«Механика»

Научная статья
УДК 530.12:531.551
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-34-40

Космологическая модель с квантовым туннелированием

Елена Владимировна Кувшинова[1], Ольга Васильевна Сандакова[2]
[1,2]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
[1]kuvlenka@narod.ru, https://orcid.org/0000-0003-3432-8234
[2] o_sandakova@list.ru, https://orcid.org/0000-0003-1768-7286

Аннотация. В рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа II по Бьянки. Источником гравитации нашей модели является сопутствующая анизотропная жидкость. Выведено уравнение Уилера–ДеВитта. Рассматривается возможность минисуперпространственного квантования нашей модели. Найдена туннелирующая волновая функция и коэффициент туннелирования.

Ключевые слова: *квантовое туннелирование; рождение Вселенной; космологическая модель; волновая функция; коэффициент туннелирования*

Для цитирования: *Кувшинова Е. В., Сандакова О. В.* Космологическая модель с квантовым туннелированием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 34–40. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-34-40.

Статья поступила в редакцию 20.02.2023; одобрена после рецензирования 14.05.2023; принята к публикации 17.06.2023.

«Mechanics»

Research article

The Cosmological Model With Quantum Tunneling

Elena V. Kuvshinova[1], Olga V. Sandakova[2]
[1,2]Perm State University, Perm, Russia
[1]kuvlenka@narod.ru, https://orcid.org/0000-0003-3432-8234
[2] o_sandakova@list.ru, https://orcid.org/0000-0003-1768-7286

Abstract. The cosmological model with expansion and rotation with Bianchi type II metric is constructed within the framework of general relativity. The source of gravity of the model is an accompanying anisotropic fluid. The Wheeler–DeWitt equation is derived. The possibility of minisuperdimensional quantization of the model is considered. The tunneling wave function and the tunneling coefficient are found.

Keywords: *quantum tunneling; the birth of the universe; cosmological model; wave function; tunneling coefficient*

For citation: *Kuvshinova E. V., Sandakova O. V.* Cosmological Model With Quantum Tunneling. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;2(61):34-40. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-34-40.

The article was submitted 20.02.2023; approved after reviewing 14.05.2023; accepted for publication 17.06.2023.

Введение

Квантовая космология – это одна из интересных и достаточно сложных сфер теоретической физики, так как задачи, которые рассматриваются в этой области физического знания, не укладываются в рамки предшествующих разделов физики. В своей работе [1] А.Д. Линде заметил, что: "результаты соответствующих исследований зачастую выглядят парадоксально, и требуется большая степень непредубежденности для того, чтобы не отмахнуться от них с самого начала".

Уиллер и ДеВитт являются идейными начинателями данного раздела физики. В конце 60-х гг. XX века было составлено уравнение Уилера–ДеВитта для волновой функции Вселенной $\Psi(h_{ij},\phi)$, где h_{ij} – трехмерная пространственная метрика, φ – поля материи. Данное уравнение является частным случаем уравнения Шредингера для волновой функции в стационарном случае $\partial\Psi/\partial t=0$.

Для случая мини-супер-пространственного квантования, которое является упрощенным подходом, для однородной Вселенной Фридмана были получены наиболее интересные решения данного уравнения, где вместо величин h_{ij} брали масштабный фактор Вселенной *a* [2].

В различных работах [2–5] исследуется квантовое рождение плоских, открытых и закрытых моделей Вселенной в таком разделе физического знания как квантовая космология. В работе [6] для подхода квантовой космологии авторы рассматривают космологическую модель, решение которой в классическом варианте было ранее найдено Вайдья и Пателем, где источниками гравитации являются электромагнитное поле, чистое излучение и вращающееся жидкость. Авторы работы [6] сделали вывод, что вероятность больших значений глобального вращения невелика. В работе [7] рассматриваются вращающиеся космологические модели типа Гёделя и их квантовая эволюция со спинорным и скалярным полями. В рамках данной модели возникает возможность найти вероятность осуществления именно вращающейся модели с отсутствующей начальной сингулярностью. В работе [8] исследуется квантовое рождение Вселенной с возможным медленным вращением.

Авторы данной работы убедились, что вращение в различных случаях может как уменьшить, так и увеличить коэффициент туннелирования Вселенной. В статье [9] в рамках квантовой геометродинамики рассматривалось квантовое рождение горячей Вселенной для минисуперпространства. Также в работах [10–13] строились различные модели квантового рождения Вселенной с разными видами вращения.

Далее в данной работе мы будем исследовать квантовое рождение для модели типа II по Бьянки. Вычислим коэффициенттуннелирования и определим туннелирующую волновую функцию.

1. Построение модели типа Бьянки II

В теории гравитации Эйнштейна построена нестационарная космологическая модель для метрики типа II по Бьянки. Источникам гравитации нашей модели являются сопутствующая анизотропная жидкость.

Метрика типа II по Бьянки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - 2R(t)\sqrt{b}e^{(1)}dt - \\ &-R^2(t)\left(A\left(e^{(1)}\right)^2+\left(e^{(2)}\right)^2+\left(e^{(3)}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A,\ b-const,\ A>0,\ b>0,$

$$e^{(1)}=dx-zdy,\ e^{(2)}=dy, e^{(3)}=dz.$$

Будем искать решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=T_{\mu\nu} \tag{2}$$

для метрики (1), предполагая, что источником гравитационного поля данной космологической модели являются анизотропная жидкость. Эйнштейновская гравитационная постоянная равна 1.

Принято $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Представим нашу метрику в тетрадной форме. Используется лоренцевая тетрада с ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} &e_0^{(0)}=1,\ e_1^{(0)}=-R\sqrt{b},\quad e_2^{(0)}=R\sqrt{b}z,\\ &e_1^{(1)}=R\sqrt{A+b},\\ &e_2^{(2)}=R,\quad e_3^{(3)}=R. \end{aligned} \tag{3}$$

Источником гравитационного поля данной модели является сопутствующая анизотропная жидкость с записанным в тетрадной форме тензором энергии импульса

$$T_{ab}=(\varepsilon+\pi)u_a u_b+(\sigma-\pi)\chi_a\chi_b-\pi\eta_{ab}, \tag{4}$$

где

$$u_a u^a=1,\ \ \chi_a\chi^a=-1,\ \ \chi^a u_a=0,\ \ \varepsilon>0,\ \ \sigma>\pi.$$

Предполагаем, что $u^a=\delta_0^a$, $\chi^a=\delta_1^a$.

Тетрадные уравнения Эйнштейна запишем в следующем виде:

$$\frac{-(8\ddot{R}Rb-12\dot{R}^2A-8\dot{R}^2b+A^2-Ab-2b^2)}{4R^2(A+b)}=\varepsilon, \quad (5)$$

$$\frac{-\sqrt{b}(4\ddot{R}R-4\dot{R}^2-A-b)}{2R^2\sqrt{(A+b)}}=0, \quad (6)$$

$$\frac{-(8\ddot{R}RA+8\ddot{R}Rb+4\dot{R}^2A-8\dot{R}^2b-3A^2-5Ab-2b^2)}{4R^2(A+b)}=\sigma, \quad (7)$$

$$\frac{-A(8\ddot{R}R+4\dot{R}^2+A+b)}{4R^2(A+b)}=\pi. \quad (8)$$

Из уравнения (6) находим:

$$R=\frac{\sqrt{A+b}}{2H}ch(Ht),\ H>0. \quad (9)$$

Из уравнений (5), (7), (8) с учетом (9) получаем:

плотность энергии анизотропной жидкости:

$$\varepsilon=\frac{3A}{A+b}\frac{\dot{R}^2}{R^2}-\frac{A}{4R^2}, \quad (10)$$

давление анизотропной жидкости:

$$\pi=-\frac{3A}{A+b}\frac{\dot{R}^2}{R^2}-\frac{3A}{4R^2}, \quad (11)$$

давление анизотропной жидкости:

$$\sigma=-\frac{3A}{A+b}\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{A}{4R^2},. \quad (12)$$

Для нашего решения $\sigma+\varepsilon=0$ $(\sigma=-\varepsilon)$, но $\sigma-\pi=\frac{A}{R^2}$. При $A>0$ будет $\sigma>\pi$. Так что наша жидкость не является вакуумоподобной.

Кинематические параметры имеют следующий вид: расширение $\theta=\frac{3\dot{R}}{R}$, вращение $\omega=\frac{\sqrt{b}}{2R}$, ускорение $a=\frac{\sqrt{b}\dot{R}}{\sqrt{A+BR}}$. Сдвиг отсутствует.

Отметим, что наше решение будут причинным.

Исключим из выражений (10) и (11) t, учитывая, что $R=\frac{\sqrt{A+b}}{2H}ch(Ht),\ H>0.$

Тогда будем иметь

$$\varepsilon=\frac{3AH^2}{A+b}-\frac{A}{R^2},\ \pi=-\frac{3AH^2}{A+b}-\frac{3A}{4R^2}. \quad (13)$$

Вселенная заполнена вращающейся анизотропной жидкостью.

Мы будем исследовать квантовое рождение вселенной R=0, найдем волновую функцию вселенной, вычислим коэффициент туннелирования Вселенной. На этапе квантования анизотропная жидкость предполагается классической.

2. Получение уравнения Уилера–ДеВитта

Пространство-время с метрикой (1) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [14–16]. Опишем процедуру. Для этого метрику (1) можно представить в виде

$$ds^2=-N^2dt^2+g_{ab}(dx^a+N^adt)(dx^b+N^bdt), \quad (14)$$

а нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t=const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a – реперный индекс, α – координатный индекс); $e_a^0=0,\ e_a^b=\delta_a^b$ ($a,b=1,2,3$); единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t=const имеет вид

$$n_\alpha=(-N,0,0,0),\ \alpha=0,1,2,3.$$

Как известно, Ψ – волновая функция Вселенной удовлетворяет уравнению Уилера–ДеВитта

$$T_\perp\Psi=0 \quad (15)$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a\Psi=0. \quad (16)$$

Согласно литературе [16] уравнения связей можно записать в виде

$$T_\perp=-\sigma_0G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd}-g^{1/2}\cdot{}^3R- -2\sigma_0g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp}=0, \quad (17)$$

$$T_a=-2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d}-2g^{1/2}\cdot T_{\perp a}=0. \quad (18)$$

Здесь

$$\pi^{ab}=-g^{1/2}(K^{ab}-g^{ab}K),$$

$$K_{ab}=-n_{a;b},$$

$$T_{\perp\perp}=T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta,\ T_{a\perp}=\sigma_0n^\alpha e_a^\beta T_{\beta\alpha},$$

$\sigma_0=-1,\ T_{\alpha\beta}$ – ТЭИ анизотропной жидкости.

В итоге для метрики (1) получено:

$$T_\perp=\frac{\sqrt{A}R(-12R'^2A^2+4R^2A^2\varepsilon)}{2A(A+b)}+ +\frac{\sqrt{A}R\left(4R^2Ab\pi+8R^2Ab\varepsilon+4R^2b^2\pi\right)}{2A(A+b)}+ +\frac{\sqrt{A}R\left(4R^2b^2\varepsilon+A^3+A^2b\right)}{2A(A+b)}=0, \quad (19)$$

$$T_1 = \sqrt{b}R(A+b)(\pi+\varepsilon) = 0,$$
$$T_2 = -\sqrt{b}Rz(A+b)(\pi+\varepsilon) = 0, \qquad (20)$$
$$T_3 = 0.$$

Чтобы удовлетворить условию равенства нулю выражения (20) примем $b = 0$.

Будем квантовать уравнение связи (19) с помощью замены t конформным временем η: $dt = Rd\eta$ и заменой производной $\frac{dR}{d\eta}$ оператором $\frac{1}{i}\frac{d}{dR}$, где i – мнимая единица.

Подставив в (19) выражения (13) получим уравнение Уиллера–ДеВитта:

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} - R^2\left(\frac{A}{4} - R^2H^2\right)\right]\Psi(R) = 0. \qquad (21)$$

Уравнение (21) можно записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} - U(R)\right]\Psi(R) = 0, \qquad (22)$$

где

$$U(R) = \frac{AR^2}{4}\left(1 - \frac{4H^2}{A}R^2\right). \qquad (23)$$

Обозначим для дальнейшего:

$$\tilde{V} = \frac{4H^2}{A},\ R_0^2 = \frac{A}{4H^2} = \frac{1}{\tilde{V}}. \qquad (24)$$

3. Квантовое туннелирование

Мы будем рассматривать квантовое рождение вселенной с вращением из $R = 0$ в рамках туннелирующего подхода Виленкина с туннелирующей волновой функцией Ψ_{TV} [2, 3]. Функция Ψ_{TV} будет найдена как решение (22) по методу ВКБ и удовлетворяет условию

$$\left|\Psi_{TV}(R, A, \varepsilon)\right| \to 1 \text{ при } R \to 0. \qquad (25)$$

Согласно [3], в осцилляторной области ($\tilde{V}R^2 > 1$) подходящая мода – решение уравнения (22), найденное по методу ВКБ, имеет вид

$$\Psi_{TV} = \frac{A_1 e^{i\pi/4}}{\sqrt[4]{-U(R)}} \exp\left\{-i\int_{R_0}^{R}\sqrt{-U(R)}dR\right\}, \qquad (26)$$

где A_1 – некоторая константа.

Используя процедуру ВКБ [3, 17] можно получить решение уравнения (22) в туннелирующей области ($\tilde{V}R^2 < 1$), которое соответствует моде (26) в осцилляторной области и имеет вид

$$\Psi_{TV} = \frac{A_1}{2\sqrt[4]{U(R)}}\exp\left(-\int_R^{R_0}(U(R))^{1/2}dR\right) +$$
$$+\frac{iA_1}{\sqrt[4]{U(R)}}\exp\left(\int_R^{R_0}(U(R))^{1/2}dR\right). \qquad (27)$$

У нас

$$\sqrt{-U(R)} = \frac{\sqrt{A}}{2}R\left(\frac{4H^2}{A}R^2 - 1\right)^{1/2}, \qquad (28)$$

$$\sqrt{U(R)} = \frac{\sqrt{A}}{2}R\left(1 - \frac{4H^2}{A}R^2\right)^{1/2}, \qquad (29)$$

Тогда решение (27) можно записать в виде

$$\Psi_{TV} = \frac{A_1\exp\left(-\frac{\sqrt{A}}{2}\frac{1}{3\tilde{V}}\left(1-\tilde{V}R^2\right)^{3/2}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{A}R\left(1-\tilde{V}R^2\right)^{1/2}\right)^{1/2}} +$$
$$+\frac{iA_1\exp\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\frac{1}{3\tilde{V}}\left(1-\tilde{V}R^2\right)^{3/2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{A}}{2}R\left(1-\tilde{V}R^2\right)^{1/2}\right)^{1/2}}. \qquad (30)$$

Можно считать, что $\tilde{V} << 1$. Тогда в области $\tilde{V}R^2 << 1$ (даже при больших конечных *R*) уравнение (22) можно приближенно заменить уравнением

$$\frac{d^2\Psi}{dR^2} - \frac{A}{4}R^2\Psi = 0. \qquad (31)$$

Введя обозначения $\quad \Psi' = \frac{d\Psi}{dR},\quad \nu = \frac{A}{4},$

(у нас ν – не малая величина), уравнение (31) перепишем в виде

$$\Psi'' - \nu R^2\Psi = 0. \qquad (32)$$

Если ввести новые переменные

$$z = \frac{\sqrt{\nu}}{2}R^2,\ \Psi = z^{1/4}y(z),$$

то (32) сведется к модифицированному уравнению Бесселя:

$$z^2y''_{zz} + zy'_z - \left(z^2 + \frac{1}{16}\right)y = 0. \qquad (33)$$

В области $\tilde{V}R^2 << 1$ (при больших конечных *R*; у нас $\tilde{V} << 1$) Ψ_{TV} из (30) можно представить приближенно в виде

$$\Psi_{TV} \approx \frac{A_1}{2\cdot 2^{1/4}\nu^{1/8}z^{1/4}}e^{-\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}e^{z} +$$
$$+i\frac{A_1}{2^{1/4}\nu^{1/8}z^{1/4}}e^{\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}e^{-z}. \qquad (34)$$

Точное решение уравнения (32) можно записать через решения уравнения (33), т.е. через модифицированные функции Бесселя.

Решение уравнения (33) можно записать в виде

$$y(z) = A_1 f_1 e^{-\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}}\left[I_{1/4}(z)+I_{-1/4}(z)\right]+ \\ +iA_1 f_2 e^{\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}}K_{1/4}(z) \quad (35)$$

Тогда в области $\tilde{V}R^2 << 1$ функцию Ψ_{TV} через переменную z можно представить как решение уравнения (32) в следующем виде:

$$\Psi_{TV} = A_1 z^{1/4}\left\{\begin{array}{l} f_1 e^{-\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}}\left[I_{1/4}(z)+I_{-1/4}(z)\right]+ \\ +if_2 e^{\frac{\nu^{1/2}}{3\tilde{V}}}K_{1/4}(z)\end{array}\right\}. \quad (36)$$

Здесь f_1 и f_2 – пока неизвестные постоянные.

Известно асимптотическое поведение модифицированных функций Бесселя при больших конечных *z*:

$$I_{1/4}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}}e^z, \quad (37)$$

$$I_{-1/4}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}}e^z, \quad (38)$$

$$K_{1/4}(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2z}}e^{-z}. \quad (39)$$

Используя (37)–(39), получим из (36) при больших конечных *R* (в области $\tilde{V}R^2 << 1$) приближенное выражение для Ψ_{TV}:

$$\Psi_{TV} \approx A_1 \frac{2f_1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^{1/4}}e^{-\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}e^z + \\ +iA_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}f_2 e^{\sqrt{\nu}/3\tilde{V}}\frac{1}{z^{1/4}}e^{-z}. \quad (40)$$

Сравнивая (34) и (40) найдем постоянные f_1 и f_2:

$$f_1 = \frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}},\ f_2 = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (36), получим

$$\Psi_{TV} = A_1 z^{1/4}\left\{\begin{array}{l} \frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}} e^{-\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\left[I_{1/4}(z)+I_{-1/4}(z)\right]+ \\ +i\frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}} e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}K_{1/4}(z)\end{array}\right\}. \quad (42)$$

Учитывая, что $\tilde{V}R^2 << 1$ будет и при $R\to 0$, то значит решение (42) справедливо и при $z\to 0$. Согласно [18], можно приближенно при $z\to 0$ считать:

$$I_{1/4}(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{\Gamma(5/4)}, \\ I_{-1/4}(z) \approx \left(\frac{2}{z}\right)^{1/4}\cdot\frac{1}{\Gamma(3/4)}, \\ K_{1/4}(z) \approx \frac{1}{2}\Gamma(1/4)\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{1/4}. \quad (43)$$

На основе (40) с учетом формул (41) при $z\to 0$ можно считать:

$$\Psi_{TV} \approx A_1\frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4\nu^{1/8}}e^{-\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\frac{2^{1/4}}{\Gamma(3/4)}+ \\ +i\frac{A_1 2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\nu^{1/8}}e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}\frac{2^{1/4}}{2}\Gamma(1/4) \quad (44)$$

Далее учитывая, что

$$e^{\frac{-\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}} << e^{\frac{\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}, \quad (45)$$

из выполнения условия $|\Psi_{TV}|\to 1$ при $z\to 0$ $(R\to 0)$ можно получить

$$A_1 \sim \nu^{1/8}e^{\frac{-\sqrt{\nu}}{3\tilde{V}}}. \quad (46)$$

Таким образом, туннелирующая волновая функция Ψ_{TV} для рассматриваемой модели вселенной задается формулами (26)–(29), (46).

4. Коэффициент туннелирования

Используя решение (26)–(29), (46) или опираясь на известную формулу квантовой механики, можно получить коэффициент туннелирования Вселенной (ВКБ коэффициент прохождения через потенциальный барьер) в виде

$$D = \exp\left(-2\int_0^{R_0}\sqrt{U(R)}dR\right) = \\ = \exp\left(-2\int_0^{R_0}\frac{\sqrt{A}}{2}R\left(1-\frac{4H^2}{A}R^2\right)^{1/2}dR\right). \quad (47)$$

Коэффициент туннелирования дает вероятность рождения вселенной. В итоге имеем

$$D = \exp\left(\frac{-A\sqrt{A}}{12H^2}\right). \quad (48)$$

Получается, что вероятность рождения нашей Вселенной, выраженная через коэффициент туннелирования (48) зависит от параметра метрики *A* и от параметра расширения *H*.

Отметим, что квантовое рождение Вселенной рассматривалось нами и в работах [12, 19, 20].

В работе [12] в рамках общей теории относительности построена нестационарная космологическая модель с метрикой типа IX по Бьянки. Источником гравитации этой модели являются сопутствующая анизотропная жидкость и несопутствующая идеальная жидкость. Проведено исследование квантового рождения такой Вселенной.

Для рассматриваемой модели выведено уравнение Уилера–ДеВитта, вычислен соответствующий коэффициент туннелирования. Найдена туннелирующая волновая функция как решение этого уравнения по методу ВКБ. При различных начальных условиях в рамках этой модели мы сравниваем вероятности рождения вселенной с вращением и без него.

В работе [19] в рамках общей теории относительности мы построили нестационарную космологическую модель с метрикой IX типа Бьянки с параметрами, отличающимися от модели [12]. Для этой модели получено уравнение Уилера–ДеВитта и соответствующий коэффициент туннелирования.

В работе [20] мы рассмотрели возможность квантового рождения Вселенной для типа VIII по Бьянки, было замечено, что с увеличением ускорения Вселенной увеличивается вероятность ее квантового рождения.

Список источников

1. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990. 279 с.
2. *Coule D.H., Martin J.* Quantum Cosmology and Open Universe // Preprint gr – qc/9905056. 1999.
3. *Vilenkin A.* Wave function discord // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 067301.
4. *Kontoleon N., Wiltshire D.L.* Operator ordering and consistency of the wave function of the Universe // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 063513.
5. *Linde A.D.* Quantum creation of an open inflationary universe // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 083514.
6. *Fang L.Z., Mo H.J.* Wavefunction of a rotating Universe // Phys. Lett. B. 1987. Vol. 186. P. 297.
7. *Krechet V.G.* Rotating quantum cosmological models with wave fields // Russian Phys. J. 1993. Vol. 36, № 1. P. 33–35.
8. *Fil'chenkov M.L., Saibatalov R.X.* Abstracts of 11th Internat. Conf. Theoret. and Experim. Probl. of Gener. Relat. and Gravitat. Tomsk. 2002. P. 37 – 38.
9. *Dymnikova I., Fil'chenkov M.L.* Quantum Birth of a Hot // Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. 2002. Vol. 545, № 3–4. P. 214–220. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02620-5. EDN LHETIP.
10. *Янишевский, Д.М.* Космологическая модель в метрике типа VIII по Бьянки: квантовое рождение Вселенной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. № 4(43). С. 45–47. DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-45-47. EDN YRJECT.
11. *Kufshinova E.V., Panov V.F.* Quantum Birth of the Rotating Universe // Russian Phys. J. 2003. Vol. 46, № 10. P. 999–1009.
12. *Panov V.F., Kuvshinova E.V.* Quantum Birth of the Universe with Rotation // Gravitation and Cosmology. 2004. Vol.10, № 1–2 (37–38). P. 156–160.
13. *Kufshinova E.V., Panov V.F.* Quantum Origin of a Rotating Universe of the Bianchi IX Type // Russian Phys. J. 2005. Vol. 48, № 6. P. 633–638.
14. *Misner C.W., Thorne K.S., and Wheeler J.A.* Gravitation, Freeman and Co., San Francisco, 1973.
15. *Vladimirov Yu.S.* Frames of Reference in Gravitation Theory [in Russian], Energoizdat, Moscow, 1982.
16. *Пономарёв В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985.
17. *Shiff L.I.* Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1968.
18. *Olver F.* Asymptotics and Special Functions. Academic Press, New York, 1974.
19. *Kuvshinova E.V., Panov V.F., Sandakova O.V.* Quantum Birth of a Rotating Universe // Gravitation and Cosmology. 2006. Vol. 12, № 4. P. 311–313.
20. *Panov V.F., Kuvshinova E.V., Sandakova O.V.* Quantum Birth of the Bianchi Type VIII Universe with Rotation // Russian Phys. J. 2012. Vol. 55, № 5. P. 592–595.

References

1. *Linde A.D.* Fizika elementarnyh chastic i inflyacionnaya kosmologiya. M.: Nauka, 1990. 279 p.

2. . *Coule D.H., Martin J.* Quantum Cosmology and Open Universe // Preprint gr – qc/9905056. 1999.
3. *Vilenkin A.* Wave function discord // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 067301.
4. *Kontoleon N., Wiltshire D.L.* Operator ordering and consistency of the wave function of the Universe // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 063513.
5. *Linde A.D.* Quantum creation of an open inflationary universe // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 083514.
6. *Fang L.Z., Mo H.J.* Wavefunction of a rotating Universe // Phys. Lett. B. 1987. Vol. 186. P. 297.
7. *Krechet V.G.* Rotating quantum cosmological models with wave fields // Russian Phys. J. 1993. Vol. 36, № 1. P. 33–35.
8. *Fil'chenkov M.L., Saibatalov R.X.* Abstracts of 11th Internat. Conf. Theoret. and Experim. Probl. of Gener. Relat. and Gravitat. Tomsk. 2002. P. 37–38.
9. *Dymnikova I., Fil'chenkov M.L.* Quantum Birth of a Hot // Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. 2002. Vol. 545, № 3–4. P. 214–220. DOI 10.1016/S0370-2693(02)02620-5. EDN LHETIP.
10. *YAnishevskij D M.* Kosmologicheskaya model' v metrike tipa VIII po B'yanki: kvantovoe rozhdenie Vselennoj // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2018. № 4(43). P. 45–47. DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-45-47. EDN YRJECT.
11. *Kufshinova E.V., Panov V.F.* Quantum Birth of the Rotating Universe // Russian Phys. J. 2003. Vol. 46, № 10. P. 999–1009.
12. *Panov V.F., Kuvshinova E.V.* Quantum Birth of the Universe with Rotation // Gravitation and Cosmology. 2004. Vol.10, № 1–2 (37–38). P. 156–160.
13. *Kufshinova E.V., Panov V.F.* Quantum Origin of a Rotating Universe of the Bianchi IX Type // Russian Phys. J. 2005. Vol. 48, № 6. P. 633–638.
14. *Misner C.W., Thorne K.S., and Wheeler J.A.* Gravitation, Freeman and Co., San Francisco, 1973.
15. *Vladimirov Yu.S.* Frames of Reference in Gravitation Theory [in Russian], Energoizdat, Moscow, 1982.
16. *Ponomarev V.N., Barvinskij A.O., Obuhov YU.N.* Geometrodinamicheskie metody i kalibrovochnyj podhod k teorii gravitacionnyh vzaimodejstvij. M.: Energoatomizdat, 1985.
17. *Shiff L.I.* Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1968.
18. *Olver F.* Asymptotics and Special Functions. Academic Press, New York, 1974.
19. *Kuvshinova E.V., Panov V.F., Sandakova O.V.* Quantum Birth of a Rotating Universe // Gravitation and Cosmology. 2006. Vol. 12, № 4. P. 311–313.
20. *Panov V.F., Kuvshinova E.V., Sandakova O.V.* Quantum Birth of the Bianchi Type VIII Universe with Rotation // Russian Phys. J. 2012. Vol. 55, № 5. P. 592–595.

Информация об авторах:

Е. В. Кувшинова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID 28999;

О. В. Сандакова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID 38871.

Information about the authors:

E. V. Kuvshinova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID 28999;

O. V. Sandakova – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department of the Mechanics and Mathematics Faculty, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID 38871.