Научная статья
УДК 517.977.56
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51

Аналог принципа максимума Понтрягина и линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной нелинейной задаче управления системой Гурса–Дарбу с переменной структурой

Камил Байрамали оглы Мансимов[1], Шабнам Шакир кызы Сулейманова[2]

[1]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[1,2]Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
[1]kamilbmansimov@gmail.com
[2]suleymanovasebnem.85@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса. Построена формула приращения первого порядка функционала качества, позволяющая доказать необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина. В случае выпуклости областей управления доказано линеаризованное условие максимума. Приведен аналог дифференциального условия максимума. При предположении открытости областей управления установлен аналог классического уравнения Эйлера.

Ключевые слова: *система Гурса–Дарбу; краевые условия Гурса; формула приращения; необходимое условие оптимальности; принцип максимума Понтрягина; вариация функционала; аналог уравнения Эйлера; функционал качества*

Для цитирования: *Мансимов К. Б., Сулейманова Ш. Ш.* Аналог принципа максимума Понтрягина и линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной нелинейной задаче управления системой Гурса–Дарбу с переменной структурой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 36–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51.

Статья поступила в редакцию 13.07.2023; одобрена после рецензирования 10.10.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Pontryagin's Maximum Principle Analog and Linearized Necessary Conditions of Optimality in One Nonlinear Control Problem of a Gurs–Darboux System With a Variable Structure

Kamil B. Mansimov[1], Shabnam Sh. Suleymanova[2]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan
[1,2]Institute of control system of Azerbaijan National academy of sciences, Baku, Azerbaijan
[1]kamilbmansimov@gmail.com
[2]suleymanovasebnem.85@gmail.com

Abstract. One two-stage optimal control problem is considered, which is described by systems of second-order hyperbolic equations with Goursat boundary conditions. The formula of the first order increment of the functional is constructed which allows is to prove the necessary optimality condition of the type maximum principle L.S. Pontryagin. In the case of convexity of control domains a linearized integral maximum condition is proved. An analogue of the differential maximum condition is given. Assuming the openness of the control domains an analogue of the Euler equations is established.

Keywords: *Goursat–Darboux system; Goursat boundary conditions; increment formula; necessary optimality condition; Pontryagin's maximum principle; variation of the functional; analogue of the Euler equation; quality functional*

For citation: *Mansimov K. B., Suleymanova Sh. Sh.* Pontryagin's Maximum Principle Analog and Linearized Necessary Conditions of Optimality in One Nonlinear Control Problem of a Gurs–Darboux System With a Variable Structure. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):36-51. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51.

The article was submitted 13.07.2023; approved after reviewing 10.10.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

Начиная с работы [1], в дальнейшем, в работах [2–8] и др., получен ряд необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемых гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса.

В предлагаемой же работе исследуется одна задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая краевыми задачами Гурса–Дарбу.

Установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Заметим, что ряд задач оптимального управления с переменной структурой (иногда их называют ступенчатыми задачами оптимального управления), описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями исследованы в работах [9–12] и др.

1. Постановка задачи

Предположим, что $D_i=[t_{i-1},t_i]\times[x_0,x_1], i=1,2,$ заданные прямоугольники, $(T_i,X_i), i=\overline{1,k}, (t_0<T_1<\dots<T_k\le t_1, x_0<X_1<\dots<X_k\le x_1)$, $(\theta_i,\xi_i),\ i=\overline{1,k}, (t_1<\theta_1<\dots<\theta_k\le t_2, x_0<\xi_1<\dots<\xi_k\le x_1)$ заданные точки, $U_1\subset R^r, U_2\subset R^q$ заданные компактные подмножества, $u_1(t,x),u_2(t,x)$ измеримые r и q-мерные соответственно, вектор-функции управляющих воздействий, удовлетворяющие ограничениям

$$u_1(t,x)\in U_1\subset R^r,(t,x)\in D_1, \tag{1}$$

$$u_2(t,x)\in U_2\subset R^q,(t,x)\in D_2. \tag{2}$$

Совокупность $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$ управляющих функций $u_1(t,x),u_2(t,x)$ с вышеприведенными свойствами, назовем *допустимым управлением.*

Предположим, что управляемый двухэтапный процесс описывается системами нелинейных гиперболических уравнений Дарбу:

$$z_{tx}=f_1(t,x,z,z_t,z_x,u_1),(t,x)\in D_1, \tag{3}$$

$$y_{tx}=f_2(t,x,y,y_t,y_x,u_2),(t,x)\in D_2 \tag{4}$$

с краевыми условиями Гурса:

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x),x\in[x_0,x_1],\\ z(t,x_0)=b_1(t),t\in[t_0,t_1],\\ a(x_0)=b_1(t_0), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} y(t_1,x)=Bz(t_1,x),x\in[x_0,x_1],\\ y(t,x_0)=b_2(t),t\in[t_1,t_2].\\ Bz(t_1,x_0)=b_2(t_1). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2-$ заданные абсолютно-непрерывные n-мерные вектор-функции, $B-$ заданная $(n\times n)$ постоянная матрица, $f_1(t,x,z,z_t,z_x,u_1)$, $f_2(t,x,y,y_t,y_x,u_2)-$ заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,z_t,z_x),(y,y_t,y_x)$ соответственно.

Предполагается, что каждой паре $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$ допустимых управляющих функций $u_1(t,x),u_2(t,x)$ соответствует единственное абсолютно-непрерывное решение (в смысле [4–6]) $\big(z(t,x),y(t,x)\big)$ краевой задачи (3)–(6).

Считая $\varphi_1(z_1,z_2,\dots,z_k),\varphi_2(y_1,y_2,\dots,y_k)$ заданными непрерывно-дифференцируемыми скалярными функциями, рассмотрим задачу нахождения минимального значения многоточечного функционала

$$\begin{aligned} &S(u_1,u_2)\\ &=\varphi_1\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)+\\ &+\varphi_2\big(y(\theta_1,\xi_1),y(\theta_2,\xi_2),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big), \end{aligned} \tag{7}$$

при ограничениях (1)–(6).

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (7), при ограничениях (1)–(6) назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $\big(u_1(t,x),u_2(t,x),z(t,x),y(t,x)\big)-$ *оптимальным процессом.*

2. Вспомогательные построения

Считая $(u_1(t,x), u_2(t,x), z(t,x), y(t,x))$, $(\bar{u}_1(t,x), \bar{u}_2(t,x), \bar{z}(t,x), \bar{y}(t,x))$ допустимыми процессами введем обозначения

$$u_i(t,x) = \bar{u}_i(t,x) + \Delta u_i(t,x), i = 1,2, \bar{z}(t,x) = = z(t,x) + \Delta z(t,x), \bar{y}(t,x) = = y(t,x) + \Delta y(t,x)$$

и запишем выражение функционала качества

$$\begin{gathered} \Delta S(u_1,u_2) = S(\bar{u}_1,\bar{u}_2) - S(u_1,u_2) = \\ = \left[\varphi_1\left(\bar{z}(T_1,X_1), \bar{z}(T_2,X_2), \dots, \bar{z}(T_k,X_k)\right) - \right. \\ \left. \varphi_1\left(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \dots, z(T_k,X_k)\right)\right] + \\ +\left[\varphi_2\left(\bar{y}(\theta_1,\xi_1), \bar{y}(\theta_2,\xi_2), \dots, \bar{y}(\theta_k,\xi_k)\right) - \right. \\ \left. -\varphi_2\left(y(\theta_1,\xi_1), y(\theta_2,\xi_2), \dots, y(\theta_k,\xi_k)\right)\right]. \quad (8) \end{gathered}$$

Из введенных обозначений следует, что приращение $(\Delta z(t,x), \Delta y(t,x))$ состояния $(z(t,x), y(t,x))$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta z_{tx} = f_1\left(t,x,\bar{z}(t,x), \bar{z}_t(t,x), \bar{z}_x(t,x), \bar{u}_1(t,x)\right) \\ -f_1\left(t,x,z(t,x), z_t(t,x), z_x(t,x), u_1(t,x)\right), \quad (9) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Delta z(t_0,x) = 0, x \in [x_0,x_1], \\ \Delta z(t,x_0) = 0, t \in [t_0,t_1], \quad (10) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Delta y_{tx} = \\ = f_2\left(t,x,\bar{y}(t,x),\ \bar{y}_t(t,x),\ \bar{y}_x(t,x), \bar{u}_2(t,x)\right) - \\ -f_2\left(t,x,y(t,x), y_t(t,x), y_x(t,x), u_2(t,x)\right), \quad (11) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Delta y(t_1,x) = B\Delta z(t_1,x), x \in [x_0,x_1], \\ \Delta y(t,x_0) = 0, t \in [t_1,t_2]. \quad (12) \end{gathered}$$

Считая $\psi_i(t,x), i = 1,2$ пока произвольными n-мерными вектор-функциями, введем функции (аналоги функции Гамильтона–Понтрягина)

$$\begin{gathered} H_1(t,x,z,z_t,z_x,u_1,\psi_1) = \\ = \psi_1{}' f_1(t,x,z,z_t,z_x,u_1), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} H_2(t,x,y,y_t,y_x,u_2,\psi_2) = \\ = \psi_2{}' f_2(t,x,y,y_t,y_x,u_2). \end{gathered}$$

Для простоты дальнейших изложений введем обозначения типа

$$p_1 = (z,z_t,z_x)', p_2 = (y,y_t,y_x)',$$

$$\begin{gathered} \Delta_{\bar{u}_i} H_i[t,x,p_i,\psi_i] \equiv \\ \equiv H_i(t,x,p_i,\bar{u}_i,\psi_i) - H_i(t,x,p_i,u_i,\psi_i), \\ \frac{\partial H_i(t,x,p_i,u_i,\psi_i)}{\partial p_i} = \frac{\partial H_i[t,x,p_i,\psi_i]}{\partial p_i}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Delta H_i[t,x,p_i,\psi_i] \equiv \\ \equiv H_i(t,x,\bar{p}_i,\bar{u}_i,\psi_i) - H_i(t,x,p_i,u_i,\psi_i), \\ \Delta_{\bar{u}_i} f_i[t,x] = \Delta_{\bar{u}_i} f_i\left(t,x,p_i(t,x),u_i(t,x)\right). \end{gathered}$$

Здесь и в дальнейшем ($'$) штрих означает для векторов скалярное произведение, а для матриц – операцию транспонирования.

Учитывая введенные в рассмотрение функции Гамильтона–Понтрягина из тождеств (9), (11) получим, что

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta H_1[t,x,p_1,\psi_1]\,dxdt, \quad (13) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt = \\ = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \Delta H_2[t,x,p_2,\psi_2]\,dxdt. \quad (14) \end{gathered}$$

Учитывая введенные обозначения (13), (14), формула приращения (8) функционала качества (7) записывается в виде

$$\begin{gathered} \Delta S(u_1,u_2) = S(\bar{u}_1,\bar{u}_2) - S(u_1,u_2) = \\ = \left[\varphi_1\left(\bar{z}(T_1,X_1), \bar{z}(T_2,X_2), \dots, \bar{z}(T_k,X_k)\right) - \right. \\ \left. -\varphi_1\left(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \dots, z(T_k,X_k)\right)\right] + \\ +\left[\varphi_2\left(\bar{y}(\theta_1,\xi_1), \bar{y}(\theta_2,\xi_2), \dots, \bar{y}(\theta_k,\xi_k)\right) - \right. \\ \left. -\varphi_2\left(y(\theta_1,\xi_1), y(\theta_2,\xi_2), \dots, y(\theta_k,\xi_k)\right)\right] + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt - \\ - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_{\bar{u}_1} H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1) + \right. \\ +H_1(t,x,\bar{p}_1,\bar{u}_1,\psi_1) - \\ \left. -H_1(t,x,p_1,\bar{u}_1,\psi_1)\right]dxdt + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt - \\ - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_{\bar{u}_2} H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2) + \right. \\ +H_2(t,x,\bar{p}_2,\bar{u}_2,\psi_2) - \\ \left. -H_2(t,x,p_2,\bar{u}_2,\psi_2)\right]dxd. \quad (15) \end{gathered}$$

Применяя формулу Тейлора, приращение (15) критерия качества преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \Delta S(u_1,u_2) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_1'\left(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \dots, z(T_k,X_k)\right)}{\partial z_i} \times \end{gathered}$$

$$\times \Delta z(T_i, X_i) + o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i, X_i)\|\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_2'\big(y(\theta_1,\xi_1), y(\theta_2,\xi_2), \dots, y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\times$$

$$\times \Delta y(\theta_i,\xi_i) + o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_1}H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\overline{u}_1}H'{}_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial p_1}\Delta p_1(t,x)dxdt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'{}_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial p_1}\Delta p_1(t,x)dxdt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_3\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta p_1(t,x)\|\right)dxdt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)dxdt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\overline{u}_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial p_2}\Delta p_2(t,x)dxdt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial p_2}\Delta p_2(t,x)dxdt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta p_2(t,x)\|\right)dxdt. \qquad (16)$$

Здесь и в дальнейшем, $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ – есть величина более высокого порядка, чем α.

Принимая во внимания краевые условия (10), (12), можно убедиться в справедливости тождеств

$$\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau,$$

$$\Delta z_t(t,x) = \int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)ds,$$

$$\Delta z_x(t,x) = \int_{t_0}^{t}\Delta z_{\tau x}(\tau,x)d\tau, \qquad (17)$$

$$\Delta y(t,x) = B\Delta z(t_1,x) + \int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta y_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau,$$

$$\Delta y_t(t,x) = \int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)ds,$$

$$\Delta y_x(t,x) = B\Delta z_x(t_1,x) + \int_{t_1}^{t}\Delta y_{\tau x}(\tau,x)d\tau. \qquad (18)$$

Учитывая тождество (17), и применяя теорему Фубини, из (18) получим, что

$$\Delta y(t,x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}B\Delta z_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau + \int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta y_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau, \qquad (19)$$

$$\Delta y_x(t,x) = \int_{t_0}^{t_1}B\Delta z_{tx}(\tau,x)d\tau + \int_{t_1}^{t}\Delta y_{\tau x}(\tau,x)d\tau. \qquad (20)$$

Предположим, что $\alpha_i(t,x)$ – характеристическая функция области $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$, $\beta_i(t,x)$ – характеристическая функция области $[t_1,\theta_i]\times[x_0,\xi_i]$, а $\gamma_i(x)$ – характеристическая функция отрезка $[x_0,\xi_i]$. Тогда $\Delta z(T_i,X_i)$ и $\Delta y(\theta_i,\xi_i)$ с учетом (17), (20), могут быть представлены в виде

$$\Delta z(T_i,X_i) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \qquad (21)$$

$$\Delta y(\theta_i,\xi_i) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\gamma_i(x)B\Delta z_{tx}(t,x)dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt. \qquad (22)$$

Далее на основе тождеств (17)–(20), и теоремы Фубини получаем справедливость соотношений

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z}\Delta z(t,x)dxdt = = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\frac{\partial H'_1(\tau,s,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z}dsd\tau\right)'\times \times\Delta z_{tx}(t,x)dxdt\,. \tag{23}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_t}\Delta z_t(t,x)dxdt = = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,s,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_t}ds\right)'\times \times\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{24}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_x}\Delta z_x(t,x)dxdt = = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_1}\frac{\partial H'_1(\tau,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_x}d\tau\right)'\times \times\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi_1\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial z_i}\times \times\Delta z(T_i,X_i) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\times \times\frac{\partial \varphi'_1\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial z_i}\times \times\Delta z_{tx}(t,x)xdt\,. \tag{26}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y}\Delta y(t,x)dxdt = = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\frac{\partial H_2(\tau,s,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y}dsd\tau\right)'\times \times\Delta y_{tx}(t,x)dxdt+ + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{x}^{x_1}B'\frac{\partial H_2(\tau,s,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y}dsd\tau\right)'\times \times\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{27}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_t}\Delta y_t(t,x)dxdt = = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x}^{x_1}\frac{\partial H_2[t,s,p_2,\psi_2]}{\partial y_t}ds\right)'\times \times\Delta y_{tx}(t,x)dxdt\,. \tag{28}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_x}\Delta y_x(t,x)dxdt = = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_2}\frac{\partial H_2(\tau,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_x}d\tau\right)\times' \times\Delta y_{tx}(t,x)dxdt + + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_1}^{t_2}B'\frac{\partial H_2(\tau,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_x}d\tau\right)'\times \times\Delta z_{tx}(t,x), \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi'_2\big(y(\theta_1,\xi_1),y(\theta_2,\xi_2),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\times \times\Delta y(\theta_i,\xi_i) = = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi'_2\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\times \times\beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\gamma_i(x)\frac{\partial \varphi'_2\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i} \times B\Delta z_{tx}(t,x)dxdt. \tag{30}$$

Теперь, учитывая тождества (29)–(30) в формуле приращения (16), и группируя подобные члены, получим, что

$$\Delta S(u_1,u_2) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\times \times\frac{\partial \varphi_1\big(z(T_1,X_1),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial z_i} - \right.$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\gamma_i(x)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\varphi_2'\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\right]-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\frac{\partial H'_1(\tau,s,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z}dsd\tau\right.-$$

$$-\int_x^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,s,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_t}ds-$$

$$-\int_t^{t_1}\frac{\partial H'_1(\tau,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial z_x}d\tau+\beta_i(t,x)B'\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_2\big(y(\theta_1,\xi_1),y(\theta_2,\xi_2),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}B'\frac{\partial H_2(\tau,s,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y}dsd\tau-$$

$$\left.-\int_{t_1}^{t_2}B'\frac{\partial H_2(\tau,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_x}Bd\tau\right]'\times$$

$$\times\Delta z_{tx}(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_2\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\times\right.$$

$$\times\beta_i(t,x)-$$

$$-\int_t^{t_2}\int_x^{x_1}B'\frac{\partial H_2(\tau,s,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y}dsd\tau+$$

$$+\int_x^{x_1}\frac{\partial H_2(t,s,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_t}ds+$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}B'\frac{\partial H_2(\tau,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial y_x}d\tau\right]\times$$

$$\times\Delta y_{tx}(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u_1}H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\bar u_1}H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial p_1}\times$$

$$\times\Delta p_1(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\bar u_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial p_2}\times$$

$$\times\Delta p_2(t,x)dxdt+$$

$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$

$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_3(\|\Delta p_1(t,x)\|)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4(\|\Delta p_2(t,x)\|)dxdt.\qquad(31)$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t,x), i=1{,}2$ являются решениями двумерных интегральных уравнений с частными интегралами вида

$$\psi_1(t,x)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_1\big(z(T_1,X_1),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial z_i}\alpha_i(t,x)+$$

$$+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\frac{\partial H_1\big(\tau,s,p_1(\tau,s),u_1(\tau,s),\psi_1(\tau,s)\big)}{\partial z}dsd\tau$$

$$+$$

$$+\int_x^{x_1}\frac{\partial H_1\big(t,s,p_1(t,s),u_1(t,s),\psi_1(t,s)\big)}{\partial z_t}ds+$$

$$+\int_t^{t_1}\frac{\partial H_1\big(\tau,x,p_1(\tau,x),u_1(\tau,x),\psi_1(\tau,x)\big)}{\partial z_x}d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\gamma_i(x)B'\frac{\partial\varphi_2\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_x^{x_1}B'\frac{\partial H_2[\tau,s,p_2,\psi_2]}{\partial y}dsd\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}B'\frac{\partial H_2[\tau,s,p_2,\psi_2]}{\partial y_x}d\tau,\qquad(32)$$

$$\psi_2(t,x)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_2\big(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)\big)}{\partial y_i}\times$$
$$\times\beta_i(t,x)+$$
$$+\int_t^{t_2}\int_x^{x_1}\frac{\partial H_2[\tau,s,p_2,\psi_2]}{\partial y}dsd\tau+$$
$$+\int_x^{x_1}\frac{\partial H_2[t,s,p_2,\psi_2]}{\partial y_t}ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}B'\frac{\partial H_2[\tau,s,p_2,\psi_2]}{\partial y_x}d\tau. \qquad (33)$$

Существование и единственность измеримых и ограниченных решений (32), (33) можно доказать известными (см., напр., [4]) методами.

Таким образом, из (31) следует, что, если $\psi_i(t,x), i=1{,}2$ являются решениями сопряженной системы (32), (33), то

$$\Delta S(u_1,u_2)$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u_1}H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\bar u_1}H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial p_1}\times$$
$$\times\Delta p_1(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\Delta_{\bar u_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial p_2}\times$$
$$\times\Delta p_2(t,x)dxdt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$
$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_3(\|\Delta p_1(t,x)\|)dxdt+$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4(\|\Delta p_2(t,x)\|)dxdt. \qquad (34)$$

Для вывода необходимого условия оптимальности с помощью формулы приращения (34) требуется оценка остаточного члена с помощью оценок для норм приращений состояний и их частных производных.

Для $\|\Delta p_1(t,x)\|$ справедливы оценки [13] при сделанных условиях гладкости на правую часть уравнения (3):

$$\|\Delta z(t,x)\|\le$$
$$\le L_1\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big\|\Delta_{\bar u_1}f_1[t,x]\big\|dxdt, \qquad (35)$$

$$\|\Delta z_t(t,x)\|\le$$
$$\le\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big\|\Delta_{\bar u_1}f_1[t,x]\big\|dxdt+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0}^{x_1}\big\|\Delta_{\bar u_1}f_1[t,x]\big\|dxdt\right], \qquad (36)$$

$$\|\Delta z_x(t,x)\|\le$$
$$\le L_1\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big\|\Delta_{\bar u_1}f_1[t,x]\big\|dxdt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\big\|\Delta_{\bar u_1}f_1[t,x]\big\|dxdt\right], \qquad (37)$$

где $L_1=const>0$ некоторая постоянная.

Найдем оценки для $\|\Delta p_2(t,x)\|$.

Из (11), переходя к эквивалентному интегральному уравнению, получим, что

$$\Delta y(t,x)=B\Delta z(t_1,x)+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\Big(f_2\big(\tau,s,\bar p_2(\tau,s),\bar u_2(\tau,s)\big)-$$
$$-f_2\big(\tau,s,p_2(\tau,s),u_2(\tau,s)\big)dsd\tau. \qquad (38)$$

Из (38) получаем, что

$$\Delta y_x(t,x)=B\Delta z_x(t_1,x)+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\Big(f_2\big(\tau,x,\bar p_2(\tau,x),\bar u_2(\tau,x)\big)-d\tau$$
$$-f_2(\tau,x,p_2(\tau,x),u_2(\tau,x)\big), \qquad (39)$$

$$\Delta y_t(t,x)=\int_{x_0}^{x}\left(f_2\left(t,s,\bar{p}_2(t,s),\bar{u}_2(t,s)\right)-\right.$$
$$\left.-f_2\left(t,s,p_2(t,s),u_2(t,s)\right)ds\right. . \quad (40)$$

Из тождеств (38)–(40) получаем, что

$$\|\Delta y(t,x)\|\le L_2[\|\Delta z(t_1,x)\|+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\left\|f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),\bar{u}_2(\tau,s)\right)\right.$$
$$\left.-f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),u_2(\tau,s)\right)\right\|dsd\tau+$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\|p_2(\tau,s)\|dsd\tau\right]. \quad (41)$$

$$\|\Delta y_t(t,x)\|\le$$
$$\le L_3\left[\int_{x_0}^{x}\left\|f_2\left(t,s,p_2(t,s),\bar{u}_2(t,s)\right)-\right.\right.$$
$$\left.-f_2\left(t,s,p_2(t,s),u_2(t,s)\right)\right\|ds+$$
$$\left.+\int_{x_0}^{x}\|p_2(t,s)\|ds\right],$$

$$\|\Delta y_x(t,x)\|\le L_4[\|\Delta z_x(t_1,x)\|+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\left\|f_2\left(\tau,x,p_2(\tau,x),\bar{u}_2(\tau,x)\right)-\right.$$
$$\left.-f_2(\tau,x,p_2(\tau,x),u_2(\tau,x))\right\|d\tau+$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t}\|p_2(\tau,x)\|d\tau\right], \quad (42)$$

где $L_i=const>0, i=\overline{2,4}$ некоторые постоянные.

Далее, используя лемму Гронуолла–Беллмана (см., например, [14]) из неравенств (41), (42) после некоторых рассуждений получаем справедливость оценок:

$$\|\Delta y(t,x)\|\le L_5[\|\Delta z(t_1,x)\|+$$
$$\int_{x_0}^{x}\|\Delta z(t_1,s)\|ds+\int_{x_0}^{x}\|\Delta z_s(t_1,s)\|ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),\bar{u}_2(\tau,s)\right)-\right.$$
$$-f_2\tau,s,p_2(\tau,s),u_2(\tau,s)]dsd\tau, \quad (43)$$

$$\|\Delta y_t(t,x)\|\le L_6\int_{x_0}^{x}[\|\Delta z(t_1,s)\|]ds+$$
$$+\left\|f_2\left(t,s,p_2(t,s),\bar{u}_2(t,s)\right)-\right.$$
$$-f_2t,s,p_2(t,s),u_2(t,s)\|+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\|\Delta z_s(t_1,s)\|ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\left\|f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),\bar{u}_2(\tau,s)\right)-\right.$$
$$\left.-f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),u_2(\tau,s)\right)\right\|dsd\tau. \quad (44)$$

$$\|\Delta y_x(t,x)\|\le L_7[\|\Delta z_x(t_1,x)\|+$$
$$+\int_{t_1}^{t}f_2\left(\tau,x,\bar{p}_2(\tau,x),\bar{u}_2(\tau,x)\right)d\tau$$
$$\left.-f_2\left(\tau,x,p_2(\tau,x),u_2(\tau,x)\right)\right\|+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\|\Delta z(t_1,s)\|ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\left\|f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),\bar{u}_2(\tau,s)\right)-\right.$$
$$\left.-f_2\left(\tau,s,p_2(\tau,s),u_2(\tau,s)\right)\right\|dsd\tau], \quad (45)$$

где $L_i=const>0, i=\overline{5,7}$ некоторые постоянные.

Эти оценки позволяют получить необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Считая $\left(u_1(t,x),u_2(t,x)\right)$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле

$$\begin{cases}\Delta u_1(t,x;\varepsilon)=\begin{cases}v_1-u_1(t,x),(t,x)\in D_1(\varepsilon),\\0, \qquad (t,x)\in D_1\backslash D_1(\varepsilon),\end{cases}\\ u_2(t,x;\varepsilon)=0,\ \ (t,x)\in D_2,\end{cases} \quad (46)$$

Здесь $D_1(\varepsilon)=[\theta,\theta+\varepsilon]\times[\xi,\xi+\varepsilon]$, $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ произвольная правильная точка (точка Лебега) (см., напр., [14]) управления $u_1(t,x)$, $v_1\in U_1$ произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1,\xi+\varepsilon<x_1$.

Принимая во внимания оценки (35), (37), (43), (45) и учитывая формулу (46), из (34), на основе теоремы о среднем получаем, что

$$-\varepsilon^2\left[H_1\left(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),v_1,\psi_1(\theta,\xi)\right)-\right.$$
$$\left.-H_1\left(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),u_1(\theta,\xi),\psi_1(\theta,\xi)\right)\right]+o(\varepsilon^2)$$
$$\ge 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство

$$H_1(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),v_1,\psi_1(\theta,\xi)) - \\ -H_1(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),u_1(\theta,\xi),\psi_1(\theta,\xi)) \leq 0.$$

Теперь специальное приращение оптимального управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_1(t,x;\mu) = 0, \ \ (t,x) \in D_2, & (47) \\ u_2(t,x;\mu) = \begin{cases} v_2 - u_2(t,x), (t,x) \in D_2(\mu), \\ 0, \qquad (t,x) \in D_2 \backslash D_2(\mu). \end{cases} \end{cases}$$

Здесь $D_2(\mu) = [\theta,\theta+\mu] \times [\,\xi,\xi+\mu]$, $(\theta,\xi) \in [t_1,t_2) \times [x_0,x_1)$ произвольная правильная точка управления $u_2(t,x)$, $v_2 \in U_2$ произвольный вектор, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta+\mu < t_2, \xi+\mu < x_1$.

При определении специального приращения управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ формулой (47), учитывая оценки (43)–(45) из формулы приращения (34) получаем, что вдоль оптимального управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$

$$-\mu^2[H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),v_2,\psi_2(\theta,\xi)) \\ - H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),u_2(\theta,\xi),\psi_2(\theta,\xi))] + \\ +o(\mu^2) \geq 0.$$

Следовательно,

$$H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),v_2,\psi_2(\theta,\xi)) - \\ -H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),u_2(\theta,\xi),\psi_2(\theta,\xi)) \leq 0.$$

На основе полученных неравенств сформулируем доказанный результат.

Теорема 1. При сделанных предположениях, для оптимальности допустимого управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\max_{v_1\in U_1} H_1(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),v_1,\psi_1(\theta,\xi)) = \\ = H_1(\theta,\xi,p_1(\theta,\xi),u_1(\theta,\xi),\psi_1(\theta,\xi)) \quad (48)$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$,

$$\max_{v_2\in U_2} H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),v_2,\psi_2(\theta,\xi)) = \\ = H_2(\theta,\xi,p_2(\theta,\xi),u_2(\theta,\xi),\psi_2(\theta,\xi)) \quad (49)$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$.

Линеаризованный принцип максимума

В этом пункте исследование задачи (1)–(7) продолжается при следующих дополнительных предположениях:

1) множества $U_i, i = 1{,}2$ выпуклы,

2) вектор-функции $f_1(t,x,p_1,u_1)$ и $f_2(t,x,p_2,u_2)$ непрерывны по совокупности аргументов вместе с частными производными по (p_1,u_1) и (p_2,u_2) соответственно.

Приведем формулу приращения функционала качества (7), соответствующую допустимым управлениям $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ и $(\bar{u}_1(t,x),\bar{u}_2(t,x))$ (см. (15)):

$$\Delta S(u_1,u_2) = \\ = [\varphi_1(\bar{z}(T_1,X_1),\bar{z}(T_2,X_2),\dots,\bar{z}(T_k,X_k)) - \\ -\varphi_1(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))] + \\ +[\varphi_2(\bar{y}(\theta_1,\xi_1),\bar{y}(\theta_2,\xi_2),\dots,\bar{y}(\theta_k,\xi_k)) - \\ -\varphi_2(y(\theta_1,\xi_1),y(\theta_2,\xi_2),\dots,y(\theta_k,\xi_k))] + \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} [H_1(t,x,\bar{p}_1,\bar{u}_1,\psi_1) + \\ -H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)]dxdt + \\ +\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dxdt - \\ -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} [H_2(t,x,\bar{p}_2,\bar{u}_2,\psi_2) - \\ -H_2(t,x,p_2,\bar{u}_2,\psi_2)]dxdt. \quad (50)$$

Применяя формулу Тейлора к отдельным слагаемым в формуле (50), получаем, что

$$\Delta S(u_1,u_2) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'_1(z(T_1,X_1),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} \times \\ \times \Delta z(T_i,X_i) + \\ + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k))}{\partial y_i} \times \\ \times \Delta y(\theta_i,\xi_i) + \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial p_1}\Delta p_1(t,x) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1}\Delta u_1(t,x)dxdt\right] +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial\Delta_{\overline{u}_2}H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial p_2}\Delta p_2\,(t,x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2}\Delta u_2(t,x)dxdt\right]+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$
$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_5(\|\Delta p_1(t,x)+\Delta u_1(t,x)\|)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4(\|\Delta p_2(t,x)+\Delta u_2(t,x)\|)dxdt. \quad (51)$$

Считая, что $\psi_i(t,x), i=1,2$ являются решениями сопряженной системы (32), (33), то аналогично с доказательством формулы приращения (34) доказывается справедливость следующей формулы приращения функционала качества:

$$\Delta S(u_1,u_2)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1}\times\right.$$
$$\times\Delta p_1(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2}\Delta u_2(t,x)dxdt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$
$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_5(\|\Delta p_1(t,x)+\Delta u_1(t,x)\|)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4(\|\Delta p_2(t,x)+\Delta u_2(t,x)\|)dxdt. \quad (52)$$

Из оценок установленных, например, в [1], следует, что

$$\|\Delta z(t,x)\|\le$$
$$\le L_2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u_1(t,x)\|dxdt, \quad (53)$$

$$\|\Delta z_t(t,x)\|\le$$
$$\le L_2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u_1(t,x)\|dxdt\right.$$
$$\left.+\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u_1(t,x)\|dx\right], \quad (54)$$

$$\|\Delta z_x(t,x)\|\le L_2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u_1(t,x)\|dxdt+$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta u_1(t,x)\|dt\right]. \quad (55)$$

Перейдем к оценке для $\|\Delta y(t,x)\|$, $\|\Delta y_t(t,x)\|$ и $\|\Delta y_x(t,x)\|$.

Из краевой задачи (11)–(12), переходя к эквивалентному интегральному уравнению и используя условие Липшица, получаем, что

$$\|\Delta y(t,x)\|\le C_1[\|\Delta z(t_1,x)\|+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta y(\tau,s)\|+\|\Delta y_\tau(\tau,s)\|]+$$
$$+\|\Delta y_s(\tau,s)\|+\|\Delta u_2(\tau,s)\|dsd\tau, \quad (56)$$

где $C_1=const>0$ некоторое постоянное.

Аналогично получаем, что

$$\|\Delta y_t(t,x)\|\le C_2\int_{x_0}^{x}[\|\Delta u_2(t,s)\|+$$
$$+\|\Delta y(t,s)\|+$$
$$+\|\Delta y_t(t,s)\|\Delta y_s(t,s)]ds, \quad (57)$$
$$\|\Delta y_x(t,x)\|\le C_3[\|\Delta z_x(t_1,x)\|+$$
$$+\|\Delta y(\tau,x)\|\|\Delta y_\tau(\tau,x)\|+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\|\Delta u_2(\tau,x)\|+\|\Delta y_x(\tau,x)\|d\tau, \quad (58)$$

где $C_2=const>0, C_3=const>0$ также некоторые постоянные.

Далее, ясно, что

$$\|\Delta y(t,x)\|\le$$
$$\le C_4[\|\Delta z(t_1,x)\|+\int_{t_1}^{t}\|\Delta y_\tau(\tau,x)\|d\tau, \quad (59)$$

$$\|\Delta y(t,x)\| \le \int_{x_0}^{x} \|\Delta y_s(t,s)\|\, ds, \qquad (60)$$
$$(\mathrm{C}_4 = const > 0).$$

Из (57)–(58) применяя лемму Гроноулла (см., например, [14]) соответственно, получим, что

$$\|\Delta y_t(t,x)\| \le \mathrm{C}_5 \left[\int_{x_0}^{x} \|\Delta u_2(t,s)\|\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_{x_0}^{x} [\|\Delta y(t,s)\| + \|\Delta y_s(t,s)\|]\, ds, \right.$$
$$\|\Delta y_x(t,x)\| \le \mathrm{C}_6 \|\Delta z_x(t_1,x)\|$$
$$+ \int_{t_1}^{t} [\|\Delta y(\tau,x)\| + \|\Delta y_\tau(\tau,x)\|] d\tau +$$
$$+ \int_{0}^{t} \|\Delta u_2(\tau,x)\| d\tau,$$

где $\mathrm{C}_5 = const > 0, \mathrm{C}_6 = const > 0$ некоторые постоянные.

Из последних неравенств, используя соответственно оценки (59), (60), получим

$$\|\Delta y_t(t,x)\| \le \mathrm{C}_7 \left[\int_{x_0}^{x} \|\Delta u_2(t,s)\|\, ds \right.$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \|\Delta y_s(t,s)\|\, ds + \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta y_\tau(\tau,s)\| ds d\tau +$$
$$\left. + \int_{x_0}^{x} \|\Delta z_x(t_1,s)\|\, ds \right], \qquad (61)$$

$$\|\Delta y_x(t,x)\| \le \mathrm{C}_8 [\Delta z_x(t_1,x) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \|\Delta u_2(\tau,x)\| d\tau + \int_{t_1}^{t} \|\Delta y_\tau(\tau,x)\|\, d\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta y_s(\tau,s)\| ds d\tau, \qquad (62)$$

$(\mathrm{C}_7 = const > 0, \mathrm{C}_8 = const > 0$ некоторые постоянные).

Применяя к этим неравенствам лемму Вендорффа (см., например, [14]), будем иметь

$$\|\Delta y_t(t,x)\| \le$$
$$\le \mathrm{C}_9 \left[\int_{x_0}^{x} [\|\Delta z\,(t_1,s)\| + \|\Delta u_2(t,s)\|] ds + \right.$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \|\Delta y_s(t,s)\|\, ds, \qquad (63)$$

$$\|\Delta y_x(t,x)\| \le \mathrm{C}_{10} [\|\Delta z_x(t_1,x)\| +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \|\Delta u_2(\tau,x)\| d\tau +$$
$$\left. \int_{t_1}^{t} \|\Delta y_\tau(\tau,x)\|\, d\tau \right], \qquad (64)$$

$(\mathrm{C}_9 = const > 0, \mathrm{C}_{10} = const > 0$ некоторые постоянные).

Усиливая эти неравенства (63), (64) друг с другом, а затем применяя к усиленным неравенствам лемму Вендорффа, аналогично будем иметь

$$\|\Delta y_t(t,x)\| \le$$
$$\le \mathrm{C}_{12} \left[\int_{x_0}^{x} \|\Delta z\,(t_1,s)\| [+\|\Delta u_2(t,s)\|] ds + \right.$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \|\Delta z_s(t_1,s)\|\, ds +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta u_2(\tau,s)\| ds d\tau, \qquad (65)$$

$$\|\Delta y_x(t,x)\| \le \mathrm{C}_{13} \|\Delta z\,(t_1,x)\| +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \|\Delta u_2(\tau,x)\| d\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta u_2(\tau,s)\|\, ds d\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta z\,(t_1,s)\| ds d\tau. \qquad (66)$$

Далее, из (59) с учетом (65) получаем, что

$$\|\Delta y(t,x)\| \le$$
$$\le \mathrm{C}_{11} \|\Delta z(t_1,x)\| + \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta z(t_1,s)\| ds d\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta u_2(\tau,s)\| ds d\tau +$$

$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta z_s(t_1,s)\|dsd\tau. \quad (67)$$

Используя оценки (65)–(67), с помощью специальных приращений управляющих функций получим необходимое условие оптимальности.

Предположим, что в () $\Delta u_2(t,x)\equiv 0$. Тогда из (52) получаем, что

$$S(u_1+\Delta u_1,v_1)-S(u_1,u_2)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1}\times\right.$$
$$\times\Delta p_1(t,x)dxdt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$
$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|y(\theta_i,\xi_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_5(\|\Delta p_1(t,x)+\Delta u_1(t,x)\|)dxdt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}o_4(\|\Delta p_2(t,x)+$$
$$+\Delta u_2(t,x)\|)dxdt. \quad (68)$$

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, $v_1(t,x)\in U_1\subset R^r,(t,x)\in D_1$, произвольное допустимое управление. Тогда с учетом выпуклости множества U_1 специальное приращение управляющей функции $u_1(t,x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t,x;\mu)=\mu[v_1(t,x)-u_1(t,x)]. \quad (69)$$

Через $\Delta z(t,x;\mu)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x)$ и $y(t,x)$, отвечающее приращению () управления. Из оценок (65)–(67) следует, что

$$\|\Delta z(t,x;\mu)\|\le C_{14}\mu, \quad (70)$$

$$\|\Delta z_t(t,x;\mu)\|\le C_{14}\mu, \quad (71)$$

$$\|\Delta z_x(t,x;\mu)\|\le C_{14}\mu, \quad (72)$$

где $C_{14}=const>0$ некоторая постоянная.

Принимая во внимания формулу (69) и оценки (70)–(72) из частичной формулы приращения (68), приходим к разложению

$$S\big(u_1(t,x)+\Delta u_1(t,x;\mu),v_1(t,x)\big)-$$
$$-S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)=$$
$$=-\mu\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1}\times$$
$$\times\big(v_1(t,x)-u_1(t,x)\big)dxdt+o(\mu). \quad (73)$$

Пусть теперь $\nu\in[0,1]$ произвольное число, $v_2(t,x)\in U_1\subset R^r,(t,x)\in D_1$, произвольное допустимое управление. Специальное приращение управляющей функции $u_2(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t,x;\nu)=\nu[v_2(t,x)-u_2(t,x)]. \quad (74)$$

Через $\Delta y(t,x;\nu)$ обозначим специальное приращение $y(t,x)$. Ясно, что $\Delta z(t,x;\nu)=0$. Поэтому из оценок (65)–(67), учитывая (68), получаем, что

$$\|\Delta y(t,x;\nu)\|\le C_{15}\nu,(t,x)\in D_2.$$
$$\|\Delta y_t(t,x;\nu)\|\le C_{15}\nu,(t,x)\in D_2.$$
$$\|\Delta y_x(t,x;\nu)\|\le C_{15}\nu,(t,x)\in D_2. \quad (75)$$

Учитывая (74), (75) из (68), получаем справедливость разложения

$$S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)+\Delta u_2(t,x;\nu)\big)-$$
$$-S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)=$$
$$=-\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2}\times$$
$$\times[v_2(t,x)-u_2(t,x)]dxdt+o(\nu). \quad (76)$$

Предположим, что допустимое управление является оптимальным управлением в задаче (1)–(7). Тогда из разложений (73), (76) получаем справедливость неравенств

$$\mu\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1}\times$$
$$\times[v_1(t,x)-u_1(t,x)]dxdt-o(\mu)\le 0, \quad (77)$$

$$\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2}\times$$
$$\times[v_2(t,x)-u_2(t,x)]dxdt+o(\nu)\le 0. \quad (78)$$

Из неравенств (77), (78) в силу произвольности $\mu\in[0,1]$ и $\nu\in[0,1]$ получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1} \times$$
$$\times [v_1(t,x) - u_1(t,x)]dxdt \le 0, \quad (79)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2} \times$$
$$\times [v_2(t,x) - u_2(t,x)]dxdt \le 0. \quad (80)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множества U_i, $i = 1{,}2$ выпуклы, а $f_i(t,x,p_i,u_i)$, $i = 1{,}2$ имеют непрерывные частные производные по (p_i,u_i), $i = 1{,}2$ соответственно, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ в задаче (1)–(7) необходимо, чтобы неравенства (79), (80) выполнялись для всех $v_1(t,x),v_2(t,x)$ соответственно.

Таким образом, доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного интегрального принципа максимума.

Непосредственным следствием теоремы является следующее утверждение.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u_1(t,x),u_2(t,x))$ в рассматриваемой задаче необходимо выполнение соотношений

$$\frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1} \times$$
$$\times [v_1(t,x) - u_1(t,x)] \le 0 \quad (81)$$

для всех $v_1 \in U_1, (\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$,

$$\frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2} \times$$
$$\times [v_2(t,x) - u_2(t,x)] \le 0 \quad (82)$$

для всех $v_2 \in U_2, (\theta,\xi) \in [t_1,t_2) \times [x_0,x_1)$.

Полученное необходимое условие оптимальности является аналогом линеаризованного (дифференциального) [15] принципа максимума.

Необходимые условия оптимальности (79) и (81), (80) и (82) можно показать, что эквивалентны.

Проверка этих необходимый условий оптимальности легче, чем проверка условий оптимальности (79), (80).

Но они более слабы, чем аналог принципа максимума Понтрягина и получены при более жестких ограничениях на данные рассматриваемой задачи.

Аналог уравнения Эйлера

Предположим, что множества U_i, $i = 1{,}2$ открыты, а $f_i(t,x,p_i,u_i)$, $i = 1{,}2$ непрерывно-дифференцируемы по (p_i,u_i), $i = 1{,}2$ соответственно. Предположим, что ε произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t,x) \in R^r, (t,x) \in D_1$ произвольная n-мерная измеримая и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управляющей функции).

Тогда специальное приращение управляющей функции $u_1(t,x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t,x;\varepsilon) = \varepsilon\delta u_1(t,x). \quad (83)$$

Пусть $(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y(t,x;\varepsilon))$ специальное приращение состояния $(z(t,x),y(t,x))$, отвечающее приращению (83) управления $u_1(t,x)$.

Из оценок (65), (67) и формулу (83) следует, что $\|\Delta p_1(t,x;\varepsilon)\|, \|\Delta p_2(t,x;\varepsilon)\|$ имеют порядок малости μ. Тогда учитывая формулу (83) из (68) получаем разложение

$$S(u_1 + \varepsilon\delta u_1, u_2) - S(u_1,u_2) =$$
$$= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1} \times$$
$$\times \delta u_1(t,x)dxdt + o(\varepsilon). \quad (84)$$

Теперь предположим, что

$$\Delta u_2(t,x;\varepsilon) = \varepsilon\delta u_2(t,x). \quad (85)$$

где, как и выше, ε также достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2(t,x) \in R^q, (t,x) \in D_2$ произвольная -мерная измеримая и ограниченная вектор-функция.

Пусть $(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y(t,x;\varepsilon))$ специальное приращение состояния $(z(t,x),y(t,x))$, отвечающее приращению (85) управления $u_2(t,x)$. Ясно, сто при этом $\|\Delta p_1(t,x;\varepsilon)\| = 0$, а $\|\Delta p_2(t,x;\varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε, в силу оценок (65), (67). Тогда из формулы приращения (52) следует, что

$$S(u_1,u_2) - S(u_1,u_2 + \varepsilon\delta u_2) =$$
$$= -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2} \times$$
$$\times \delta u_2(t,x)dxdt + o(\varepsilon). \quad (86)$$

Из разложений (84), (86), что в силу открытости областей управления $U_i,\ i = 1{,}2$ и основного результата вариационного исчисления следует, что если $\big(u_1(t,x), u_2(t,x)\big)$ оптимальное управление, то для всех $\delta u_1(t,x) \in R^r, \delta u_2(t,x) \in R^q$ выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1} \times \times \delta u_1(t,x)dxdt = 0, \qquad (87)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2} \times \times \delta u_2(t,x)dxdt = 0. \qquad (88)$$

Соотношения (87), (88) являются неявными необходимыми условиями первого порядка. Но из них можно получить явно выраженную через параметры рассматриваемой задачи вариацию управления определяя специальным образом.

Имеет место

Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера). Если множества $U_i,\ i = 1{,}2$ открыты, то для оптимальности допустимого управления $\big(u_1(t,x), u_2(t,x)\big)$ необходимо выполнение соотношений

$$\frac{\partial H_1(t,x,p_1,u_1,\psi_1)}{\partial u_1} = 0 \qquad (89)$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$,

$$\frac{\partial H_2(t,x,p_2,u_2,\psi_2)}{\partial u_2} = 0 \qquad (90)$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_1,t_2) \times [x_0,x_1)$.

Соотношения (89), (90) являются аналогом уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления для рассматриваемой задачи.

Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в двух областях нелинейными системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса, при предположении что функционал качества является многоточечным.

При развитии аналога метода приращений для рассматриваемой задачи введены сопряженные уравнения в форме двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с одномерными слагаемыми. Построена общая формула приращения критерия качества первого порядка, носящего конструктивный характер. Приведены оценки норм приращений состояний. Исследуя полученную формулу приращения на игольчатого типа вариациях (аналог вариации Макшейна) управления, доказан аналог принципа максимума Понтрягина. При предположении выпуклости областей управления и гладкости правых частей уравнений также по управляющим функций выведен аналог линеаризованного условия максимума.

В частности, приведено необходимое условие оптимальности в форме дифференциального условия максимума. В случае открытости областей управления установлен аналог классического уравнения Эйлера.

Список источников

1. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
2. *Ахмедов К.Т., Ахиев С.С.* Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972. № 5. С .12–16.
3. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В.* Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической. физики. 1975. № 5. С. 1157–1167.
4. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической. физики. 1972. № 1. С. 61–67.
5. *Срочко В.А.* Условия оптимальности типа максимума в системах Гурса–Дарбу // Сибирский математический журнал. 1984. №2. С. 56–65.
6. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления с распределенными системами. Ч. I. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
7. *Мансимов К.Б.* Условия оптимальности второго порядка системами Гурса–Дарбу при наличии ограничений // Дифференциальные уравнения. 1990. № 6. С. 954–965.

8. *Мансимов К.Б.* Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 116–122.
9. *Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ. и М И.Н. Векуа. Тбилиси, 1988. Т. 27. С. 35–48.
10. *Захаров Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1993. № 6. С. 32–36.
11. *Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычислительной математики и математической. физики. 2006. № 10. С. 158–170.
12. *Никольский М.С.* Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ, Серия Вычислительной математики и кибернетики. 1987. № 1. С. 31–41.
13. *Васильев О.В., Срочко В.А., Трелецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. М.: Наука, 1990. 151 с.
14. *Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И.* Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.

References

1. *Yegorov A.I.* Ob raspredelenii upravleniya protsessami v nekotorykh resursakh s raspredelennymi parametrami. Avtomatika i telemekhanika. 1964;5:613-623. (In Russ.).
2. *Akhmedov K.T., Akhiyev S.S.* Neobkhodimyye usloviya vodnykh resursov dlya nekotorykh zadach teorii ekonomicheskogo upravleniya. Dokl. AN Azerb. SSR. 1972;5:2-16. (In Russ.).
3. *Ashchepkov L.T., Vasil'yev O.V.* Ob isklyuchitel'nosti osobykh upravleniy v istochnikakh Gursa–Darbu. Zhurnal vychislitelnoiy matematiki i matemematicheskoiy fiziki. 1975;5:1157-1167. (In Russ.).
4. *Plotnikov V.I., Sumin V.I.* Optimizatsiya ob"yektov s raspredelennimi parametrami, opisyvayemymi infektsiyami Gursa–Darbu. Zhurnal vychislitelnoiy matematiki i matemematicheskoiy fiziki. 1972;1:61-67. (In Russ.).
5. *Srochko V.A.* Usloviya universal'nosti tipa maksimal'noy v rasteniyakh Gursa–Darbu. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal 1984;2:56-65. (In Russ.).
6. *Sumin V.I.* Vol'terrovy uravneniya v teorii upravleniya s raspredelennymi funktsional'nymi proyavleniyami. Ch. I. Nizhniy Novgorod: Izd-vo NNGU; 1992. 110 s. (In Russ.).
7. *Mansimov K.B.* Trebovaniya k srednemu tsvetu tsveta Gursa–Darbu pri nalichii ogranicheniy. Differentsialnii uravneniya. 1990;6:954-965. (In Russ.).
8. *Mansimov K.B.* Integral'nyye ekvivalentnyye usloviya kislotnosti kvazisobstvennykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu. Avtomatika i telemekhanika. 1993;5:116-122. (In Russ.).
9. *Arsenashvili A.I., Tadumadze T.A.* Neobkhodimyye usloviya potrebleniya dlya upravleniya sistemami s ukazaniyem struktury i nepreryvnymi usloviyami preyemstvennosti. Trudy IPM i M I.N. Vekua. Tbilisi, 1988;(1(27):35-48. (In Russ.).
10. *Zakharov G.K.* Optimizatsiya stupenchatykh sistem s upravleniyem dostupom. Avtomatika i telemekhanika. 1993;6:32-36. (In Russ.).
11. *Ismaylov R.R., Mansimov K.B.* Ob usloviyakh natsional'nosti v odnoy stupenchatoy zadache upravleniya. Zhurnal vychislitelnoiy matematiki i matemematicheskoiy fiziki. 2006;10:158-170. (In Russ.).
12. *Nikol'skiy M.S.* Ob odnoy variatsionnoy zadache s ustanovkoy stuktury. Vestnik MGU, Ser. vychislitelnoiy matematiki i kibernetiki. 1987;1:31-41. (In Russ.).
13. *Vasil'yev O.V., Srochko V.A., Treletskiy V.A.* Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. M.: Nauka; 1990. 151 s. (In Russ.).
14. *Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I.* Metody obshcheprinyatogo upravleniya matematicheskoy fizikoy. Gor'kiy: Izd-vo GGU; 1986. 87 s. (In Russ.).
15. *Gabasov R., Kirillova F.M.* maksimal'naya v teorii printsipov upravleniya. M.: Librokom; 2011. 272 s. (In Russ.).

Информация об авторах:

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), руководитель лаборатории "Управление в сложных динамических системах" Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68), AuthorID 247352;

Ш. Ш. Сулейманова – диссертант Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68).

Information about the authors:

K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Mathematical Cybernetics Department, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141), AuthorID 247352;

Sh. Sh. Suleymanova – dissertation candidate at the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141).