Научная статья
УДК 531.381; 534.131
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-41-49

Динамическая модель твердого тела в магнитном поле

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru, https://orcid.org / 0000-0003-2807-977X

Аннотация. Абсолютно твердое несимметричное тело-магнетик движется относительно неподвижного полюса в стационарном однородном магнитном поле постоянной напряженности. Магнитный центр тела расположен в одной из главных плоскостей его эллипсоида инерции, отнесенного к данному полюсу. Движение тела рассматривается как нелинейные колебания, происходящие вблизи его положения устойчивого равновесия в предположении, согласно которому такое равновесие существует. Проводятся аналитические преобразования системы уравнений колебания тела с ее приведением к каноническому виду и к специальной форме по А. Ляпунову. Отмечается возможность редуцирования системы. Получены условия существования резонанса в линейной подсистеме уравнений движения, представленные в виде соотношений, связывающих инерционные и магнитные параметры тела.

Ключевые слова: *абсолютно твердое тело; магнитное поле; нелинейные колебания; редуцирование; резонанс*

Для цитирования: *Макеев Н.Н.* Динамическая модель твердого тела в магнитном поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 41–49. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-41-49.

Статья поступила в редакцию 25.03.2023; одобрена после рецензирования 11.05.2023; принята к публикации 18.06.2023.

Research article

A Solid Body Dynamic Model in a Magnetic Field

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru, https: //orcid.org / 0000-0003-2807-977X

Abstract. An absolutely solid asymmetric body-magnet moves relative to a stationary pole in a stationary homo-geneous magnetic field of constant intensity. The magnetic center of the body is located in one of the main planes of its ellipsoid of inertia, assigned to this pole. The motion of a body is considered as non-linear oscillations occurring near its position of stable equilibrium under the assumption that such an equilibrium exists. Analytical transformations of the system of equations of oscillation of a body with its reduction to a canonical form and to a special form according to A. Lyapunov are carried out. The possibility of reducing the system is noted. The conditions for the existence of resonance in the linear subsystem of the equations of motion are obtained, presented in the form of relations linking the inertial and magnetic parameters of the body.

Keywords: *absolutely solid body; magnetic field; nonlinear oscillations; reduction; resonance*

For citation: *Makeev N. N.* A Solid Body Dynamic Model in a Magnetic Field. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;2(61):41-49. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-41-49.
The article was submitted 25.03.2023; approved after reviewing 11.05.2023; accepted for publication 18.06.2023.

Введение

В механике твердого тела принята аналоговая модель, согласно которой механический объект рассматривается как осциллятор, состояние которого описывается определенным набором переменных, изменяющихся во времени, в общем случае, с рационально независимыми частотами [1, с. 236]. Такой подход позволяет построить детерминированную осцилляторную модель динамики твердого тела, движущегося относительно неподвижного центра в стационарном силовом поле постоянной интенсивности. На основе этой модели А. Пуанкаре [2] была выдвинута гипотеза, согласно которой малые колебания твердого тела, существующие в окрестности положения его устойчивого равновесия, могут характеризоваться первыми членами разложения в степенной ряд алгебраических первых интегралов системы уравнений Эйлера–Пуассона.

В настоящей работе упомянутая осцилляторная аналоговая модель применяется для исследования резонансного состояния гипотетической системы осцилляторов с квадратичной нелинейностью [3, с. 551]. На основе характеристик данного состояния установлены случаи интегрируемости динамической системы твердого тела, движущегося в стационарном однородном магнитном поле.

1. Основные предпосылки

Абсолютно твердое тело с парамагнитными свойствами неизменно связано с неподвижным полюсом O и движется в стационарном однородном магнитном поле постоянной напряженности **H**. Силовые линии этого поля прямолинейны, параллельны и их ориентация определяется направляющим ортом **s**.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: неподвижный Γ_0, неизменно связанный с ортом **s**, и базис Γ $(O x_1 x_2 x_3)$, связанный с твердым телом, оси $O x_j$ $(j = 1,2,3)$ которого направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции тела с матрицей $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$, где A_j – главные осевые моменты инерции тела в базисе Γ (собственные значения его оператора инерции). Здесь и всюду далее проекции векторов на координатные оси базиса Γ соответствуют индексам с номером оси этого базиса.

Обозначим: $\mathbf{I}\,(I_1, I_2, I_3)$ − постоянный собственный магнитный момент тела-парамагнетика; $\mu = \mathrm{const} > 1$ − коэффициент магнитной проницаемости среды; $\boldsymbol{\omega}$ (ω_1, ω_2, ω_3) − вектор абсолютной угловой скорости тела; $\mathbf{H} = H\mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$.

На тело-магнетик, находящееся во внешнем магнитном поле, действует результирующий момент сил [4, с. 259]:

$$\mathbf{L} = \mu\,(\mathbf{I} \times \mathbf{H}) = \mu H\,(\mathbf{I} \times \mathbf{s}). \tag{1}$$

Уравнения движения тела относительно полюса O под воздействием момента сил (1) имеют вид [5]

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + \mu H \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} \times \mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} = (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $M\,(x_j^M)$ − магнитный центр тела (центр параллельных сил магнитного поля). Положим $r = |OM| \neq 0$,

$$(x_1^M,\, x_2^M,\, x_3^M) = r\,(n_1,\, 0,\, n_3), \tag{3}$$

где n_1, n_3 − заданные постоянные параметры такие, что

$$n_1^2 + n_3^2 = 1, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}\,(n_1,\, 0,\, n_3), \tag{4}$$

где **n** − нормированный вектор [6].

Введем величину $\Omega = \mathrm{const} \neq 0$ с размерностью угловой скорости и приведем ее механическое истолкование. Допуская, что твердое тело, как физический маятник, колеблется относительно неподвижной оси, ортогональной орту **s**, и находится в статическом равновесии в положении:

$$(s_1^0,\, s_2^0,\, s_3^0) = (n_1,\, 0,\, n_3), \tag{5}$$

в силу уравнений системы (2) находим, что характерный параметр

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu H I_3}{A_2 n_3}} \qquad (n_3 I_3 > 0)$$

является круговой частотой собственных колебаний маятника. При этом имеет место параметрическая зависимость

$$I_1 n_3 - I_3 n_1 = 0 \quad (n_1 I_1 > 0). \tag{5*}$$

2. Предварительные положения

Приведем систему уравнений (2) к безразмерной форме, переходя к переменным

$$\mathbf{u} = \Omega^{-1}\boldsymbol{\omega}, \quad \tau = \Omega t \tag{6}$$

и к безразмерным постоянным параметрам [7]

$$a_1 = A_2^{-1}A_1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = A_2^{-1}A_3$$
$$(a_1 + a_3 \geq 1).$$

С учетом тождества (4) положим

$$\begin{gathered} n_i = mI_i \quad (i = 1, 3), \quad I_2 = 0, \\ m = (A_2\Omega^2)^{-1}\mu H, \end{gathered} \tag{7}$$

введем инерционные параметры [8]

$$[B_1, B_2, B_3] = [a_1^{-1}(1 - a_3),\, a_3 - a_1,\, a_3^{-1}(a_1 - 1)]$$

и рассмотрим общий случай, при котором все $B_j \neq 0$.

Представим систему уравнений (2) в переменных (6) при условиях (3), (7) в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{u}' = \mathbf{B}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_1(\mathbf{s}), \\ \mathbf{s}' = \mathbf{N}\mathbf{s}, \end{gathered} \tag{8}$$

где обозначено $\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ u_3]^T$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} B_1u_2u_3 \\ B_2u_3u_1 \\ B_3u_1u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} -a_1^{-1}n_3s_2 \\ n_3s_1 - n_1s_3 \\ a_3^{-1}n_1s_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{B}$, $\mathbf{N}_1$ − матрицы-столбцы; штрих сверху обозначает дифференцирование по переменной τ. В системе уравнений (8) выражение $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ отражает квадратичную нелинейность данной динамической системы [3].

Предполагается, что в положении (5) твердое тело находится в состоянии статического устойчивого (по Раусу–Ляпунову) равновесия. Это предположение принимается согласно свойству векторного потенциала однородного линейного магнитного поля, согласно которому существует по крайней мере одно положение статического равновесия, определяемое изолированной точкой фазовой траектории в пространстве $\mathbf{R}^6$.

Введем вектор $\mathbf{p} = [p_1\ p_2\ p_3]^T$ малых возмущений, определенных в малой окрестности данного состояния, и в возмущенном движении положим

$$\mathbf{s}^* = [n_1 + p_1 \quad p_2 \quad n_3 + p_3]^T \tag{9}$$

с заданными параметрами (3), (5). В движении (9) система уравнений (8) принимает вид

$$\begin{gathered} \mathbf{u}' = \mathbf{B}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_1(\mathbf{p}), \\ \mathbf{p}' = \mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{p} + \mathbf{N}_2(\mathbf{u}), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathbf{N}_2$ − вектор-столбец:

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -n_3u_2 \\ n_3u_1 - n_1u_3 \\ n_1u_2 \end{bmatrix}.$$

Дискретное спектральное множество (спектр S) собственных значений линейной части динамической системы (10) соответствует характеристическому уравнению этой части системы и имеет вид

$$S = (0, 0, -i, i, -\nu i, \nu i) \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{11}$$

Здесь $\nu \neq 0$ − характерный действительный параметр, равный

$$\nu = +(a_3^{-1}n_1^2 + a_1^{-1}n_3^2)^{1/2}, \tag{12}$$

является главной собственной круговой частотой колебаний.

Из множества (11) элементов частотного спектра S выделим подмножество S_Z ненулевых значений, расположенных на мнимой оси комплексной плоскости Z, исключая ее нулевую точку на этой оси: $S \in (\operatorname{Im} Z)$. Тогда точка покоя динамической системы тела является изолированной точкой эллиптического типа [1, с. 156], отвечающей спектральному множеству S_z. Для спектра значений (11) соответствующая резольвента представляется вырожденной матрицей [9, с. 176].

В частотном спектре S каждому нулевому собственному значению отвечает простой элементарный делитель [9, с. 146]. Нулевые собственные значения в этом спектре означают, что начальное возмущение кинетического момента данного тела сохраняется постоянным.

Фазовый портрет данной системы представляется вращениями с угловыми координатами вида $\varphi_k = \nu_k \tau$, задающими диффеоморфизм фазовой поверхности системы. Здесь τ − приведенное время согласно равенству (6), ν_k − парциальная частота номера k. Фазовые траектории данной системы расположены на невырожденном торе и удовлетворяют уравнениям $\varphi'_k = \nu_k$ [10].

3. Основная динамическая система. Постановка задачи

Движению твердого тела в конфигурационном пространстве поставим в соответствие движение системы осцилляторов с квадратичной нелинейностью $\mathbf{B}(\mathbf{u})$, находящихся на стационарных двусторонних удерживающих упругих связях, движущуюся в однородном линейном магнитном поле. Принимается, что возмущенное движение системы описывается движением фазовой точки в пространстве $\mathbf{R}^6$ − конечномерном дифференцируемом многообразии − с безразмерным фазовым вектором $\mathbf{w} = [w_1 \dots w_6]^T$, где

$$(\{w_i\};\{w_j\}) = (\{u_i\};\{p_j\}) \; (i, j = 1,2,3). \quad (13)$$

Здесь и всюду далее символ $\{\dots\}$ обозначает всю совокупность данных величин.

Движение системы осцилляторов в окрестности положения (5) в переменных w_j (13) определяется системой

$$\mathbf{w}' = \mathbf{P}\,\mathbf{w} + \mathbf{F}(\mathbf{w}) \quad (\tau \in T, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^6), \quad (14)$$

где $T = [0, +\infty)$, $\mathbf{P}$ − невырожденная матрица, заданная над коммутативным полем, описание которой приведено ниже. В системе (14) $F = [\{F_j\}]^T$ − вектор-столбец с компонентами − аналитическими функциями

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{w}) &= g_1 w_2 w_3 \quad (1, 2, 3), \\ F_4(\mathbf{w}) &= w_3 w_5 - w_2 w_6 \quad (4, 5, 6), \end{aligned} \quad (15)$$

где g_j − заданные действительные постоянные. Символы (1, … , 3), (4, … , 6) обозначают циклическую перестановку данных индексов, применяемую для представления остальных выражений по данным равенствам-представителям.

Согласно виду уравнения (14) и спектральному множеству (11) это уравнение представляет скалярную систему типа системы Ляпунова [11, с. 68], которую назовем *основной динамической системой* (ОДС).

Выражения (15) отражают квадратичную нелинейность ОДС, инвариантную относительно размерности пространства $\mathbf{R}^6$. При этом представления для $F_k \; (k = 4, 5, 6)$ являются компонентами скобок Пуассона [12, с.182] от некоторых функций $2\Phi_1^*(w_1, w_2, w_3)$ $= \|\mathbf{w}^*\|^2$, $2\Phi_2^*(w_4, w_5, w_6) = \|\mathbf{w}_*\|^2$, где величины $\mathbf{w}^*(w_p), \mathbf{w}_*(w_r)$ − соответствующие заданные векторы. Фазовое пространство с координатами $\{w_p, w_r\}$ здесь рассматривается как конечномерное дифференцируемое многообразие с обобщенными импульсами w_p и обобщенными координатами w_r .

Таким образом, ОДС (14) является детерминированной автономной многопараметрической системой с заданными инерционными a_j и позиционными n_j параметрами.

Ставится следующая задача. Найти для $\tau \in T, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^6$ формы представления уравнений ОДС: диагональную и специальную кососимметрическую форму по А. Ляпунову, а также аналитические условия возникновения резонанса в подсистеме, совпадающей с линейной частью данной системы.

4. Диагонализация основной динамической системы

Зададим вектор диагональных переменных $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_6]^T$ и диагонализируем систему (14) [6]. Представим матрицу $\mathbf{G}$, образованную соответствующими собственными векторами матрицы линейной части ОДС (14), в виде

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

с блочными матрицами

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & n_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = i\begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_3 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & -in_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & in_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_4 = \begin{bmatrix} in_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -in_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где обозначено

$$k_1 = (a_3 \nu)^{-1} n_1 , \quad k_3 = (a_1 \nu)^{-1} n_3 .$$

Матрица **G** (16) является полуиннорной [13]. В силу равенства (16) имеем матрицу

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 \end{bmatrix}$$

с блочными матрицами

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu^{-1} k_1 & 0 & \nu^{-1} k_3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2n_1 & 0 & 2n_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ in_3 & 0 & -in_1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_3 & 0 & l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i n_3 & 0 & i n_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где обозначено $l_i = \nu^{-1} n_i \ (i = 1, 3)$. Здесь матрица $\mathbf{G}^{-1}$ также является полуиннорной.

Выполняя преобразование $\mathbf{w} = \mathbf{Gz}$ [6], приведем ОДС (14) к диагональной форме:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{D} \mathbf{z} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{G} \mathbf{z}) \quad (\tau \in T, \, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^6), \tag{17}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{G}$ − диагональная матрица, образованная из соответствующих собственных значений − элементов упорядоченного множества (11). Здесь применено свойство подобия матриц **P**, **D**, согласно которому эти матрицы имеют идентичные частотные спектры [9, с. 143].

Обозначим

$$c_1 = a_1 a_3^{-1}, \quad c_3 = c_1^{-1}, \quad \rho = \sigma m_1 ,$$

$$\sigma = (a_1 a_3 \nu^2)^{-1}, \ m_1 = - B_2 n_1 n_3, \ m_2 = - \nu B_2 ,$$

$$Q_1 = B_1 c_1 n_1^2 - B_3 c_3 n_3^2 , \quad Q_2 = c_1 n_1^2 - c_3 n_3^2 ,$$

$$Q_3 = B_1 n_3^2 - B_3 n_1^2$$

и введем вспомогательные переменные

$$(Z_1, Z_2) = (z_4 - z_3 , \, z_4 + z_3),$$

$$(Z_3, Z_4) = (z_5 - z_6 , \, z_5 + z_6).$$

Система уравнений (17) для диагональных переменных, представляемая в квазипотенциальной форме, имеет вид

$$\begin{aligned} & z_1' = i Z_1 Z_2 + i \nu Z_3 Z_4 , \\ & z_2' = (\rho z_2 + i \nu^{-1} \sigma Q_1 Z_3) Z_2 , \\ & z_r' = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi_r}{\partial z_r} \quad (r = 4, 6), \ \beta = \nu^{-1} Q_2 , \end{aligned} \tag{18}$$

$$\Pi_4(\mathbf{z}) = [i z_4 - m_1 z_2^2 + (\nu - 1) \rho z_5^2 - (\nu + 1) \rho z_6^2 - $$
$$- i (m_2 + 1) z_2 z_5 + i (m_2 - 1) z_2 z_6 + 2 \rho z_5 z_6 +$$
$$+ i z_1 (z_3 + \frac{1}{2} z_4)] z_4 ,$$

$$\Pi_6(\mathbf{z}) = i \nu z_6^2 + \{ i (1 - \nu + \beta) z_2 z_3 +$$
$$+ i [\beta - (1 + \nu^{-1})] z_2 z_4 + [(1 - \nu) \rho z_3 +$$
$$+ (1 + \nu) \rho z_4 - i \nu z_1] \} (z_5 - 0.5 z_6) z_6 .$$

В системе (18) не представлены уравнения с величинами z_3', z_5', поскольку имеет место комплексное сопряжение переменных z_3, z_5 с переменными z_4, z_6, соответственно.

Введем гипотетические векторы

$$\mathbf{p}_1 = [z_3 \ z_4]^T, \quad \mathbf{p}_2 = [z_5 \ z_6]^T, \quad \mathbf{p}_3 = [z_6 \ z_5]^T$$

и обозначим символом $(\cdot)$ скалярное умножение этих векторов.

Динамическая система (18) имеет независимые первые алгебраические интегралы

$$\begin{aligned} & Z_2^2 - Z_3^2 + \sigma^{-1} z_2^2 - 2 z_1 = h^2, \\ & \nu [i m_1 Z_1 + \sigma^{-1} (1 + z_1)] z_2 + \\ & + (\nu - 1)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + (\nu + 1)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) = H , \end{aligned} \tag{19}$$

$$Z_4^2 - Z_1^2 + z_1^2 + 2 z_1 = 0,$$

где h, H − постоянные интегрирования. Соотношения (19) являются первыми интегралами: энергии, кинетического момента относительно направляющей оси орта **s** и тривиальным, соответственно.

Наличие интегрального множества (19) позволяет рассматривать движение фазовой точки системы (18) на некоторой части многообразия меньшей размерности. При этом пятимерное фазовое подпространство этой системы определено в пространстве $\mathbf{R}^6$ тривиальным интегралом (19).

5. Специальная диагональная формализация

Приведем уравнения системы (18) и ее первые интегралы (19) к виду, характерному для системы уравнений Ляпунова [14]. При этой форме уравнений матрица аддитивной линейной части преобразованной системы имеет антисимметричную квазидиагональную структуру. Это приведение достигается линейным преобразованием $\mathbf{w}=\mathbf{K}\,\mathbf{x}$, примененным Ляпуновым. Здесь $\mathbf{K}=\mathbf{G}\,\mathbf{W}$ − матрица результирующего преобразования, причем матрица $\mathbf{W}$ формируется заданным преобразованием [14].

Таким образом, преобразованная динамическая система принимает вид

$$\mathbf{x}'=\mathbf{U}\,\mathbf{x}+\mathbf{f}\,(\mathbf{x}) \quad (\tau\in T,\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^6), \qquad (20)$$

где обозначено

$$\mathbf{U}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\,\mathbf{K},\quad \mathbf{f}\,(\mathbf{x})=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{K}\,\mathbf{x}).$$

В уравнении (20) матрица $\mathbf{K}$ образуется аналогично предыдущему

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4\end{bmatrix} \qquad (21)$$

и выражается через блочные матрицы

$$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}0 & n_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & n_3 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{K}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & -k_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_3=\begin{bmatrix}n_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ n_3 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{K}_4=\begin{bmatrix}-n_3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ n_1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{K}$ (21) является так же, как и $\mathbf{G}$, полуиннорной. Согласно представлению (21) находим

$$\mathbf{K}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2\\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_4\end{bmatrix},$$

где блочные матрицы

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & 0 & k_3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{L}_2=\begin{bmatrix}n_1 & 0 & n_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3=\nu^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -n_3 & 0 & n_1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}_4=\begin{bmatrix}-n_3 & 0 & n_1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Система скалярных уравнений (20) в компонентах $\mathbf{x}=[x_1\ \ldots\ x_6]^T$ в силу подобия матриц $\mathbf{P}$, $\mathbf{U}$ представляется в следующей квазипотенциальной форме:

$$x'_j=\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\quad (j=1,\ldots,6), \qquad (22)$$

где обозначено

$$U_1(\mathbf{x})=(-\,x_3x_4+\nu\,x_5x_6)\,x_1,$$
$$U_2(\mathbf{x})=(0.5\,\rho\,x_2+\nu^{-1}\sigma\,Q_1x_6)\,x_2x_3,$$
$$U_3(\mathbf{x})=(-\,m_1x_2^2+\rho x_6^2-m_2x_2x_6-x_4)\,x_3,$$
$$U_4(\mathbf{x})=-[(x_1-1)\,x_3+(x_2+\nu\,\rho x_6)\,x_5]\,x_4,$$
$$U_5(\mathbf{x})=[x_2x_4-\nu\,(x_1-\rho x_4+1)\,x_6]\,x_5,$$
$$U_6(\mathbf{x})=[\nu\,x_5-(0.5\rho x_6+\nu^{-1}Q_3x_2)\,x_3]\,x_6$$

и имеет независимые первые алгебраические интегралы

$$\begin{aligned}&V_1\equiv\sigma^{-1}x_2^2+x_3^2+x_6^2-2x_1=h_1^2,\\ &V_2\equiv\sigma^{-1}(1+x_1)\,x_2+(\nu^{-1}x_6-m_1x_2)\,x_4+\\ &\quad+x_3x_5=h_2,\\ &V_3\equiv x_1^2+x_4^2+x_5^2-2x_1=0,\end{aligned} \qquad (23)$$

где $h_1,\,h_2$ − постоянные интегрирования.

Фазовая точка, соответствующая системе уравнений (22), для значений $\tau\in T$ находится внутри эллипсоидальной области фазового пространства, определяемой первым интегралом энергии.

В силу линейной связки интегралов V_1, V_3 системы (23) по Лагранжу имеем определенно положительную квадратичную форму

$$V=\sum_{j=1}^{6}\lambda_j\,x_j^2,$$

где $\{\lambda_j\}=(1,\sigma^{-1},1,\ldots,1)$. Это свойство позволяет установить области притяжения [15] системы (22) в пространстве переменных $\{x_j\}$.

6. Редуцирование динамической системы

Опишем схематически алгоритм преобразования системы уравнений (22), приводящий с заданной точностью эту систему к понижению порядка и уменьшению числа ее независимых переменных, на основе системы первых интегралов (23).

Полагая, что величины возмущений x_4, x_5, x_6 малы по модулю и имеют одинаковый порядок малости, из первых интегралов V_2, V_3 с указанной точностью имеем

$$2x_1 = X_1^2 - X_4^2 + \mathrm{O}(x_j^4),$$
$$x_2 = \sigma[h_2(1 - i\rho X_1) + \nu^{-1}(1-\nu)\cdot \qquad (24)$$
$$\cdot(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - \nu^{-1}(1+\nu)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3)] + \mathrm{O}(x_j^3),$$

где обозначено

$$(X_1, X_4) = (x_4 - x_3, x_5 + x_6),$$
$$\mathbf{q}_1 = [x_3\ x_4]^T, \mathbf{q}_2 = [x_5\ x_6]^T, \mathbf{q}_3 = [x_6\ x_5]^T.$$

В системе равенств (24) второе соотношение имеет место в силу наличия первого из них. Внося выражения (24) в равенства (23), с точностью до $\mathrm{O}(x_j^4)$ получаем систему уравнений относительно x_4', x_6' и комплексно сопряженных им величин. Эта система здесь не представлена ввиду значительной громоздкости результирующих выражений.

Таким образом, в результате редуцирования порядок исходной динамической системы может быть понижен до четвертого.

7. Резонансы в основной динамической системе

Следуя динамической осцилляторной аналогии [1, с. 236], поставим в соответствие состояние динамической системы (10) состоянию гипотетической системы трех взаимосвязанных осцилляторов с квадратичной нелинейностью [3, с. 554]. Эта система осцилляторов, отнесенная к пространству $\mathbf{R}^6$ переменных ($\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$) (*аналоговая система сравнения*), в силу гипотетически предполагаемой слабой нелинейности порождает комбинационные частоты, учитываемые в виде линейных комбинаций нормальных частот данной линейной подсистемы (10). Близость величин этих частот к нормальным частотам выделенной подсистемы и обусловливает возникновение резонанса в динамической системе.

Получим ограничения, налагаемые на структурно-динамические параметры тела, связанные с возникновением резонанса. Равенство (12) задает отношение частот линейной подсистемы (10), идентифицированной с указанной системой осцилляторов. Здесь характерный параметр ν является действительным числом − дробью, содержащей простые числа и единицу.

Из равенства (12) следует:

$$b_1^{-2} n_1^2 + b_3^{-2} n_3^2 = 1, \qquad (25)$$

где $b_r = \nu\sqrt{a_{4-r}}$ (r = 1, 3), $0 < \nu < +\infty$.

Уравнение (25) определяет в пространстве $\mathbf{R}^3$ координат (n_1, n_2, n_3) эллиптический цилиндр с осью, совпадающей с координатной осью Ox_2 ортобазиса Γ.

Согласно равенствам (7), (25) имеем

$$A_1(A_2 - \nu^2 A_3) I_1^2 - A_3(\nu^2 A_1 - A_2) I_3^2 = 0, \quad (26)$$

откуда при $\nu = 1$ (резонанс вида 1:1) следует условие:

$$A_1(A_2 - A_3) I_1^2 - A_3(A_1 - A_2) I_3^2 = 0, \ (27)$$

к которому следует присоединить ограничение $I_2 = 0$ (7). Резонанс вида 1:1 является вырождением более общего триадного резонанса [3] в системе осцилляторов.

Соотношение (27) представляет "магнитный" аналог классического случая *Гесса–Аппельрота,* существующего при движении твердого тела в однородном параллельном поле силы тяжести [16, с. 152]. Здесь параметры I_1, I_3, согласно равенству (5*), связаны с соответствующими координатами магнитного центра *M* тела.

Вводя гипотетическую прямую, проходящую через магнитный центр *M* тела и его неподвижный полюс *O*, находим, что эта прямая направлена ортогонально плоскости кругового сечения эллипсоида инерции тела. При этом вектор его начального кинетического момента расположен в данной инерционной плоскости.

Как и в известном классическом случае для поля силы тяжести условие (27) содержит частные аналоги: $A_1 = A_2 \neq A_3$, $I_1 = 0$, $I_3 \neq 0$ (аналог случая *Лагранжа–Пуассона*), а также $A_1 = A_2 = A_3$ (аналог случая *центральной кинетической симметрии*). В последнем случае прямая, проходящая через центр *M* тела и полюс *O*, движется подобно сферическому маятнику.

При ν = 2 (резонанс вида 2:1) ограничение (26) имеет вид

$$A_1(A_2 - 4A_3) I_1^2 - A_3(4A_1 - A_2) I_3^2 = 0,$$

откуда при условиях

$$4A_1 \neq A_2,\ I_1 \neq 0,\ I_3 = 0 \tag{28}$$

следует

$$A_2 = 4A_3. \tag{29}$$

Присоединяя к условиям (28), (29) ограничение, выражающее осесимметричность

$$A_1 = A_2, \tag{30}$$

получим структурно-кинетические условия, характеризующие для однородного магнитного поля аналог классического случая *Горячева–Колосова* [16], существующего при движении тела в однородном поле силы тяжести.

Согласно ограничениям (28)−(30) магнитный центр тела в этом случае расположен в экваториальной плоскости его эллипсоида инерции, отнесенного к центру *O*.

Заключение

Идея применения методологии теории нелинейных колебаний к исследованию движения твердого тела вокруг неподвижного полюса в однородном постоянном силовом поле была реализована В.М. Старжинским в работе [17]. Им была рассмотрена задача о движении относительно неподвижного центра твердого тела в однородном поле силы тяжести в случае, при котором его центр тяжести расположен в главной плоскости эллипсоида инерции. В его работе даны случаи возникновения резонансов и приведены известные ранее в механике твердого тела резонансные соотношения, определяющие классические случаи Лагранжа и Горячева при движении тела в однородном постоянном поле силы тяжести.

В настоящей работе приводятся канонические формы уравнений движения твердого тела-парамагнетика, полученные путем аналитических преобразований с применением модельной осцилляторной аналогии. Показано, что структура уравнений движения тела в стационарном однородном постоянном магнитном поле идентична структуре уравнений движения тела в соответствующем однородном поле силы тяжести.

Эта идентичность относится к полученным формам уравнений движения и новым резонансным соотношениям для магнитного поля, соответствующим известным аналогам классических случаев движения тела в поле силы тяжести.

Представленные уравнения могут применяться при исследованиях в областях механики твердого тела: в задачах устойчивости, стабилизации и управления движением механических объектов, находящихся в стационарном однородном магнитном поле.

Список источников

1. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды: в 3 т. М.: Наука. 1971. Т. 1. 772 с.
3. *Додд Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
5. *Макеев Н.Н.* Устойчивость стационарных движений гиростата-магнетика в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Пермский ун-т. 2022. Вып. 54. С. 65−74.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
7. *Макеев Н.Н.* Резонансы и интегрируемость гиростатических систем // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Пермский ун-т. 2007. Вып. 39. С. 85−109.
8. *Макеев Н.Н.* Интегрируемость уравнений задачи Граммеля для гиростата // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Пермский ун-т. 2008. Вып. 40. С. 98−116.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
10. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240.
11. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.
12. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
13. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 300 с.
14. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

15. *Руш Н.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
16. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
17. *Старжинский В.М.* К теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. 108 с.

References

1. *Dzhakalya G.E.O.* Metody teorii vozmushcheniy dlya nelineynykh system. M.: Nauka, 1979. 320 s.
2. *Puankare A.* Novye metody nebesnoy mekhaniki. Izbr. tr.: v 3 t. M.: Nauka. T. 1, 1971. 772 s.
3. *Dodd R.* Solitony i nelineynye volnovye uravneniya . M.: Mir, 1988. 694 s.
4. *Tamm I.E.* Osnovy teorii elektrichestva. M.: Nauka, 1966. 624 s.
5. *Makeev N.N.* Ustoychivost statsionarnogo dvizheniya girostata-magnetika v magnitnom pole // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. / Perm: un-t. 2022. Vyp. 54. S. 65−74.
6. *Bellman R.* Vvedenie v teoriyu matrits. M.: Nauka, 1969. 368 s.
7. *Makeev N.N.* Resonansy i integriruemost girostaticheskikh system // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. / Perm: un-t. 2007. Vyp. 39. S. 85−109.
8. *Makeev N.N.* Integriruemost uravneniy zadachi Grammelya dlya girostata // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. / Perm: un-t. 2008. Vyp. 40. S. 98−116.
9. *Lankaster P.* Teoriya matrits. M.: Nauka, 1978. 280 s.
10. *Arnold V.I.* Obyknovennye differentsialnye uravneniya. M.: Nauka, 1971. 240 s.
11. *Moiseev N.N.* Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki. M.: Nauka, 1969. 380 s.
12. *Arnold V.I.* Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki. M.: Nauka, 1974. 432 s.
13. *Dzhuri E.* Innory i ustoychivost dinamicheskikh system. M.: Nauka, 1979. 300 s.
14. *Lyapunov A.M.* Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya. M.; L.: Gostekhizdat, 1950. 432 s.
15. *Rush N.* Pryamoy metod Lyapunova v teorii ustoychivosti. M.: Mir, 1980. 300 s.
16. *Magnus K.* Giroskop. Teoriya i primenenie. M.: Mir, 1974. 528 s.
17. *Starzhinskiy V.M.* K teorii nelineynykh kolebaniy. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1970. 108 c.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID 374535, WoS: AAW-4380-2020.

Information about the author:

N. N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID 374535, WoS: AAW-4380-2020.