Научная статья
УДК_517.925_
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-13-18

Компактность в пространстве квази абсолютно непрерывных функций

Геннадий Григорьевич Иванов[1], Геннадий Викторович Алфёров[2], Владимир Степанович Королёв[3]

[1, 2, 3]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Аннотация. В работе вводится понятие квази абсолютно непрерывной функции на замкнутом отрезке и получено условие компактности множества в пространстве функций, квази абсолютно непрерывных на замкнутом отрезке. Полнота класса позволяет при исследовании решений дифференциальных уравнений заменить непрерывную функцию последовательностью приближений, каждое из которых является "более простой", чем исходная. Решается задача упрощения процесса исследования решений дифференциальных уравнений, для которых предлагается метод построения абсолютно непрерывной функции.

Ключевые слова: *компактность; равномерно ограниченные; непрерывные функции; абсолютная непрерывность*

Для цитирования: *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Компактность в пространстве квази абсолютно непрерывных функций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 3(62). С. 13–18. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-13-18.

Статья поступила в редакцию 05.07.2023; одобрена после рецензирования 18.08.2023; принята к публикации 15.09.2023.

Research article

Compactness in the Quasi-Absolutely Continuous Functions Space

Gennadiy G. Ivanov[1], Gennady V. Alferov[2], Vladimir S. Korolev[3]

[1, 2, 3]St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Abstract. In this paper we introduce the notion of a quasi-continuous function on a closed segment and obtain the set compactness condition in the functions quasi-absolutely continuous space on a closed segment. The class completeness allows us to replace a continuous function by a approximations sequence, each of which is "simpler" than the original one. The differential equations investigating solutions simplifying process problem is solved, for which a constructing an absolutely continuous function method is proposed.

Keywords: *compactness; uniformly bounded; continuous functions; absolute continuity*

For citation: *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Compactness in the Quasi-Absolutely Continuous Functions Space. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;3(62):13-18. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-3-13-18.

The article was submitted 05.07.2023; approved after reviewing 18.08.2023; accepted for publication 15.09.2023.

Введение

В курсе математического анализа рассматриваются всевозможные семейства непрерывных функций, заданных на специальных множествах, а также исследуется вопрос о "полноте" таких семейств [1, 2]. В частности, возникает вопрос о существовании предела для последовательности непрерывных функций, заданных на числовых отрезках $[a, b]$, а также о свойствах данного предела. Согласно Коши, равномерный предел непрерывных функций также является непрерывной функцией, что означает полноту пространства C[a,b]. Существенным здесь является то, что область определения функций – компактное подмножество X вещественной прямой (отрезок), а функции принимают значение в множестве Y пространства R ($Y \subset R$).

Аналогичный результат можно получить, если возьмем класс непрерывных отображений произвольного метрического компакта в полное метрическое пространство [3–11].

1.1. Определения и свойства

Определение. Функция f, определенная на множестве $X \subset R$, называется непрерывной, если для любого $x \in X$ и любой окрестности U точки $f(x)$, существует окрестность V точки x в множестве X такая, что

$$f(V) \subset U.$$

Определение. Функция $f : X \to R$ непрерывна на множестве X, если для любой точки x_0 этого множества и любой последовательности точек $x_n \in X$, сходящейся к x_0, будет выполнено: $f(x_n) \to f(x_0)$.

Рассмотрим пространство C[a,b] непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, вместе с метрикой равномерной сходимости. Оно является полным метрическим пространством. Чтобы некоторое подмножество полного метрического пространства было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

В случае пространства C[a,b] можно использовать более эффективный критерий предкомпактности, но для этого потребуется использовать следующие новые понятия.

Положим, что F – семейство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Вводится понятие квази абсолютно непрерывной функции, и дается условие компактности в пространстве квази абсолютно непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ функций.

Определение. Непрерывную на $[a, b]$ функцию $f(x)$ будем называть *квази абсолютно непрерывной*, если для сколь угодно малого ε и сколь угодно большого $K < +\infty$ существует δ такое, что для любой последовательности

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_k < b_k, \quad (1)$$
$$k \le K < +\infty,$$
$$a_i, b_i \in [a, b], \ i = 1,2, \dots, k,$$

удовлетворяющей условию

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta \quad (2)$$

будет выполняться неравенство

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^{k}[(f(b_i) - f(a_i)]\right| < \varepsilon\,. \quad (3)$$

В определении абсолютно непрерывной функции δ зависит только от ε . Для квази абсолютно непрерывных функций δ зависит не только от ε , но и от $k \le K$.

Определение. Обозначим через A совокупность квази абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций. Будем говорить, что функции, входящие в совокупность A, являются равностепенно квази абсолютно непрерывными, если для сколь угодно малого ε и сколь угодно большого $K < +\infty$ существует δ такое, что для любой последовательности вида (1), удовлетворяющей условию (2), и для любой функции $f \in A$ будет выполняться неравенство (3).

Определение. Множество $X \subset R$ называется компактным, если из каждой последовательности ($x_n \in X$) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $x_0 \in X$.

Компактные множества похожи на отрезок, и непрерывные функции на них ведут себя, как на отрезке. Свойства и критерии для компактных множеств известны, в том числе в виде различных утверждений или теорем.

Они доказываются дословно так же, как и для непрерывных функций на отрезке. Используется только определение непрерывности через последовательности и возможность выбора сходящейся подпоследовательности из последовательности точек компакта.

Теорема Арцела. Функциональное семейство Fявляются предкомпактным в полном метрическом пространстве C[a,b] тогда и только тогда, когда это семейство является

- равномерно ограниченным;
- равностепенно непрерывным.

Теорема Арцела – это утверждение, которое представляет собой критерий [1] предкомпактности множества в полном метрическом пространстве в том специальном случае, когда рассматриваемое пространство – пространство непрерывных функций на отрезке вещественной прямой. Теорема Арцела находит свое применение в теории дифференциальных уравнений. Применение **теоремы Арцела** связано со специальными свойствами рассматриваемых семейств, а именно: с равномерной ограниченностью и равностепенной непрерывностью.

Теорема Арцела–Асколи – это обобщение **теоремы Арцела** на тот случай, когда рассматриваются семейства отображений метрических компактов.

Таким образом, **теорема Арцела** представляет собой критерий предкомпактности семейства непрерывных функций, заданных на компакте и действующих в полное метрическое пространство.

Существующий критерий предкомпактности множества в полном пространстве требует проверки вполне ограниченности данного множества. На практике, такой критерий не является эффективным. Поэтому представляется целесообразным использовать свойства самих функций, входящих в семейство, чтобы получить критерий предкомпактности, пригодный для применения на практике.

1.2. Основные утверждения

Теорема 1. Если A – совокупность равномерно ограниченных и равностепенно квази абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, то из нее можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к квази абсолютно непрерывной на $[a,b]$ функции.

Доказательство. Очевидно, что функции, входящие в совокупность A, являются равностепенно непрерывными.

Тогда в силу теоремы Арцела–Асколи [1] из A можно извлечь подпоследовательность f_n, равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной на $[a,b]$ функции.

Обозначим эту предельную функцию через f и покажем, что она является квази абсолютно непрерывной.

Пусть это не так. Тогда для некоторых и $K_0 < +\infty$ и сколь угодно малого найдется последовательность вида (1) с $k \le K_0$, удовлетворяющая условию (2), и такая, что имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{k}[(f(b_i)-f(a_i)]\right| \ge \varepsilon_0 \qquad (4)$$

Зададимся произвольными

и $K \in [K_0, +\infty)$.

В силу сделанных предположений по и K найдутся и последовательность вида (1), удовлетворяющая условию (2), такие, что для любого n будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{k}[(f_n(b_i)-f_n(a_i)]\right| < \varepsilon, \qquad (5)$$

а для функции f будет выполняться неравенство (4).

Выберем N столь большим, чтобы для всех $n > N$ и всех $x \in [a,b]$ выполнялись неравенства

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad . \qquad (6)$$

Тогда будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^{k}[(f(b_i)-f(a_i)]\right| = \left|\sum_{i=1}^{k}\{(f_n(b_i)-f_n(a_i)]\right| + +[f(b_i)-f_n(b_i)]+[f_n(a_i)-f(a_i)]\} \le \left|\sum_{i=1}^{k}\{(f_n(b_i)-f_n(a_i)]\right| + +\sum_{i=1}^{k}\{(f_n(a_i)-f(a_i)]+|f_n(b_i)-f(b_i)|) < < 2\varepsilon < \varepsilon_0 \ , \qquad (7)$$

что противоречит неравенству (4). Это противоречие и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2. Если последовательность $F = \{f_m\}$ квази абсолютно непрерывных функций сходится на $[a,b]$ к квази абсолютно непрерывной функции f, то функции, входящие в F, равномерно ограничены и равностепенно квази абсолютно непрерывны.

Доказательство. Поскольку функции $f, f_1, f_2, \ldots$. непрерывны, то последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно и является равномерно ограниченной. Покажем, что функции, входящие в последовательность F, являются равностепенно квази абсолютно непрерывными.

Предположим, что это условие не выполняется.

Тогда существуют , $K < +\infty$ такие, что для сколь угодно малого и сколь угодно большого N найдутся $n > N$ и последовательность вида (1), удовлетворяющая условию (2), такие, что будет иметь место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{k}[(f_n(b_i) - f_n(a_i)]\right| \geq \varepsilon_0. \qquad (8)$$

Выберем произвольное и столь большое N, что для всех $n > N$ и всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство (6). Из сделанного предположения и из квази абсолютной непрерывности функции f следует, что для выбранных K и N найдутся $n > N$ и последовательность вида (1), удовлетворяющая условию (2), такие, что будут иметь место неравенства (3) и (8) одновременно. Тогда получим цепочку противоречивых неравенств:

$$\varepsilon_0 \leq \left|\sum_{i=1}^{k}[(f_n(b_i) - f_n(a_i)]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k}\{[(f(b_i) - f(a_i)] + [f_n(b_i) - f(b_i] + [f(a_i) - f_n(a_i]\}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{k}[(f(b_i) - f(a_i)]\right| + \sum_{i=1}^{k}[|f_n(b_i) - f(b_i| + |f(a_i) - f_n(a_i)|] < 2\varepsilon < \varepsilon_0. \quad (9)$$

Это противоречие и доказывает теорему. Объединяя теоремы 1 и 2, приходим к следующему результату.

Теорема 3. Для того чтобы бесконечное множество A элементов пространства квази абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций было компактно, необходимо и достаточно, чтобы функции, входящие в A, были равномерно ограничены и равностепенно квази абсолютно непрерывны.

Доказательство. Достаточность условий теоремы доказана в теореме 1.

Необходимость условия равномерной ограниченности функций из A вытекает из теоремы об ограниченности компактного множества в метрическом пространстве [1].

Необходимость условия равномерной квази абсолютной непрерывности нетрудно доказать, опираясь на теорему 2.

Обозначим через B совокупность абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций.

Будем говорить, что функции, входящие в совокупность B, являются равностепенно абсолютно непрерывными, если для любого найдется такое, что для любой последовательности вида (1), удовлетворяющей условию (2), и для любой функции будет выполняться неравенство (3).

Теорема 4. Если B – совокупность равномерно ограниченных и равностепенно абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, то из нее можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к абсолютно непрерывной на $[a, b]$ функции.

Доказательство. Поскольку функции, входящие в совокупность B, равностепенно абсолютно непрерывны, то они являются и равностепенно непрерывными. Тогда в силу теоремы Арцела–Асколи из B можно извлечь подпоследовательность $\{f_n\}$, равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной на $[a, b]$ функции. Обозначим эту предельную функцию через f и покажем, что она является абсолютно непрерывной.

Пусть это не так. Тогда для некоторого и сколь угодно малого найдется конечная последовательность вида (1), удовлетворяющая условию (2), и такая, что имеет место неравенство (4).

Выберем . Тогда в силу сделанных предположений найдется и конечная последовательность вида (1), удовлетворяющая условию (2), такая, что для любого n будет иметь место неравенство (5), а для функции f – неравенство (4).

Выберем N столь большим, чтобы для всех $n > N$ и сразу для всех $x \in [a, b]$ выполнялось бы неравенство (6). Тогда будет иметь место неравенство (7), которое противоречит предположению (4). Это противоречие и доказывает теорему.

Теорема 4 не может быть обращена, т.е. из факта, что последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции, не только не следует, что функции, входящие в эту последовательность, являются равностепенно абсолютно непрерывными, но и что они вообще являются абсолютно непрерывными.

Справедливость этого утверждения следует из простого примера.

Пример.

Зададим последовательность $\{f_n\}$, положив

$$f_n(x) = \frac{x}{n} cos\frac{1}{x},\ x \in [0,1]. \qquad (10)$$

Эта последовательность равномерно сходится к абсолютно непрерывной на [0,1] функции $f \equiv 0$, но ни одна из функций f_n не является абсолютно непрерывной.

Заключение

Предложенный подход, с одной стороны, упрощает процесс исследования решений дифференциальных уравнений путем замены непрерывной функции последовательностью приближений, каждое из которых является функцией более простой чем исходная, а с другой стороны дает метод построения абсолютно непрерывной функции.

Список источников

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
3. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С., Селицкая Е.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 5–15.
4. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Системы с транзисторными ключами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2(49). С. 14–18.
5. *Алфёров Г.В., Королёв В.С., Поляхова Е.Н., Холшевников К.В.* Моделирование задач динамики и развитие научных направлений механики и прикладной математики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8, № 1. С. 138–149.
6. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Possible solutions of a linear homogeneous system of differential equations // AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020. P. 060002.
7. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020. P. 060003.
8. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM-2019. 2020. P. 060004.
9. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020. P. 060005.
10. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 47–53.
11. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28.

References

1. *Natanson I.P.* Teoriya funkcij veshchestvennoj peremennoj. M.: Nauka; 1974.
2. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka; 1972. 496 p.
3. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S., Selickaya E.A.* Periodicheskie resheniya differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;(3(46)):5–15.
4. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Sistemy s tranzistornymi klyuchami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020;(2(49)):14–18.
5. *Alfyorov G.V., Korolyov V.S., Polyahova E.N., Holshevnikov K.V.* Modelirovanie zadach dinamiki i razvitie nauchnyh napravlenij mekhaniki i prikladnoj matematiki. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya. 2021;(8-1):138–149.
6. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Possible solutions of a linear homogeneous

system of differential equations. AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020: 060002.
7. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations. AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020:060003.
8. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations. AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM-2019. 2020: 060004.
9. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations. AIP Conference Proceedings. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2019. 2020:060005.
10. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Issledovanie reshenij linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023;(1(60)):47–53.
11. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Stabilizaciya programmnyh dvizhenij sistem peremennoj struktury. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023;(2(61)):16–28.

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 7342.

Information about the authors:

G. G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 116900;

G. V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 2873;

V. S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 7342.