{\alpha}(t-1,x-1;t_0-1,s) \times \\ \times B(t_0-1,s)\Delta a(s) \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_{\alpha}(t-1,x-1;t_0-1,s) \times \\ \times B(t_0-1,s) \textstyle\sum_{j=x_0}^{x-1} \Phi(x,j)\Delta_{\overline{u}(j)} g[j].$$

Полагая

$$Q_1(t,x,s) = = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,\tau) \times \times B(t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s), \qquad (20)$$

получим, что

$$\Delta z(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t,x,s)\Delta_{\bar{u}(s)} g[s]. \qquad (21)$$

Принимая во внимание соотношения (16), и (21) формулу приращения (7) можно записать в виде

$$\Delta S(u) = c'\Delta a(x_1) + d'\Delta z(t_1,x_1) = = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'\Phi(x_1,x)\Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} d' Q_1(t_1,x_1,x)\Delta_{\bar{u}(x)} g[x] = = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [c'\Phi(x_1,x) + d'Q_1(t_1,x_1,x)]\Delta_{\bar{u}(x)} g[x]. \qquad (22)$$

Полагая

$$p(x) = -\,[c'\Phi(x_1,x) + d'Q_1(t_1,x_1,x)] \qquad (23)$$

$$M'(x,u,p) = p'g(x,u)$$

$$\Delta_{\bar{u}(x)} M[x] = p'\Delta_{\bar{u}(x)} g[x],$$

соотношение (22) записывается в виде

$$\Delta S(u) = -\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x]\ . \qquad (24)$$

Можно доказать, что вектор-функция $p(x)$ определяемая формулой (23) является решением уравнения

$$p(x-1) = -[c'\Phi(x_1,x-1) + +d'Q_1(t_1,x_1,x-1)]\,. \qquad (25)$$

Далее из (19) получаем, что

$$Q_1(t_1,x_1,x-1) = = R_\alpha(t_1-1,x_1-1;t_0 -1,x)Q_1(t_1,x_1,x)\,. \qquad (26)$$

Принимая во внимание (15), (26) в (25), будем иметь

$$p(x-1) = p(x) + \psi(t_0-1,x) \times \times B'(t_0-1,x\ ), \qquad (27)$$

где по определению

$$\psi(t,x) = -R'_\alpha(t_1,x_1;t,x)d.$$

Из (25) следует, что

$$p(x_1-1) = -c. \qquad (28)$$

Далее, используя (28), показывается, что $\psi(t,x)$, определяемая формулой

$$\psi(t,x) = -R'_\alpha(t_1-1,x_1-1;t,x)d,$$

является решением краевой задачи:

$$\psi(t-1,x-1) = A'(t,x)\psi(t,x) + -B'(t,x)\psi(t-1,x) - -C'(t,x)\psi(t,x-1), \qquad (29)$$

$$\psi(t_1-1,x-1) = = B'(t_1-1,x)\psi(t_1-1,x),$$

$$\psi(t-1,x_1-1) = = C'(t,x_1-1)\psi(t,x_1-1),$$

$$\psi(t_1-1,x_1-1) = -d.$$

Условие оптимальности

При помощи представления (24) доказывается

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $u(x), x \in X$ в задаче (1)–(5) необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\max_{v\in U} M(\xi,v,p(\xi)) = = M(\xi,u(\xi),p(\xi)) \qquad (30)$$

выполнялось для всех $\xi \in X$.

Доказательство. Необходимость: Пусть $u(x)$ оптимальное управление. Тогда из формулы приращения (24) следует, что для любого допустимого управления $\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x] \le 0. \qquad (31)$$

Используя произвольность $\bar{u}(x)$, определим его следующим образом:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X, \\ u(x), & x \ne \xi \in X, \end{cases}$$

где $\xi \in X$ – произвольная точка, $v \in U$ произвольный вектор.

Тогда неравенство (31) примет вид:

$$\Delta_v M[\xi] \le 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $v \in U$ и $\xi \in X$, следует условие максимума (30).

Перейдем к доказательству достаточности условия максимума (30).

Предположим, что для допустимого управления $u(x)$ выполняется условие максимума Понтрягина (30). Из него следует, что для любого $\xi \in X, \bar{u}(\xi) = v \in U,\quad \Delta_{\bar{u}(\xi)} M[\xi] \le 0.$

Отсюда, в силу произвольности $\xi \in X$, следует, что

$$\sum_{\xi=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(\xi)} M[\xi] \leq 0.$$

С учетом этого неравенства из (24) получаем, что для любого допустимого управления $\bar{u}(x)$

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) \geq 0, \text{ т. е.}$$
$$S(\bar{u}) \geq S(u).$$

Из последнего соотношения следует, что управление $u(x)$ является оптимальным управлением. Этим достаточность дискретного условия максимума Понтрягина доказана.

Случай нелинейного выпуклого критерия качества

Изучим несколько более общий случай. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi_1\big(a(x_1)\big) + \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big) \quad (32)$$

при ограничениях (2)–(5).

Здесь $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(z)$ – заданные непрерывно дифференцируемые и выпуклые в R^n скалярные функции.

В случае задачи (1)–(5), (32) приращение функционала (32), соответствующее допустимым управлениям $u(x)$, $\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$ при помощи формулы Тейлора можно записать в виде

$$\begin{gathered} \Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \\ = \frac{\partial \varphi'_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a} \Delta a(x_1) + \\ + \frac{\partial \varphi'_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z} \Delta z(t_1, x_1) + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + o_2(\|z(t_1, x_1)\|), \quad (33) \end{gathered}$$

где величины $o_i(\cdot), i = 1,2$ определяются из разложений

$$\begin{gathered} \varphi_1\big(\bar{a}(x_1)\big) - \varphi_1\big(a(x_1)\big) = \\ = \frac{\partial \varphi_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a} \Delta a(x_1) + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \varphi_2\big(\bar{z}(t_1, x_1)\big) - \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big) = \\ = \frac{\partial \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z} \Delta z(t_1, x_1) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|), \end{gathered}$$

а $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)'$ определяется формулой

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Используя представления (16), (21) формула приращения (33) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered} \Delta S(u) = \\ = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a} \Phi(x, x_1) \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + \\ + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \times \\ \times \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|) = \\ = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial \varphi_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a} \Phi(x, x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \right] \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + o_2(\|z(t_1, x_1)\|). \quad (34) \end{gathered}$$

Полагая

$$\begin{gathered} p'(x) = - \left[\frac{\partial \varphi_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a} \Phi(x, x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \right], \quad (35) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} M(x, u, p) = p' g(x, u), \\ \psi(t, x) = -R'_\alpha(t_1, x_1; t, x) \times \\ \times \frac{\partial \varphi_2\big(z(t_1, x_1)\big)}{\partial z}, \quad (36) \end{gathered}$$

формула приращения (34) записывается в виде

$$\begin{gathered} \Delta S(u) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x] + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|). \quad (37) \end{gathered}$$

Из (35), (36), используя (15), (18), получим, что $p(x)$ и $\psi(t, x)$ являются решениями следующих задач соответственно:

$$\begin{gathered} p(x-1) = \\ = p(x) + \psi(t_0 - 1, x) \times \\ \times B'(t_0 - 1, x\ ), \quad (38) \\ p(x_1 - 1) = - \frac{\partial \varphi_1\big(a(x_1)\big)}{\partial a}. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \psi(t-1, x-1) = A'(t, x)\, \psi(t, x) - \\ - B'(t, x)\, \psi(t-1, x) - \\ - C'(t, x)\, \psi(t, x-1), \quad (39) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \psi(t_1 - 1, x - 1) = \\ = B'(t_1 - 1, x)\, \psi(t_1 - 1, x), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \psi(t - 1, x_1 - 1) = \\ = C'(t, x_1 - 1)\, \psi(t, x_1 - 1), \end{gathered}$$

$$\psi(t_1-1,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_2(z(t_1,x_1))}{\partial z}.$$

В силу выпуклости функций $\varphi_1(a),\varphi_2(z)$ ясно, что (см. например [11, с. 164]).

$$o_1\|\Delta a(x_1)\|\geq 0, o_2\|z(t_1,x_1)\|\geq 0.$$

Поэтому из (37) следует неравенство

$$\Delta S(u)\geq -\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{\overline{u}(x)}M[x]. \qquad (40)$$

Из соотношения (40) следует

Теорема 4. Для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(5), (32) достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M[x]\leq 0 \qquad (41)$$

выполнялось для всех $v(x)\in U, x\in X$.

Доказательство. Пусть допустимое управление $u(x)$ удовлетворяет соотношению (41). Тогда из неравенства (40) следует, что для любого допустимого управления $v(x)$

$$S(v)-S(u)\geq 0.$$

1. Последнее соотношение означает оптимальность допустимого управления $\boldsymbol{u(x)}$. Этим доказательство теоремы 4 завершено.

Таким образом, в двух случаях удалось доказать необходимое и достаточное условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина.

Заключение

В работе изучается одна дискретная граничная задача управления, описываемая системой линейной двумерной разностных уравнений дробного порядка.

Используя представления решения рассматриваемой краевой задачи доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа дискретного принципа максимума.

В случае нелинейного по выпуклого критерия качества доказана достаточность условия максимума.

Список источников

1. *Алиева С.Т.* Представление решения системы линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка α // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 4–8.
2. *J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu.* Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2012, Article ID 780619, 11 pages. doi: 10.1155/2012/780619.
3. *K. Miller, B. Ross.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley, 1993. 366 p.
4. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
5. *Christopher Goodric, Allan C. Piterson.* Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA. 2015.
6. *Алиева С.Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
7. *Алиева С.Т., Мансимов К.Б.* Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 9–15.
8. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку: Изд-во Бакинского гос. ун-та, 2002. 114 с.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд.-во БГУ, 1973. 246 с.
10. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 2001. 400 с.
11. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В.* и др. Методы оптимизации. Минск: Изд-во "Четыре четверти", 2011. 472 с.

References

1. *Aliyeva S.T.* Predstavleniye resheniya sistemy lineynykh neodnorodnykh dvukhmernykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka α. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021;(52):4-8. (In Russ.).
2. *J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu.* Fractional Order Difference Equations. Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations. Vol. 2012:11. doi: 10.1155/2012/780619.

3. *K. Miller, B. Ross.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley; 1993. 366 p.
4. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press; 1999. 340 p.
5. *Christopher Goodric, Allan C. Piterson.* Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln. Lincoln: NE, USA; 2015.
6. *Aliyeva S.T.* Printsip maksimuma Pontryagina dlya nelineynykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika. 2021;54:4-11. (In Russ.).
7. *Aliyeva S.T., Mansimov K.B.* Analog linearizovannogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021;1(52):9-15. (In Russ.).
8. *Mansimov K.B.* Diskretnyye sistemy. Baku: Izd-vo Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta; 2002. 114 p. (In Russ.).
9. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Optimizatsiya lineynykh sistem. Baku: Izd-vo Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta; 1973. 246 p. (In Russ.).
10. *Gayshun I.V.* Sistemy s diskretnym vreme-nem. Mn. IM NAN Belarusi; 2001. 400 p. (In Russ.).
11. *Gabasov R., Kirillova F.M., Al'sevich V.V. i dr.* Metody optimizatsii. Minsk: izd-vo "Chetyre chetverti"; 2011. 472 p. (In Russ.).

Информация об авторах:

С. Т. Алиева – кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), руководитель лаборатории "Управление в сложных динамических системах" института систем управления НАН Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68), AuthorID 247352.

Information about the authors:

S. T. Aliyeva – Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Mathematical Cybernetics Department, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Nation al Academy of Sciences of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141), AuthorID 247352.