«Математика»

Научная статья
УДК 519.6: 532.5
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-5-15

Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на числовой оси

Н.К. Волосова[1], К.А. Волосов[2], А.К. Волосова[2], М.И Карлов[3], Д.Ф. Пастухов[4], Ю.Ф. Пастухов[4]

[1]Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2] Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия
[3]Московский физико-технический университет (МФТИ), Москва, Россия
[4]Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. В работе предложена модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на действительной оси. Аналитическая формула содержит квадратный корень (радикал) и применима для кратности корня не выше двух. Показано, что для однократного корня формула с радикалом имеет третий порядок скорости сходимости невязки к нулю, в то время формула Ньютона сходится со вторым порядком скорости. Для кратности корня два порядок скорости для формулы с радикалом равен двум. Формула с радикалом заменена рядом из одиннадцати слагаемых, то есть, продолжена на числовую ось при любой кратности корня. Для корня кратности один предложена итерационная формула из одиннадцати слагаемых. Для кратности корня два и более предложен итерационный алгоритм с параметром $0<q<1$. На первом этапе до начала итерационного цикла считается параметр q всего один раз, который зависит только от кратности корня m. На втором этапе в цикле работает итерационная формула с фиксированным найденным параметром q со вторым порядком скорости невязки. На примерах показано, что новая формула имеет меньшее число итераций, чем в формуле Ньютона и в модифицированной формуле Ньютона для кратности корня один. Ускоренный алгоритм со вторым порядком скорости невязки эффективен в более широкой области, чем модифицированная формула Ньютона. Итерационный алгоритм применим для функции дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке [a, b] и принимающей противоположные знаки на его концах (достаточное условие локализации на отрезке хотя бы одного корня).

Ключевые слова: *численные методы; нелинейные уравнения; итерационный метод*

Для цитирования: *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.* Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на числовой оси // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-5-15.

Статья поступила в редакцию 11.04.2023; одобрена после рецензирования 10.05.2023; принята к публикации 17.06.2023.

«Mathematics»

Research article

Modified Newton Formula of Tangent Parabolas on the Number Axis

N.K. Volosova[1], K.A. Volosov[2], A.K. Volosova[2], M.I. Karlov[3], D.F. Pastuhov[4], Yu.F. Pastuhov[4]

[1]Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia
[2]Russian University of Transport (RUT MIIT); Moscow, Russia
[3]Moscow University of Physics and Technology (MIPT), Moscow, Russia
[4]Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

Abstract. The paper proposes a modified Newton's formula - tangent parabolas on the real axis. The analytical formula contains a square root (radical) and is applicable for the multiplicity of the root no more than two. It is shown that for a single root the formula with a radical has the third order of the rate of convergence of the residual to zero, while Newton's formula converges with the second order of the rate. For a root multiplicity of two, the order of speed for a formula with a radical is two. The formula with the radical is replaced by a series of eleven terms, that is, it is extended to the numerical axis for any multiplicity of the root. For a root of multiplicity one, an iterative formula of eleven terms is proposed. For the multiplicity of the root two or more, an iterative algorithm with the parameter 0<q<1 is proposed. At the first stage, before the start of the iterative cycle, the parameter q is calculated only once, which depends only on the multiplicity of the root. At the second stage, the iterative formula with the parameter q with the second order of the discrepancy rate works in the cycle. The examples show that the new formula has a smaller number of iterations than in the Newton formula and in the modified Newton formula for the multiplicity of the root one. The accelerated algorithm with the second order of the residual rate is efficient over a wider area than the modified Newton formula. The iterative algorithm is applicable to a function that is twice continuously differentiable on the interval [a, b] and takes opposite signs at its ends.

Keywords: *numerical methods; nonlinear equations; iterative method*

For citation: *Volosova N. K., Volosov K. A., Volosova A. K., Karlov M. I., Pastuhov D. F., Pastuhov Yu. F.* Modified Newton Formula of Tangent Parabolas on the Number Axis. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;2(61):5-15. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-5-15.

The article was submitted 11.04.2023; approved after reviewing 10.05.2023; accepted for publication 17.06.2023.

Введение

Итерационная формула касательных Ньютона для численного решения нелинейных уравнений содержится во всех учебниках по численным методам [1], [2]. Также эта формула используется профессором В.М. Тихомировым для поиска точек экстремума в конечномерных задачах на безусловный экстремум [3]. Следовательно, алгоритм может косвенно использоваться и в сложных задачах на экстремум, например в задаче Л.С. Понтрягина [4], [5]. В случае кратного корня нелинейного уравнения порядок скорости сходимости невязки для итерационной формулы Ньютона падает со второго до первого [1], [2].

Авторы работы [1] предложили модифицированную формулу касательных Ньютона.

В данной работе также получена модифицированная формула Ньютона касательных парабол. Аналитическая формула (11) затем обобщена для аргумента z на всю числовую прямую и имеет вид ряда (18) с одиннадцатью слагаемыми. Показано, что новая формула (18) имеет те же свойства, что и аналитическая формула касательных парабол (11), но требует меньшее число итераций, чем формула Ньютона и модифицированная формула Ньютона для поиска корня кратности m=1 с заданной точностью. Для кратности корня $m \geq 2$ нами предложен алгоритм (21), (22) который, как и модифицированная формула Ньютона (23), находит корень с двойной точностью за одну итерацию. Алгоритм (21), (22) работает со вторым порядком скорости в более широкой области принадлежности корня и начальной итерации, чем простая модифицированная формула Ньютона (23) для кратного корня.

Постановка задачи

Рассмотрим итерационную формулу касательных Ньютона (2) [1] для отыскания корней функции одной действительной переменной (1):

$$f(x)=0, x\in R, f(x)\in R; \qquad (1)$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)},\ n=0,1,2,... \ . \qquad (2)$$

Начальная итерация x_0:

$$x_0\in[a,b],\ f(a)f(b)<0,\ f(x)\in C^1[a,b]$$

принадлежит отрезку с изолированным корнем $\overset{*}{x}$. По определению корня всегда $f(\overset{*}{x})=0$.

Кроме того, производные порядка m-1 включительно в точке корня $\overset{*}{x}$. могут быть равны нулю: $f^{(k)}(\overset{*}{x}) = 0, k = \overline{0, m-1}$, тогда функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = f\left(\overset{*}{x}\right) + ... + \frac{f^{(m-1)}\left(\overset{*}{x}\right)}{(m-1)!}(x-\overset{*}{x})^{m-1} + \frac{f^{(m)}\left(\overset{*}{x}\right)}{m!}(x-\overset{*}{x})^{m} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(m+k)}}{(m+k)!}\left(\overset{*}{x}\right)(x-\overset{*}{x})^{m+k} = (x-\overset{*}{x})^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(m+k)}}{(m+k)!}\left(\overset{*}{x}\right)(x-\overset{*}{x})^{k} =$$

$$= (x-\overset{*}{x})^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(m+k)}}{(m+k)!}\left(\overset{*}{x}\right)(x-\overset{*}{x})^{k} = (x-\overset{*}{x})^{m}\varphi(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(m+k)}}{(m+k)!}\left(\overset{*}{x}\right)(x-\overset{*}{x})^{k}, \varphi(\overset{*}{x}) = \frac{f^{(m)}}{m!}\left(\overset{*}{x}\right) \neq 0, f^{(m)}(\overset{*}{x}) \neq 0.$$

Тогда про корень $\overset{*}{x}$ говорят, что он имеет кратность m. При выводе формулы (2) в последовательности точек касания $(x_n, f(x_n))$ графика функции $(x, f(x))$ предполагалось, что касательное множество точек – прямая $y(x) = f_n + (x - x_n) f_n'$ имеет два очевидных условия согласования: $y(x_n) = f_n,\ y'(x_n) = f'_n$.

Идея данной работы заключается в использовании касательного множества точек с тремя условиями согласования (метод "касательных парабол"):

$$y(x) = f_n + (x-x_n) f_n' + \frac{(x-x_n)^2 f_n''}{2} \Leftrightarrow \quad (4)$$

$$y(x_n) = f_n,\ y'(x_n) = f_n',\ y''(x_n) = f_n''.$$

Следующую точку итерации найдем из условия пересечения действительной оси и касательной параболы (4), обозначим

$$\Delta_n = x_{n+1} - x_n,$$

$$y(x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow 0 = f_n + \Delta_n f_n' + \frac{\Delta_n^2 f_n''}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_n^2 f_n'' + 2\Delta_n f_n' + 2 f_n = 0. \quad (5)$$

Последнее уравнение имеет два корня:

$$\Delta_n = \frac{-f_n' \pm \sqrt{(f_n')^2 - 2 f_n f_n''}}{f_n''},\ f_n'' \neq 0. \quad (6)$$

Определение 1 [1]. Говорят, что бесконечно малая числовая последовательность $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ сходится к нулю с порядком скорости p, если существует предел

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|^p} = C < +\infty. \quad (7)$$

Если в формуле (6) выражение $(f_n')^2 - 2 f_n f_n'' < 0$, то Δ_n будет комплексным.

Формулу (6) перепишем в эквивалентном виде (8):

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = x_{1,n} + \dfrac{-f_n' + \sqrt{(f_n')^2 - 2 f_n f_n''}}{f_n''} \\ x_{2,n+1} = x_{2,n} - \left(\dfrac{f_n' + \sqrt{(f_n')^2 - 2 f_n f_n''}}{f_n''}\right),\ f_n'' \neq 0 \end{cases}. \quad (8)$$

В формулах (8) из правой и левой части вычтем значение корня $\overset{*}{x}$, обозначим разность $\delta_{1,n} = x_{1,n} - \overset{*}{x}, \delta_{2,n} = x_{2,n} - \overset{*}{x}$, формулы (8) перейдут в формулы невязок:

$$\begin{cases} \delta_{1,n+1} = \delta_{1,n} + \dfrac{-f_n' + \sqrt{(f_n')^2 - 2 f_n f_n''}}{f_n''} \\ \delta_{2,n+1} = \delta_{2,n} + \dfrac{-f_n' - \sqrt{(f_n')^2 - 2 f_n f_n''}}{f_n''},\ f_n'' \neq 0 \end{cases}. \quad (9)$$

В последних формулах (9) вынесем модуль $|f_n'|$ из корня, получим

$$\delta_{1,n+1} = \delta_{1,n} + \frac{-f_n' + |f_n'|\sqrt{1 - 2 f_n f_n''/(f_n')^2}}{f_n''} =$$

$$= \delta_{1,n} - \frac{f_n'}{f_n''}\left(1 - \sqrt{1 - 2 f_n f_n''/(f_n')^2}\right),\ |f_n''| \neq 0, f_n' > 0, \quad (10a)$$

$$\delta_{2,n+1} = \delta_{2,n} + \frac{-f_n' - |f_n'|\sqrt{1 - 2 f_n f_n''/(f_n')^2}}{f_n''} =$$

$$= \delta_{2,n} - \frac{f_n'}{f_n''}\left(1 - \sqrt{1 - 2 f_n f_n''/(f_n')^2}\right),\ |f_n''| \neq 0, f_n' < 0. \quad (10b)$$

Таким образом, две формулы (10*a*) с положительным значением производной функции $f_n' > 0$ и (10*b*) с отрицательным значением производной $f_n' < 0$ объединим в одну итерационную формулу (11) без индекса 1 или 2, считая при преобразованиях формулы (11) для простоты $f_n' > 0$.

$$\delta_{n+1} = \delta_n - \frac{f_n'}{f_n''}\left(1 - \sqrt{1 - 2 f_n f_n''/(f_n')^2}\right),\ |f_n''| \neq 0. \quad (11)$$

Обозначим в формуле (1) m кратность $\overset{*}{x}$ корня, тогда по определению кратности можно записать

$$f(x) = \left(x - \overset{*}{x}\right)^m \varphi(x), \varphi(\overset{*}{x}) \neq 0, m \geq 1.$$

Найдем первую и вторую производные от функции $f(x)$:

$$\begin{cases} f'(x) = m\left(x-\overset{*}{x}\right)^{m-1}\varphi(x)+\left(x-\overset{*}{x}\right)^{m}\varphi'(x), \varphi(\overset{*}{x})\neq 0 \\ f''(x) = m(m-1)\left(x-\overset{*}{x}\right)^{m-2}\varphi(x)+2m\left(x-\overset{*}{x}\right)^{m-1}\varphi'(x)+\left(x-\overset{*}{x}\right)^{m}\varphi''(x) \end{cases} \tag{12}$$

Необходимо переписать формулы (11) в итерационном виде:

$$f(x_n) = f_n = \left(x_n-\overset{*}{x}\right)^m\varphi(x_n) = \delta_n^m\varphi_n, \tag{13}$$

$$f_n' = m\left(x_n-\overset{*}{x}\right)^{m-1}\varphi(x_n)+\left(x_n-\overset{*}{x}\right)^{m}\varphi'(x_n) = m\delta_n^{m-1}\varphi_n+\delta_n^m\varphi'_n, \tag{13a}$$

$$f_n'' = m(m-1)\left(x_n-\overset{*}{x}\right)^{m-2}\varphi(x_n)+2m\left(x_n-\overset{*}{x}\right)^{m-1}\varphi'(x_n)+\left(x_n-\overset{*}{x}\right)^{m}\varphi''(x_n) =$$

$$= m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n+2m\delta_n^{m-1}\varphi'_n+\delta_n^m\varphi''_n . \tag{13b}$$

Лемма 1. Формула (11) корректна для кратности корня m=1 или m=2, при этом порядок скорости сходимости δ_n выше первого (второй или выше).

Доказательство

В пределе $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \overset{*}{x} \Leftrightarrow \delta_n = x_n - \overset{*}{x} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Тогда в формулах (13), (13*a*), (13*b*), выделяя главное предельное слагаемое, получим

$$f_n = \delta_n^m\varphi_n,\; f_n' \approx m\delta_n^{m-1}\varphi_n,\; f_n'' \approx m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n .$$

А формула (11) получит предельный вид

$$\delta_{n+1} = \delta_n - \frac{f_n'}{f_n''}\left(1-\sqrt{1-2f_nf_n''/\left(f_n'\right)^2}\right)\approx$$

$$\approx \delta_n - \frac{m\delta_n^{m-1}\varphi_n}{m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n}\left(1-\sqrt{1-2\delta_n^m\varphi_n m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n/\left(m\delta_n^{m-1}\varphi_n\right)^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \delta_n - \frac{\delta_n}{(m-1)}\left(1-\sqrt{1-2(m-1)/m}\right) .$$

Преобразуем последнюю формулу

$$\delta_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \delta_n - \frac{\delta_n}{(m-1)}\left(1-\sqrt{1-2(m-1)/m}\right)=$$

$$= \delta_n\left(1-\frac{2(m-1)/m}{(m-1)\left(1+\sqrt{1-2(m-1)/m}\right)}\right)=$$

$$= \delta_n\left(1-\frac{2}{m\left(1+\sqrt{1-2(m-1)/m}\right)}\right) . \tag{14}$$

В первом случае для кратности m=1 из формулы (14) получим

$$\delta_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \delta_n\left(1-\frac{2}{m\left(1+\sqrt{1-2(m-1)/m}\right)}\right)\Bigg|_{m=1} =$$

$$= \delta_n\left(1-\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-2(1-1)/1}\right)}\right) = \delta_n(1-1) = 0+o(\delta_n) = o(\delta_n) .$$

То есть, порядок степени δ_n в правой части последней формулы – два либо больше.

Во втором случае для кратности m=2 аналогично из (14) получим

$$\delta_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \delta_n\left(1-\frac{2}{m\left(1+\sqrt{1-2(m-1)/m}\right)}\right)\Bigg|_{m=2} =$$

$$= \delta_n\left(1-\frac{2}{2\left(1+\sqrt{1-2(2-1)/2}\right)}\right) = \delta_n(1-1) = 0+o(\delta_n) = o(\delta_n) .$$

То есть, порядок степени δ_n в правой части последней формулы – два и более. Следовательно, по определению 1 имеем, что порядок скорости сходимости итерации в формуле (11) – не менее двух для кратности корня уравнения (1) m=1 или m=2. Подкоренное значение в (14) неотрицательно (условие корректности формулы (11) для действительных значений δ_n), если

$$1-2(m-1)/m \geq 0 \Leftrightarrow m-2(m-1) = 2-m \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$m \leq 2 \Leftrightarrow m = \{1,2\}.$$

Поэтому важно получить другую формулу аналогичную (11) при кратности корня m>2 на всей числовой прямой.

Лемма 1 доказана.

Производные функции f(x) из формул (13), (13*a*), (13*b*) подставим в формулу (11), получим (15)

$$\delta_{n+1} = \delta_n - \left(\frac{m\delta_n^{m-1}\varphi_n+\delta_n^m\varphi'_n}{m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n+2m\delta_n^{m-1}\varphi'_n+\delta_n^m\varphi''_n}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\sqrt{1-2\frac{\delta_n^m\varphi_n\left(m(m-1)\delta_n^{m-2}\varphi_n+2m\delta_n^{m-1}\varphi'_n+\delta_n^m\varphi''_n\right)}{\left(m\delta_n^{m-1}\varphi_n+\delta_n^m\varphi'_n\right)^2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n - \delta_n\left(\frac{1+\dfrac{\delta_n\varphi'_n}{m\varphi_n}}{m-1+2\delta_n\dfrac{\varphi'_n}{\varphi_n}+\delta_n^2\dfrac{\varphi''_n}{m\varphi_n}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\sqrt{1-2\frac{\left(\left(\dfrac{m-1}{m}\right)+2\dfrac{\delta_n\varphi'_n}{m\varphi_n}+\delta_n^2\dfrac{\varphi''_n}{m^2\varphi_n}\right)}{\left(1+\delta_n\dfrac{\varphi'_n}{m\varphi_n}\right)^2}}\right) . \tag{15}$$

Заметим, что формула (15) является точной.

Введем упрощающие преобразования обозначения:

$$a = \frac{\varphi'_n}{\varphi_n}, b = \frac{\varphi''_n}{\varphi_n}, \varphi_n \neq 0, |a| < \infty, |b| < \infty,$$

$$z = 2f_nf_n''/\left(f_n'\right)^2, A = \sqrt{1-z}, B = \frac{f_n'}{f_n''} .$$

С учетом новых обозначений перепишем формулу (15):

$$\delta_{n+1}=\delta_n-B(1-A)=\delta_n-B\left(1-\sqrt{1-z}\right), B=\delta_n\left(\frac{1+\frac{\delta_n a}{m}}{m-1+2\delta_n a+\delta_n^{\,2}\frac{b}{m}}\right),$$

$$z=2\frac{\left(\left(\frac{m-1}{m}\right)+2\frac{\delta_n a}{m}+\delta_n^{\,2}\frac{b}{m^2}\right)}{\left(1+\delta_n\frac{a}{m}\right)^2},\ A=\sqrt{1-z}\ . \quad (16)$$

Учитывая Лемму 1, уточним порядок скорости для невязки δ_n в формулах (15), (16).

Лемма 2. Формула (16) для кратности корня m=1 имеет третий порядок скорости сходимости невязки к нулю $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство. В случае m=1 дробь z в формуле (16) имеет вид, с использованием разложения в ряд Тейлора известной формулы

$$\frac{1}{1+x}=1-x-x^2+o\left(x^2\right), |x|<1$$

$$z=2\frac{\left(\left(\frac{m-1}{m}\right)+2\frac{\delta_n a}{m}+\delta_n^{\,2}\frac{b}{m^2}\right)}{\left(1+\delta_n\frac{a}{m}\right)^2}=2\delta_n\frac{\left(2a+b\delta_n\right)}{1+2a\delta_n+a^2\delta_n^2}=$$

$$=4a\delta_n\left(1+\frac{b\delta_n}{2a}\right)\left(1-2a\delta_n-a^2\delta_n^2-4a^2\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right)\right)=$$

$$=4a\delta_n\left(1+\delta_n\left(\frac{b}{2a}-2a\right)+\delta_n^2\left(-5a^2-b\right)+o\left(\delta_n^2\right)\right).$$

Применим формулу Тейлора для квадратного корня $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)$:

$$A=\sqrt{1-z}=1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+o\left(z^3\right)=$$

$$=1-2a\delta_n\left(1+\delta_n\left(\frac{b}{2a}-2a\right)+\delta_n^2\left(-5a^2-b\right)+o\left(\delta_n^2\right)\right)-$$

$$-2a^2\delta_n^2\left(1+2\delta_n\left(\frac{b}{2a}-2a\right)\right)-4a^3\delta_n^3+o\left(\delta_n^3\right)=$$

$$=1-2a\delta_n+\delta_n^2\left(-b+4a^2-2a^2\right)+$$

$$+\delta_n^3\left(2ab+10a^3-2ab+8a^3-4a^3\right)+o\left(\delta_n^3\right)=$$

$$=1-2a\delta_n+\delta_n^2\left(-b+2a^2\right)+14a^3\delta_n^3+o\left(\delta_n^3\right).$$

$$1-A=2a\delta_n+\delta_n^2\left(b-2a^2\right)-14a^3\delta_n^3+o\left(\delta_n^3\right)=$$

$$=2a\delta_n\left(1+\delta_n\left(\frac{b}{2a}-a\right)-7a^2\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right)\right).$$

Далее преобразуем дробь B для кратности корня m=1:

$$B=\delta_n\left(\frac{1+\frac{\delta_n a}{m}}{m-1+2\delta_n a+\delta_n^{\,2}\frac{b}{m}}\right)=\frac{1+a\delta_n}{2a\left(1+\frac{b\delta_n}{2a}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(1+a\delta_n\right)\left(1-\frac{b\delta_n}{2a}-\frac{b^2\delta_n^2}{4a^2}-\frac{b^3\delta_n^3}{8a^3}+o\left(\delta_n^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(1+\delta_n\left(a-\frac{b}{2a}\right)+\delta_n^2\left(-\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+\delta_n^3\left(-\frac{b^3}{8a^3}-\frac{b^2}{4a}\right)+o\left(\delta_n^3\right)\right).$$

Перепишем формулу (16) при m=1 с учетом найденных выражений $A=\sqrt{1-z}, B$

$$\delta_{n+1}=\delta_n-B(1-A)=$$

$$=\delta_n-\left(\frac{1}{2a}\left(1+\delta_n\left(a-\frac{b}{2a}\right)+\delta_n^2\left(-\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+\delta_n^3\left(-\frac{b^3}{8a^3}-\frac{b^2}{4a}\right)+o\left(\delta_n^3\right)\right)\right)\cdot$$

$$\cdot 2a\delta_n\left(1+\delta_n\left(\frac{b}{2a}-a\right)-7a^2\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right)\right)=$$

$$=\delta_n-\delta_n\left(1+\delta_n\left(a-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}-a\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_n^2\left(-\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4a^2}-7a^2-\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2\right)+o\left(\delta_n^2\right)\right)=$$

$$=-\delta_n^3\left(\frac{b}{2}-8a^2-\frac{b^2}{2a^2}\right)+o\left(\delta_n^3\right).$$

Согласно определению 1,

$$\lim_{\substack{\delta_n\to 0\\ n\to\infty}}\frac{\left|\delta_{n+1}\right|}{\left|\delta_n\right|^3}=\left|\frac{b}{2}-8a^2-\frac{b^2}{2a^2}\right|=C<\infty, p=3.$$

А невязка итерационной формулы (15) при m=1 имеет третий порядок скорости. **Лемма 2** доказана.

Лемма 3. Формула (15) для кратности корня m=2 имеет второй порядок скорости стремления невязки к нулю $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство. В случае m=2 дробь z в формуле (16) имеет вид, с использованием разложения в ряд Тейлора известной формулы,

$$\frac{1}{1+x}=1-x-x^2-x^3+o\left(x^3\right), |x|<1;$$

$$z=2\frac{\left(\frac{m-1}{m}\right)+2\frac{\delta_n a}{m}+\delta_n^2\frac{b}{m^2}}{\left(1+\frac{\delta_n a}{m}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\delta_n a+\delta_n^2\frac{b}{4}\right)}{\left(1+\frac{\delta_n a}{2}\right)^2}=\frac{1+2\delta_n a+\delta_n^2\frac{b}{2}}{1+\delta_n a+\delta_n^2\frac{a^2}{4}}=$$

$$=\left(1+2\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\frac{b}{2}\right)\left(1-\delta_n a-\delta_n^2\frac{a^2}{4}-\right.$$
$$\left.-\left(\delta_n^2 a^2+\frac{\delta_n^3 a^3}{2}+o\left(\delta_n^3\right)\right)-\delta_n^3 a^3+o\left(\delta_n^3\right)\right)=$$
$$=\left(1+\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\left(\frac{b}{2}-\frac{5a^2}{4}-2a^2\right)+\delta_n^{\ 3}\left(-\frac{3a^3}{2}-\frac{ab}{2}-\frac{5}{2}a^3\right)\right)+o\left(\delta_n^{\ 3}\right)=$$
$$=1+\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\left(\frac{b}{2}-\frac{13a^2}{4}\right)+\delta_n^{\ 3}\left(-4a^3-\frac{ab}{2}\right)+o\left(\delta_n^{\ 3}\right)$$
$$A=\sqrt{1-z}=\sqrt{-\delta_n a+o(\delta_n)},\ 1-A=1-\sqrt{-\delta_n a+o(\delta_n)}\,.$$

Далее преобразуем дробь B для кратности корня m=2:

$$B=\delta_n\left(\frac{1+\dfrac{\delta_n a}{2}}{1+2\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\dfrac{b}{2}}\right)=\frac{\delta_n\left(1+\dfrac{a\delta_n}{2}\right)}{1+2\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\dfrac{b}{2}}=$$
$$=\delta_n\left(1+\frac{a\delta_n}{2}\right)\left(1-2\delta_n a-\delta_n^{\ 2}\frac{b}{2}-\left(2\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\frac{b}{2}\right)^2-\left(2\delta_n a+\delta_n^{\ 2}\frac{b}{2}\right)^3+o\left(\delta_n^3\right)\right)=$$
$$B=\delta_n\left(1-\frac{3\delta_n a}{2}+\delta_n^2\left(-4a^2-\frac{b}{2}-a^2\right)+o\left(\delta_n^2\right)\right)=$$
$$=\delta_n-\frac{3a}{2}\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right)\ .$$

Перепишем формулу (16) при m=2 с учетом выражений $A=\sqrt{1-z}, B$

$$\delta_{n+1}=\delta_n-B(1-A)=\delta_n-\left(\delta_n-\frac{3a}{2}\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\sqrt{-\delta_n a+o(\delta_n)}\right)=\frac{3a}{2}\delta_n^2+o\left(\delta_n^2\right).$$

Согласно определению 1,

$$\lim_{\substack{\delta_n\to 0\\ n\to\infty}}\frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|^2}=\left|\frac{3a}{2}\right|=C<\infty, p=2\,.$$

А невязка итерационной формулы (15) при m=2 имеет второй порядок скорости. **Лемма 3** доказана.

Замечание 1. Согласно Лемме 1 итерационная формула (11) корректна только для кратности корня m=1, 2. Но даже в этом случае из-за наличия арифметического квадратного корня формула (11) численно ограничена, так как при отрицательном подкоренном значении программа блокируется функцией SQRT.

Поэтому в данной работе мы предложили новую идею для вычисления формулы (11) при любой кратности корня и даже при отрицательном подкоренном значении в (11).

Разложим в ряд Тейлора функцию

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^4}{4!}+$$
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)(-x)^5}{5!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)(-x)^6}{6!}+$$
$$+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)(-x)^7}{7!}+$$
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)(-x)^8}{8!}+$$
$$+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)(-x)^9}{9!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)(-x)^{10}}{10!}+$$
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)\left(-\frac{19}{2}\right)(-x)^{11}}{11!}+o\left(x^{11}\right)=$$
$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}-\frac{21x^6}{1024}-\frac{33x^7}{2048}-$$
$$-\frac{429x^8}{32768}-\frac{715x^9}{65536}-\frac{2431x^{10}}{262144}-\frac{4199x^{11}}{524288}+o\left(x^{11}\right).\qquad(17)$$

В зависимости от кратности корня переменная z принимает значения:

$$z=\begin{cases}2\dfrac{\left(\left(\dfrac{m-1}{m}\right)+2\dfrac{\delta_n a}{m}+\delta_n^{\ 2}\dfrac{b}{m^2}\right)}{\left(1+\delta_n\dfrac{a}{m}\right)^2}=4a\delta_n+o(\delta_n), m=1\\ 2\left(\dfrac{m-1}{m}\right)<2, m\geq 2\end{cases}.$$

Формула (11) с учетом формулы (17) примет вид ряда

$$\delta_{n+1}=\delta_n-\frac{f_n'}{f_n''}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{5z^4}{128}+\frac{7z^5}{256}+\frac{21z^6}{1024}+\frac{33z^7}{2048}+\right.$$
$$\left.+\frac{429z^8}{32768}+\frac{715z^9}{65536}+\frac{2431z^{10}}{262144}+\frac{4199z^{11}}{524288}+o\left(z^{11}\right)\right)\Leftrightarrow$$
$$x^{n+1}=x^n-\frac{f_n'}{f_n''}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{5z^4}{128}+\frac{7z^5}{256}+\frac{21z^6}{1024}+\frac{33z^7}{2048}+\right.$$
$$\left.+\frac{429z^8}{32768}+\frac{715z^9}{65536}+\frac{2431z^{10}}{262144}+\frac{4199z^{11}}{524288}+o\left(z^{11}\right)\right)(18)$$

Так как

$$z=2f_n f_n''/\left(f_n'\right)^2\underset{\delta_n\to 0}{\to}\frac{2(m-1)}{m}>0,\ m\geq 2;\ \frac{f_n'}{f_n''}\underset{\delta_n\to 0}{\to}\frac{\delta_n}{m-1}$$

формулу (18) для малых $\delta_n \to 0$ можно приблизить формулой

$$\delta_{n+1} = \delta_n\left(1 - \frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + \frac{4199z^{11}}{524288} + o\left(z^{11}\right)\right)\right). \quad (18a)$$

В (18*a*) сумма δ_{n+1} монотонно убывает с каждым новым слагаемым. Формулу (18*a*) перепишем в эквивалентном виде:

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 1 - \frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + \frac{4199z^{11}}{524288} + o\left(z^{11}\right)\right)\Bigg) \quad (18b)$$

Обозначим

$$Y_1 = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + o\left(z^{10}\right)\right),$$

$$Y_2 = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + \frac{4199z^{11}}{524288} + o\left(z^{11}\right)\right).$$

Из формулы (18*b*) видно, что при некотором максимальном числе членов ряда (численно установлено: оно равно десяти) знаки δ_{n+1}, δ_n еще совпадают $Y_1 > 0$, а при числе членов ряда равном одиннадцати знаки δ_{n+1}, δ_n противоположны $Y_2 < 0$.

Действительно, программа дает значения Y_1, Y_2 для функции $f(x)=(x-2)^m$

$Y_1 = 0.33428534\ 9277$, $Y_2 = -5.5254551\ 174\text{E-}002$,
$q = 0.85815432\ 2291434 < 1, \mathrm{m} = 30$

$Y_1 = 0.11311156\ 1929290$, $Y_2 = -0.3779228\ 24952878$,
$q = 0.23035364\ 7221112 < 1,\ m = 20$

$Y_1 = 2.37936767\ 3\text{E-}002$, $Y_2 = -7.1020265\ 95\text{E-}002$,
$q = 0.25095124\ 2652344 < 1,\ m = 3$.

Значения Y_1, Y_2 зависят от кратности корня *m*. Из формулы (18*b*) видно, что всегда найдется конечное число членов ряда, для которого $Y_1 > 0, Y_2 < 0$, так как каждое новое слагаемое ряда уменьшает его сумму. Рассмотрим ряд с конечным числом слагаемых и с параметром q:

$$Y = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + \frac{4199z^{11}}{524288} \cdot q\right). \quad (19)$$

С учетом формул (18*b*), (19) получим формулу (20):

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144} + \frac{4199z^{11}}{524288} \cdot q\right). \quad (20)$$

Теорема 1. Существует единственное значение параметра q в формуле (19), для которого $Y(q) = 0$, что равносильно в формуле (20) $\delta_{n+1} = O\left(\delta_n{}^p\right), p \ge 2$.

Доказательство. По известной теореме из математического анализа непрерывная на отрезке функция, в нашем случае линейная по переменной q (19), принимающая противоположные знаки на концах отрезка имеет не менее одного корня на отрезке. В силу линейности функции (19) такой корень единственный.

Введем обозначения

$$\hat{A} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{5z^4}{128} + \frac{7z^5}{256} + \frac{21z^6}{1024} + \frac{33z^7}{2048} + \frac{429z^8}{32768} + \frac{715z^9}{65536} + \frac{2431z^{10}}{262144}, \hat{B} = \frac{4199z^{11}}{524288},\ z = \frac{2(m-1)}{m}.$$

Перепишем формулу (19) в виде

$$Y = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\hat{A} + \hat{B}\cdot q\right),$$

$$Y = (1-q)\left(1 - \frac{\hat{A}}{m-1}\right) + q\left(1 - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{m-1}\right) = (1-q)Y_1 + qY_2 > 0 \cdot$$

Из последней формулы видно, что числовой вектор Y(q) пробегает весь отрезок [Y_1 Y_2] пока параметр q пробегает единичный отрезок [0,1], как показано в главе ″Выпуклый анализ″ авторами [3], $Y(0)=Y_1$, $Y(1)=Y_2$.

Вычислим параметр q из условия Y(q)=0:

$$Y_1 = 1 - \frac{\hat{A}}{m-1}, Y_2 = 1 - \frac{\hat{A}+\hat{B}q}{m-1}, Y_1 > 0, Y_2 < 0,$$

$$Y = 1 - \frac{1}{(m-1)}\left(\hat{A} + \hat{B}\cdot q\right) = 0,$$

$$Y_1 - \frac{\hat{B}q}{m-1} = 0 \Leftrightarrow q = \frac{Y_1(m-1)}{\hat{B}}, \quad (21)$$

$$(1-q)Y_1 + qY_2 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{Y_1}{Y_1 - Y_2} = \frac{Y_1}{Y_1 + |Y_2|} < 1 \quad (21a)$$

То есть, $Y\left(q\right) = 0$. Из формулы (20) имеем

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = Y(q) = 0 \Leftrightarrow \delta_{n+1} = O\left(\delta_n{}^p\right), p \ge 2.$$

Теорема 1 доказана.

Итак, мы имеем итерационную формулу (22):

$$x^{n+1}=x^n-\frac{f_n^{'}}{f_n^{''}}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{5z^4}{128}+\frac{7z^5}{256}+\frac{21z^6}{1024}+\frac{33z^7}{2048}+\right.$$

$$\left.+\frac{429z^8}{32768}+\frac{715z^9}{65536}+\frac{2431z^{10}}{262144}+\frac{4199z^{11}}{524288}\cdot q\right). \quad (22)$$

$z=2f_n f_n^{''}/\left(f_n^{'}\right)^2$, где параметр q определяется формулой (21) с переменной $z=2(m-1)/m$, m – кратность корня. Кратность корня легко определяется формулой

$$m=\frac{1}{1-f_n^{''}f_n/\left(f_n^{'}\right)^2}.$$

Программа для примера 2 дает значение m= 30.

Приведем также модифицированную формулу Ньютона, полученную школой профессора Н.С. Бахвалова [1]:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)f^{'}(x_n)}{f^{'}(x_n)f^{'}(x_n)-f(x_n)f^{''}(x_n)},\ n=0,1,2,\ldots\ . \quad (23)$$

Замечание 2. Вычислительный эксперимент показывает при кратности корня m=1, что все слагаемые в формуле (18) важны. Например, если число слагаемых в (18) равно 3, то итерационная формула (18) для функции

$$f(x)=\sin x-x^2/2=0,$$

$$x_1=0, x_2=1.40441482\,409243,\ m_1=m_2=1$$

с начальной точкой итерации $x^0=5$ теряет ближний корень $x_2=1.40441482\,409243$ и находит второй корень. Если число слагаемых равно 4, то формула Ньютона (2), модифицированная формула Ньютона (23) и формула парабол (18) дают ближайший корень с двойной точностью за 7 итераций:

$x_{(18)}$= 1.40441482409243 $f_{(18)}$= 1.675092356490104E-017 (формула (18))

$x_{(23)}$= 1.40441482409243 $f_{(23)}$= 1.675092356490104E-017 (формула (23))

$x_{(2)}$= 1.40441482409243 $f_{(2)}$= 1.675092356490104E-017 (формула (2)).

Пример 1. Если в формуле (18) число слагаемых равно 10, 11, то вычисления дают следующий результат после 5 итераций:

$x_{(18)}$= 1.40441482409243 $f_{(18)}$= 1.675092356490104E-017 (формула (18))

$x_{(23)}$= 1.40441480897897 $f_{(23)}$= 1.872255664679733E-008 (формула (23))

$x_{(2)}$= 1.40441498008568 $f_{(2)}$= -1.932444457081986E-007 (формула (2)).

Для поиска второго корня выберем точку $x^0=-5$ для 11 слагаемых в (18) после четырех итераций получим двойную точность корня только по формуле (18):

$x_{(18)}$= -6.775433974041149E-021 $f_{(18)}$= -6.775433974041149E-021 (формула (18))

$x_{(23)}$= 7.668850082129399E-013 $f_{(23)}$= = 7.668850082126459E-013 (формула (23))

$x_{(2)}$= -1.369473868555432E-009 $f_{(2)}$= -1.369473869493161E-009 (формула (2)).

Таким образом, точность формулы (18), по сравнению с формулами (2), (23), в случае однократного корня достигается не только в малой окрестности, но и вдали от корня, а алгоритм (18) имеет меньшее число итераций, чем остальные формулы.

В работе [1] в одном из примеров приведено только два слагаемых формулы (18), и показан третий порядок ее скорости, очевидно, в меньшей окрестности корня, чем (18) (однако не указано, как формула была получена).

Для сравнения алгоритмов рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 2. Решить уравнение $f(x)=(x-2)^{30}=0, x=2, m=30,\ x^0=7$.

В примере 2 единственный корень x=2 имеет кратность m=30.

Достаточно одной итерации для достижения двойной точности в формулах (22) и (23) в случае кратного корня:

$x_{(22)}$= 2.00000000000000 $f_{(22)}$= 0.000000000000000E+000

$x_{(2)}$= 6.83333333333333 $f_{(2)}$= 3.368235318563970E+020

$x_{(23)}$= 2.00000000000003 $f_{(23)}$= 0.000000000000000E+000.

Пример 3. Решить уравнение $f(x)=(x-2)^{20}=0, x=2, m=20,\ x^0=7$.

В примере 3 единственный корень x=2 имеет кратность m=20.

Достаточно одной итерации для достижения двойной точности в формулах (22) и (23) в случае кратного корня:

$x_{(22)}$= 2.00000000000000 $f_{(22)}$= 9.332636185032189E-302
$x_{(2)}$= 6.75000000000000 $f_{(2)}$= 34187881699423.1
$x_{(23)}$= 2.00000000000000 $f_{(23)}$= 9.785978320356312E-296.

Пример 4. Решить уравнение $f(x)=(x-2)^3=0, x=2, m=3, x^0=7$.

В примере 4 единственный корень x=2 имеет кратность *m*=3.

Достаточно одной итерации для достижения двойной точности в формулах (22) и (23) в случае кратного корня:

$x_{(22)}$= 2.00000000000000 $f_{(22)}$= 0.000000000000000E+000

$X_{(2)}$= 5.33333333333333 $f_{(2)}$= 37.0370370370370

$X_{(23)}$= 2.00000000000000 $f_{(23)}$= 0.000000000000000E+000.

В формулах (18), (22) как и в формуле (23), используются дважды дифференцируемые функции. То есть, в программе кроме функции задаются ее первая и вторая производные.

Ниже написана программа, в которой все переменные и функции имеют двойную точность REAL (8). Алгоритмом программы в формуле (22) сначала вычисляется ряд $1-A=1-\sqrt{1-z},\ z=2f_n f_n''/(f_n')^2$, во вторую очередь итерации

$$x^{n+1}=x^n-B(1-A)=x^n-\left(f_n'/f_n''\right)\left(1-\sqrt{1-z}\right).$$

Таблица. *Последовательность итераций корня в примере 1 с начальной итерацией x^0=7 для модифицированной формулы Ньютона (23) и по формуле касательных парабол (18). Второй и четвертый столбцы – значение функции в точке x^n.*

$x^n_{(23)}$	$f\left(x^n_{(23)}\right)$	$x^n_{(18)}$	$f\left(x^n_{(18)}\right)$
2.0735875 6511538	-1.2736 4 17410333	2.1099472 3230622	-1.36779 37393976
1.2875550 0496885	0.1312556 8837352	1.4210163 8720559	-2.083984 694E-002
1.3914537 7776958	1.5889375 48E-002	1.4044147 2995105	1.1662232 4069E-007
1.4042775 3291033	1.7005758 54E-004	1.4044148 2409243	5.2022188 640E-015
1.4044148 0897897	1.8722556 64E-008	1.4044148 2409243	1.6750923 56E-017

Из таблицы видно, что после пяти итераций для поиска корня кратности *m*=1 формула касательных парабол (18) имеет двойную точность (16 значащих цифр), а модифицированная формула (23) дает только семь (достигается только первая точность) верных знаков при одной и той же начальной точке итерации x^0=7.

В программе на FORTRAN все функции и переменные заданы с двойной точностью, в программе записано условие примера 2:

```
program nuton
use dfimsl
integer(8),parameter::n=10,m1=30,m=11;
integer(8)::i,j;
real(8)::x,x0,xx,x10,x20,s,s1,s2,s0,s10,f,f1,f2,q,B,p,Y1,Y2;
f(x)=(x-2D0)**30D0;f1(x)=30D0*(x-2D0)**29D0;f2(x)=870D0*(x-2D0)**28D0
x=7d0;x0=x;xx=x;x10=x;x20=x;s=0d0;s1=1d0;s2=5d-1;s0=0d0;s10=1d0
xxx1=-2d0*dfloat(m1-1)/dfloat(m1);
do j=1,m;s10=s10*xxx1*(s2-dfloat(j)+1d0)/dfloat(j);
s0=s0+s10;if(j==m)then;B=s10;else;endif;end do
Y2=1d0+s0/dfloat(m1-1);Y1=Y2-B/dfloat(m1-1);
p=Y1/(Y1-Y2);print*,"Y1=",Y1,"Y2=",Y2,"p=",p
do i=1,n,1;xxx=-2d0*f(x)*f2(x)/(f1(x)*f1(x));
s1=1d0;s=0d0;do j=1,m;if(j==m)then
q=p;elseif(j<=m-1)then;q=1d0;end if;
s1=s1*xxx*(s2-dfloat(j)+1d0)/dfloat(j);s=s+s1*q;
end do;x=x+s*(f1(x)/f2(x));x10=x10-f(x10)/f1(x10);
x20=x20-f(x20)*f1(x20)/(f1(x20)*f1(x20)-f2(x20)*f(x20))
print*,"i=",i;print*,"x=",x,"f=",f(x);
print*,"xn=",x10,"fn=",f(x10);print*,"x20=",x20,"fx20=",f(x20);
if(dsqrt(f(x)*f(x))<1d-16)then;print*,"i=",i;print*,"x=",x,"f=",f(x);
print*,"xn=",x10,"fn=",f(x10);print*,"x20=",x20,"fx20=",f(x20);
pause;endif;enddo;end program nuton
```

Основные результаты в данной работе:

1) Получена модифицированная формула Ньютона – касательных парабол (11).
2) В Лемме 1 доказано, что формула (11) корректна только для случаев кратности корня *m*=1, *m*=2. При этом порядок скорости сходимости навязки к нулю в формуле (11) выше первого.

3) В лемме 2 доказан третий порядок скорости невязки в формуле (11) для корня кратности *m*=1.
4) В лемме 3 доказан второй порядок скорости невязки в формуле (11) для корня кратности *m*=2.
5) Формула (11) обобщена до формулы (18) на числовой прямой (-∞,+∞) для переменной z и корректна для кратности корня *m*=1.
6) Получена формула (22) для кратности корня два и выше с параметром 0<q<1, который определяется формулой (21).
7) На примерах показано, что при кратности корня *m*=1 алгоритм (22) эффективнее алгоритмов (2), (23). Для кратности корня *m*=3, 20, 30 и простой функции достаточно одной итерации для достижения двойной точности корня по алгоритму (21), (22).

Новые алгоритмы (18), (21), (22) позволят численно решать нелинейные уравнения и системы за меньшее число итераций, чем формула касательных (2). В задачах на собственные значения (случай действительных корней) при анализе обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем [6], [7], [8], [9] формулы (18), (21), (22) наряду с алгоритмами (2), (23) могут быть полезными.

Список источников

1. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ,2010. 240 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
3. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи. М.: Физматлит, 2008. 256 с. ISBN 978-5-9221-0992-5. EDN QEAJNP.
4. *Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б.* Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
5. *Стрелкова Н.А.* Минимизация расхода топлива в задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 79–84. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-79-84. EDN WYCKUI.
6. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56). С. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13. EDN CTROYM.
7. *Иванов В.Н.* Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно полуопределенными матрицами системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 30–46. https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-1-30-46.
8. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 38–43. DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-38-43. EDN XUOIOT.
9. *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Об устойчивости автономных разностных уравнений четвертого порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4(39). С. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-5-10. EDN ZXNXFZ.

References

1. *Bakhvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V.* Numerical methods in problems and exercises. M.: BINOM, 2010. 240 p.
2. *Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.* Numerical methods. 7th ed. M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2011. 636 p.
3. *Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M.* Collection of optimization problems: Theory. Examples. Tasks. M.: Fizmatlit, 2008. 256 p. ISBN 978-5-9221-0992-5. EDN QEAJNP.
4. *Mansimov K.B., Akhmedova Zh.B.* An analogue of the Pontryagin maximum principle in the problem of optimal control of a system of differential equations with a fractional Caputo derivative and a multipoint performance criterion. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2022. Issue 3(58). P. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
5. *Strelkova N.A.* Minimization of fuel consumption in the problem of optimal control of

rotations of a dynamically symmetric rigid body. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2020. Issue 3(50). P. 79–84. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-79-84. EDN WYCKUI.
6. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* The asymptotic stability domain theorem and its applications. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2022. Issue 1(56). P. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13. EDN CTROYM.
7. *Ivanov V.N.* An iterative method for solving systems of linear algebraic equations with positive semidefinite system matrices. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2023. Issue 1(60). P. 30–46. https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-1-30-46.
8. *Simonov P.M.* The Bol–Perron theorem and its inverse on asymptotic stability for hybrid linear systems with aftereffect. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2018. Issue 2(41). P. 38–43. DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-38-43. EDN XUOIOT.
9. *Kandakov A.A., Chudinov K.M.* On the stability of autonomous difference equations of the fourth order. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2017. Issue 4(39). P. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-5-10. EDN ZXNXFZ.

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического университета (МФТИ) (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238, AuthorID 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5-1, Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow University of Physics and Technology (9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238; AuthorID 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.