Научная статья
УДК 531.391
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-16-28

Стабилизация программных движений систем переменной структуры

Геннадий Григорьевич Иванов[1], Геннадий Викторович Алфёров[2], Владимир Степанович Королёв[3]

[1, 2, 3]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Аннотация. Для систем с кусочно-постоянными управлениями рассмотрена задача орбитальной стабилизации программных движений, сводящейся к выяснению вопроса об асимптотической устойчивости специальной системы линейных разностных уравнений. Класс рассмотренных систем, названных "системами переменной структуры", включается в класс вызывающих в настоящее время все возрастающий интерес так называемых трансформирующихся систем. Предложен критерий орбитальной устойчивости и метод синтеза искомых стабилизирующих управлений для структурно-линейных систем при построениях автоколебаний.

Ключевые слова: *системы переменной структуры; стабилизация; устойчивость управления*

Для цитирования: *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-16-28.

Статья поступила в редакцию 10.11.2022; одобрена после рецензирования 16.05.2023; принята к публикации 22.06.2023.

Research article

Program Motions Stabilization of Variable Structure Systems

Gennadiy G. Ivanov[1], Gennady V. Alferov[2], Vladimir S. Korolev[3]
[1, 2, 3]St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Abstract. The program motions orbital stabilization problem is considered for systems with piecewise constant controls. The problem is reduced to the elucidation of the linear difference equations special system asymptotic stability. The considered systems class, called variable-structure systems, is included in the so-called transforming systems class, which are currently growing interest in the present time. An orbital stability criterion and a desired stabilizing control synthesizing method for the structurally linear systems in the case of auto-oscillation constructions are proposed.

Keywords: *variable structure systems; stabilization; stability of control*

For citation: *Ivanov G. G., Alferov G. V., Korolev V. S.* The Program Motions Stabilization of Variable Structure Systems. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;2(61):16-28. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-2-16-28.

The article was submitted 10.11.2022; approved after reviewing 16.05.2023; accepted for publication 22.06.2023.

Введение

Толчком к появлению теории систем с переменной структурой (СПС) послужило в 1957 г. предложение С.В. Емельянова использовать нелинейную коррекцию, в соответствии с которой, в зависимости от состояния системы управления, параметры обратной связи скачкообразно менялись. Идея оказалась крайне плодотворной и стала систематически применяться для улучшения качества регулирования при решении самых разнообразных задач управления [1–8].

Для систем второго порядка С.В. Емельяновым вводятся основные режимы работы СПС: движение по вырожденным траекториям, режим переключений и режим скольжения по прямой переключения структур.

Выясняется, что в режиме скольжения движение в замкнутой системе не зависит от факторов неопределенности (неизвестных, в том числе и переменных параметров объекта и внешних сил) и потому доминирующей идеей синтеза СПС становится идея преднамеренного введения режима скольжения по прямой переключения, положение которой заметно влияет на качество переходных процессов.

Позднее С.В. Емельянов публикует первый вариант теории СПС с изложением основных ее идей и принципов, а также очерк методов анализа и синтеза СПС, который превращается в первую монографию по теории СПС [1].

Доказывается, что неидеальная информация о состоянии системы разрушает идеальность скользящего режима, превращая его в реальный режим скольжения, то есть режим с конечной частотой переключения и конечным же отклонением от прямой скольжения.

Важно, что при определенных условиях это не приводит к неустойчивости системы, в отличие, например, от систем с бесконечным коэффициентом усиления. Иначе говоря, СПС демонстрирует робастность, т. е. работоспособность при наличии динамических неидеальностей.

С.В. Емельянов, В.А. Таран и В.И. Уткин [3] начинают систематическое использование принципа переменности структуры для управления по состоянию объектами n-го порядка, в том числе объектами с переменными параметрами и при наличии внешних воздействий. Удается доказать, что для стабилизации таких объектов методами СПС достаточно информации только о диапазонах изменения параметров и характеристиках внешних воздействий, а их изменение во времени не играет большой роли.

Современные очертания теория СПС обрела после разработки методов синтеза обратной связи по выходу с использованием наблюдателей состояния, создания методов управления объектами с распределенными параметрами и теории дискретных СПС и систем с переменной структурой для объектов с последействием.

В работах по релейной стабилизации, исследуя линейные системы с нелинейностями гистерезисного типа, было показано, что система, замкнутая релейным стабилизирующим управлением, имеет автоколебание. Но такая ситуация возникает при достаточно жестких ограничениях на параметры системы, а само периодическое решение располагается в достаточно малой окрестности нуля.

Проведенные здесь исследования показывают, что, используя теорию систем с переменной структурой, мы можем добиться, чтобы в управляемой системе не только возникло автоколебание, но и чтобы периодическое решение системы имело заданные параметры, такие, как период и амплитуда [7–18].

1.1. Системы и методы

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}), \qquad (1)$$

где t – время; y – вектор фазовых переменных размерностью n; $\boldsymbol{w}$ – вектор управляющих воздействий размерностью r, принимающий лишь m разных значений $w_1, \ldots, w_m$; заданные n, r, m – натуральные числа.

В силу структуры управления в процессе движения система (1) совпадает с одной из систем:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = f_i(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, w_i), \qquad (2)$$

$$i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому любое решение системы (1) на определенных промежутках времени является решением одной или другой из систем (2).

Будем считать, что переход от системы (2) с номером i к системе (2) с номером j осуществляется в момент, когда решение системы (2) с номером i попадет на поверхность, задаваемую соотношением $\psi_{ij}(y) = 0$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi^k{}_{ij}(y) > 0, \ k = 1, \ldots, k_{ij}\,. \qquad (3)$$

Здесь k_{ij} – некоторые натуральные числа; $\psi_{ij}(y)$, $\varphi^k{}_{ij}(y)$ – некоторые функции, где $i, j = 1, \ldots, m, \ i \le j$, структура которых зависит от специфики рассматриваемой управляемой системы, а также и от выбора методики синтеза искомых управляющих воздействий. Так, часть функций $\psi_{ij}(y)$, ${\varphi^k}_{ij}(y)$ может быть заданной, а другая часть подлежит дополнительному выбору.

Нас будут интересовать вопросы устойчивости и стабилизации программных решений системы (1). Пусть заданы функции

$$\psi_{ij}(y),\ \ {\varphi^k}_{ij}(y), \qquad (4)$$
$$(k = 1, \dots, k_{ij}, i, j = 1, \dots, m,\ i \neq j),$$

программное управление $w^p(t)$ и соответствующее ему программное решение $y^p(t)$ системы (1), где $w^p(t)$, $y^p(t)$ – заданные на промежутке $[t_0, +\infty)$ соответственно кусочно-постоянная и кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функции.

1.2. Задачи орбитальной стабилизации и устойчивости

Для задачи орбитальной устойчивости нужно указать условия, при выполнении которых вектор-функция $y^p(t)$ будет орбитально асимптотически устойчивым решением системы (1), соответствующим программному управлению $w^p(t)$.

Пусть решение $y^p(t)$ не обладает нужными свойствами устойчивости, но структура его такова, что существует семейство функций (4) обладающее тем свойством, что для каждого фиксированного набора функций $\psi_{ij}(y)$, ${\varphi^k}_{ij}(y)$ из этого семейства вектор-функции $w^p(t)$, $y^p(t)$ будут по-прежнему удовлетворять системе (1).

Для задачи орбитальной стабилизации нужно выбрать функции (4) таким образом, чтобы для этих функций вектор-функция $y^p(t)$ была орбитально асимптотически устойчивым решением системы (1), соответствующим программному управлению $w^p(t)$.

1.3. Решение задачи орбитальной устойчивости

Опишем способ решения, сводящийся к выяснению вопроса об асимптотической устойчивости по Ляпунову некоторой специальной системы линейных разностных уравнений. При этом, не умаляя общности, для простоты изложения мы, в основном, рассмотрим лишь специальный класс программных решений и управлений, считая, что решение $y^p(t)$ в начальный момент времени t_0 начинается на поверхности, задаваемой соотношением $\psi_0(y) = 0$, а управление $w^p(t)$ циклическим образом пробегает все свои значения $w_1, \dots, w_{\mathrm{m}}$, начиная со значения w_1. Именно, будем считать, что решение $y^p(t)$ в моменты

$${t^p}_{ij}, i = 1, \dots, m, \qquad j = 0,1,2, \dots$$

пересекает поверхности $\psi_i(y) = 0$, удовлетворяя неравенствам (3) при $j = i + 1$, т.е. неравенствам

$$\varphi_i^k(y) > 0, \qquad (5)$$
$$k = 1, \dots, k_i,\ i = 1, \dots, m.$$

На интервалах $({t^p}_{(i-1)j}, {t^p}_{ij})$ оно является решением системы (2) с номером i, а сами моменты ${t^p}_{ij}$ удовлетворяют условиям

$$h_1 \leq {\tau^p}_{ij} \leq h_2,\ {\tau^p}_{ij} = {t^p}_{ij} - {t^p}_{(i-1)j}, \quad (6)$$
$$i = 1, \dots, m,\ j = 0,1,2, \dots$$

Здесь h_1, h_2 – некоторые положительные числа;

$$t_{00}^p = t_0,\ t_{0(j+1)}^p = t_{mj}^p,\ j = 0,1, \dots,$$
$$\psi_i(y) = \psi_{i(i+1)}(y),$$
$$\psi_m(y) = \psi_0(y) = \psi_{m1}(y),$$
$$\varphi_i^k(y) = \varphi_{i(i+1)}^k(y),$$
$$\varphi_m^k(y) = \varphi_0^k(y) = \varphi_{m1}^k(y), \qquad (7)$$
$$k = 1, \dots, k_i, \qquad k_i = k_{ii+1},$$
$$k_m = k_0 = k_{m1},\ i = 1, \dots, m.$$

Наряду с программным решением $y^p(t)$ системы (1) рассмотрим произвольное решение $y(t)$ этой системы, начинающееся в достаточно малой окрестности программного решения, и будем считать, что оно, как и программное решение $y^p(t)$, циклическим образом пересекает все поверхности

$$\psi_i(y) = 0,\ i = 1, \dots, m,$$

удовлетворяя неравенствам (5).

Если программное решение $y^p(t)$ орбитально устойчиво, то очевидно, что такое предположение оправдано.

Для решения $y(t)$, по аналогии с решением $y^p(t)$, моменты пересечения с поверхностями $\psi_i(y) = 0$, обозначим через

$$t_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 0,1,2, \dots,$$

причем $t_{00} = t_0$, $t_{0(j+1)} = t_{mj}$.

Прежде чем сформулировать условия разрешимости задачи орбитальной устойчивости, введем некоторые обозначения.

Через $F_{(i-1)j}(t, {t^p}_{(i-1)j})$ обозначим фундаментальную матрицу решений линейной системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{df_i(\boldsymbol{y^p(t)})}{dy}\xi,$$

нормированную при $t = t^p{}_{(i-1)j}$, т.е. удовлетворяющую условию

$$F_{(i-1)j}\left(t^p{}_{(i-1)j}, t^p{}_{(i-1)j}\right) = E_n,$$

где $E_n -$ единичная матрица *n*-го порядка.

Введем обозначения:

$$\bar{A}_{(i-1)j} = F_{(i-1)j}\left(t^p_{ij}, t^p_{(i-1)j}\right),$$
$$\bar{B}_{(i-1)j} = f(y^p(t^p_{ij})),$$
$$g_{(i-1)j} = \frac{d\psi_i\left(y^p(t^p_{ij})\right)}{dy},$$
$$k^*_{(i-1)j} = g^*_{(i-1)j}\,\bar{A}_{(i-1)j},$$
$$c_{(i-1)j} = g^*_{(i-1)j}\,\bar{B}_{(i-1)j},$$
$$L_{(i-1)j} = \bar{A}_{(i-1)j} + c^{-1}_{(i-1)j}\bar{B}_{(i-1)j}k^*_{(i-1)j},$$
$$x^*_{(i-1)j} = y(t_{(i-1)j}) - y^p\left(t^p_{(i-1)j}\right),$$
$$\vartheta_{(i-1)j} = t_{(i-1)j} - t^p_{(i-1)j},$$
$$\gamma_{(i-1)j} = \vartheta_{ij} - \vartheta_{(i-1)j},$$
$$\bar{A}(\tau) = \bar{A}_{(i-1)j}, \qquad \bar{B}(\tau) = \bar{B}_{i-1},$$
$$\tau = i-1+jm, \qquad g(\tau) = g_{i-1},$$
$$k(\tau) = k_{i-1}, \qquad c(\tau) = c_{i-1},$$
$$L(\tau) = L_{i-1},)$$
$$x(\tau) = x_{i-1}, \qquad \vartheta(\tau) = \vartheta_{i-1},$$
$$\gamma(\tau) = \gamma_{(i-1)j},$$
$$i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 0,1,2,\dots$$

Теорема 1. Пусть система (1) и ее программное решение $y^p(t)$ таковы, что

$$f_i(y) \in C^2(T_+ \times S_\rho(y,t)),$$
$$\psi_i(y) \in C^2(T_+ \times S_\rho(y,t)),$$
$$S_\rho(y,t) = \{y|\ \|y - y^p(t)\| \le \rho\}, \quad (8)$$
$$S_\rho(y,\tau) = \left\{y|\ \left\|y - y^p(t^p_{(i-1)j})\right\| \le \rho\right\},$$
$$\tau = i-1+jm, \qquad i = 1,2,\dots,m,$$
$$j = 0,1,2,\dots$$
$$\|f_i(y)\| \in [\bar{f}_1, \bar{f}_2]; \quad \varphi^k_i(y) \in [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2];$$
$$k = 1,2,\dots,k_i;$$
$$\left\|\frac{d\psi_i(y)}{dy}\right\| \in [\bar{g}_1, \bar{g}_2];$$
$$f^*_i(y)\frac{d\psi_i(y)}{dy} \in [\bar{c}_1, \bar{c}_2];$$
$$y \in S_\rho(y,\tau), \quad (9)$$

где $\bar{f}_s, \bar{\varphi}_s, \bar{g}_s, \bar{c}_s (s = 1,2)$ – некоторые положительные числа, а система линейных разностных уравнений

$$\eta(\tau+1) = L(\tau)\eta(\tau), \quad (10)$$

является равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$).

Тогда программное решение $y^p(t)$ системы (1) будет орбитально асимптотически устойчивым. Периодическое программное решение $y^p(t)$ является не только орбитально асимптотически устойчивым, но и устойчивым по Ляпунову.

Доказательство теоремы проводится по следующей **схеме**. Сначала выписываются соотношения, связывающие во времени величины $x(\tau), \gamma(\tau), \vartheta(\tau)$.

Оказывается, что эти соотношения имеют следующий вид:

$$x(\tau+1) = L(\tau)x(\tau) + l\left(\tau, x(\tau)\right), \quad (11)$$
$$\gamma(\tau) = c^{-1}(\tau)k^*\left(\tau)x(\tau)\right) + +\lambda\left(\tau, x(\tau)\right), \quad (12)$$
$$\vartheta(\tau+1) = \textstyle\sum_{s=0}^{\tau}\gamma(s),$$

где в силу условий (8), (9)

$$\|l(\tau,x)\| = o\|x\|,$$
$$\|\lambda(\tau,x)\| = o\|x\|,$$

а именно равномерно по $\tau \in T_+$, имеют место соотношения

$$\lim_{\|x\|\to 0}(\|x\|)^{-1}\,\|l(\tau,x)\| = 0,$$
$$\lim_{\|x\|\to 0}(\|x\|)^{-1}\,\|\lambda(\tau,x)\| = 0.$$

Затем на основании свойств систем (10), (11) с помощью метода функций Ляпунова устанавливается существование такого положительного числа δ, для которого любые решения системы (11) с начальными условиями

$$\tau = \tau_{0,}\ x(\tau_0) \in S_\delta(x),$$
$$S_\delta(x) = \{x|\ \|x\| \le \delta\}$$

с ростом τ стремятся к 0, что в силу условий (5) влечет за собой орбитальную асимптотическую устойчивость программного решения $y^p(t)$. Если программное решение $y^p(t)$ является периодическим, то устанавливается существование таких чисел

$$\alpha \in (0, +\infty),\ \beta \in (0, 1),\ \delta \in (0, +\infty),$$

что любые решения системы (11) с начальными условиями $\tau_0 \in T_+$, $x(\tau_0) \in S_\delta(x)$ с ростом τ стремятся к 0, убывая по закону

$$\|x(\tau)\| \le \alpha\,\|x(\tau_0)\|\beta^{(\tau-\tau_0)}, \quad (13)$$
$$\tau \ge \tau_0.$$

Отсюда и из уравнений (12) следует, что величина $\vartheta(\tau)$ удовлетворяет соотношениям

$$\|\vartheta(\tau)\| \le \bar{\vartheta}(x(0)) < +\infty,$$
$$\lim_{\|x(0)\|\to 0}\bar{\vartheta}(x(0)) = 0. \quad (14)$$

Выполнение условий (13), (14) влечет за собой не только орбитальную асимптотическую устойчивость, но и устойчивость по Ляпунову программного решения $y^p(t)$.

Для реализации описанной схемы доказательства теоремы 1 можно сформулировать лемму.

Лемма 1. Если выполнены условия (8) и (9), то существует число $\delta \in (0, \rho/2]$, такое, что равномерно по

$$i = 1,2,\ldots,m\,,\; j = 0,1,2,\ldots$$

решение $y(t,0,y_0)$ системы (2), начинающееся при $t=0$ в точке y_0, где y_0 – любая точка множества $S_\delta^\psi(y, t_{(i-1)j}^p)$, являющаяся пересечением поверхности $\psi_{i-1}(y) = 0$ с шаром $S_\delta(y, t_{(i-1)j}^p)$, в момент $\tau_{ij} = \tau_{ij}(y_0)$ пересекает поверхность $\psi_i(y) = 0$ и удовлетворяет соотношениям

$$x(t,0,x_0) = \breve{F}_{(i-1)j}(t)x_0 + \chi_{(i-1)j}(t.x_0) \quad (15)$$

$$t \in [0, \bar{\tau}_{ij}],\; \bar{\tau}_{ij} = \max\{\tau_{ij}, \tau_{ij}^p\},$$

$$x(t,0,x_0) = y(t,0,x_0) - y\left(t,0,y^p\left(t_{(i-1)j}^p\right)\right),$$

$$x_0 = y_0 - y^p(t_{ij}^p)$$

$$\|x(t,0,x_0)\| = a\|x_0\| + o\|x_0\| \le \bar{a}\|x_0\| \le \bar{a}\delta,$$

$$t \in [0, \bar{\tau}_{ij}], \qquad \varphi_i^k\big(y(t,0,y_0)\big) \ge \bar{\varphi}_i,$$

$$k = 1,2,\ldots k_i.$$

Здесь $\breve{F}_{(i-1)j}(t)$ – фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{df_i(y(t,0,y^p(t_{(i-1)j}^p)))}{dy}\xi,$$

совпадающая при $t \in [0, \tau_{ij}^p]$ с фундаментальной матрицей $F_{(i-1)j}\left(t + t_{(i-1)j}^p, t_{(i-1)j}^p\right)$, фигурирующей в обозначениях (7); вектор-функция $\chi_{(i-1)j}(t.x_0)$ равномерно по

$$t \in [0, \bar{\tau}_{ij}],\; i = 1,2,\ldots,m\,,\; j = 0,1,2,..$$

удовлетворяет неравенству

$$\left\|\chi_{(i-1)j}(t.x_0)\right\| \le \bar{b}\|x_0\|^2,$$

$a \equiv a(t,\tau,x_0)$ – неотрицательная величина; a, b – некоторые положительные числа;

$$\tau_{ij}^p = t_{ij}^p - t_{(i-1)j}^p,$$

$$y\left(t,0,y^p(t_{(i-1)j}^p)\right) = y^p\left(t + t_{(i-1)j}^p\right).$$

Доказательство. Так как при $t \in [t_0, +\infty)$ вектор-функция $y^p(t)$ является решением системы (1) при $w = w^p(t)$, то эта вектор-функция при $t \in [t_{(i-1)j}^p, t_{ij}^p]$ будет решением системы (2). Тогда в силу автономности системы (2) при $t \in [0, t_{ij}^p]$ решением этой системы будет и вектор-функция

$$y\left(t,0,y^p(t_{(i-1)j}^p)\right) \equiv y^p\left(t + t_{(i-1)j}^p\right).$$

Из условий (8), (9) следует, что решение системы (2) $z^p = y\left(t,0,y^p(t_{(i-1)j}^p)\right)$ может быть продолжено за пределы промежутка $[0, \tau_{ij}^p]$, в частности на промежуток

$$[0, \tau_{ij}^+],\; \tau_{ij}^+ = \tau_{ij}^p \bar{f}_2^{-1}\tilde{\rho},\; \tilde{\rho} \in (0, \tfrac{\rho}{2}]\,,$$

так как при $t \in [t_{(i-1)j}^p, t_{ij}^p]$ это решение не покидает шара $S_\rho(y, t_{ij}^p)$.

Из соотношений (5), (8), (9) в силу теоремы об интегральной непрерывности следует, что по любому $\varepsilon \in (0, \tilde{\rho}]$ найдется положительная величина δ, $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$, такая, что система (2) для любого $y_0 \in S_\delta(y, t_{(i-1)j}^p)$ будет иметь на промежутке $[0, \tau_{ij}^+]$ решение $y(t,0,y_0)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t,0,x_0)\| \le \varepsilon, \quad (16)$$

$$t \in [0, \tau_{ij}^+],$$

где x_0, $x(t,0,x_0)$ определены в формулах (15). При этом вектор-функция $x(t,0,x_0)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_i\left(x + y\left(t,0,y^p\left(t_{(i-1)j}^p\right)\right)\right) -$$

$$-f_i\left(y\left(t,0,y^p\left(t_{(i-1)j}^p\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{df_i\left(y\left(t,0,y^p(t_{(i-1)j}^p)\right)\right)}{dy}x + \kappa_{(i-1)j}\,(t,x),$$

где $\left\|\kappa_{(i-1)j}\,(t,x)\right\|$ является величиной не ниже второго порядка малости по сравнению с $\|x\|$. Поэтому вектор-функция $x(t,0,x_0)$ допускает представление (15):

$$x(t,0,x_0) = F_{(i-1)j}(t)x_0 + \chi_{(i-1)j}(t,x_0),$$

$$t \in [0, \tau_i],$$

где $\left\|\chi_{(i-1)j}(t,x_0)\right\|$ является величиной не ниже второго порядка малости по сравнению с $\|x_0\|$. Из соотношений (9) следует, что если

$$\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}],$$

$$\tilde{\varepsilon} = \bar{c}_1\bar{f}_2^{-1}\bar{g}_2^{-1}\tilde{\rho},\; \tilde{\rho} \in \left(0, \tfrac{\rho}{2}\right], \quad (17)$$

то для достаточно малых $\tilde{\rho}$ шар

$$S_\varepsilon^+ = \left\{y \mid \left\|y - y(\tau_{ij}^+, 0, y^p(t_{(i-1)j}^p))\right\| \le \varepsilon\right\}$$

целиком находится в множестве, где $\psi_i(y) > 0$, а шар

$$S_\varepsilon^- = \left\{y \mid \left\|y - y(\tau_{ij}^-, 0, y^p(t_{(i-1)j}^p))\right\| \le \varepsilon\right\}$$

$$\tau_{ij}^- = \tau_{ij}^p - \bar{f}_2^{-1}\tilde{\rho}$$

целиком находится в множестве, где $\psi_i(y) < 0$.

Это означает, что для всех достаточно малых $\tilde{\rho}$ и ε, удовлетворяющих условию (17), любое решение системы (2), удовлетворяющее неравенству (16), будет пересекать поверхность $\psi_i(y) = 0$ в некоторый момент времени $\tau_{ij} = \tau_{ij}(y_0)$. При этом будет выполняться и последнее из неравенств (15):

$$\varphi_i^k\left(y(\tau_{ij}, 0, y_0)\right) \geq \bar{\varphi}_1,$$

так как $y(\tau_{ij}, 0, y_0) \in S_\rho(y, t_{ij}^p)$.

Лемма доказана.

Займемся теперь доказательством теоремы 1, а именно: сначала покажем, что имеют место соотношения (11), (12).

Рассмотрим решения системы (2):

$$y\left(t, 0, y^p(t_{(i-1)j}^p)\right) \equiv y^p\left(t + t_{(i-1)j}^p\right),$$
$$t \in \left[0, \tau_{ij}^p\right].$$
$$y(t, 0, y_0), t[0, \tau_{ij}], y_0 \in S_\delta^\psi\left(y, t_{(i-1)j}^p\right),$$

и положим

$$x_s \equiv x_0 = y_0 - y^p(t_{ij}^p), \qquad (18)$$
$$x_f = y(\tau_{ij}, 0, y_0) - y\left(\tau_{ij}^p, 0, y^p(t_{(i-1)j}^p)\right)$$

где $y\left(\tau_{ij}^p, 0, y^p(t_{(i-1)j}^p)\right) = y^p\left(t_{ij}^p\right)$.

Из соотношений (2), (7), (15), (18) следует, что

$$x_f = y\left(\tau_{ij}^p, 0, y_0\right) - y^p\left(t_{ij}^p\right) +$$
$$y(\tau_{ij}, 0, y_0)) - y\left(\tau_{ij}^p, 0, y_0)\right) =$$
$$= x\left(\tau_{ij}^p, 0, x_0\right) + \int_{\tau_{ij}^p}^{\tau_{ij}} f_i(y(t, 0, y_0))dt =$$
$$= F_{(i-1)j}(\tau_{ij}^p, x_s, y_0). \qquad (19)$$
$$\gamma(\tau) = \gamma_{(i-1)j} = \tau_{ij} - \tau_{ij}^p,$$
$$\tilde{\chi}\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right) = \tilde{\chi}_{(i-1)j}\ (x_s, \gamma_{(i-1)j}) =$$
$$= \chi_{(i-1)j}\left(\tau_{ij}^p, x_s\right) + \int_{\tau_{ij}^p}^{\tau_{ij}} f_i(y(t, 0, y_0))dt.$$

При этом в силу своей структуры

$$\left\|\tilde{\chi}\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right)\right\|$$

является величиной не ниже второго порядка малости относительно $\|x_s\|$ и $|\gamma(\tau)|$.

Так как

$$\psi_i\left(y(\tau_{ij}, 0, y_0)\right) = 0,$$
$$\psi_i\left(y^p\left(t_{ij}^p\right)\right) = 0,$$

то отсюда и из соотношений (7), (18), (19) найдем, что

$$\psi_i\left(y(\tau_{ij}, 0, y_0)\right) = \psi_i\left(y^p\left(t_{ij}^p\right) + x_f\right) =$$
$$= \left(\frac{d\psi_i\left(y^p\left(t_{ij}^p\right)\right)}{dy}\right)^* x_f + \mu\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right) -$$
$$- g^*(\tau)\tilde{\chi}\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right)$$
$$= g^*(\tau)\left(\bar{A}(\tau)x_s + \bar{B}(\tau)\gamma(\tau)\right)$$
$$+ \mu\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right) = 0,$$
$$\mu\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right) = \psi_i\left(y^p\left(t_{ij}^p\right) + x_f\right)$$
$$- g^*(\tau)x_f - \tilde{\chi}\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right).$$

Отсюда

$$\gamma(\tau) = c^{-1}(\tau)k^*(\tau)x_s + \lambda(\tau, x_s), \qquad (20)$$

где в силу структуры функции $\mu\left(\tau, x_s, \gamma(\tau)\right)$ функция $\lambda(\tau, x_s)$ является величиной не ниже второго порядка малости относительно $\|x_s\|$. Подставляя выражение (20) в соотношение (19) и учитывая обозначения (7), получаем, что

$$x_f = L(\tau)x_s + l(\tau, x_s), \qquad (21)$$

где $\|l(\tau, x_s)\|$ равномерно по $\tau \in T_+$ является величиной не ниже второго порядка малости относительно $\|x_s\|$.

Если теперь заменить y_0 на $y\left(t_{(i-1)j}\right)$, $y(\tau_{ij}, 0, y_0)$ – на $y(t_{ij})$ (где $t_{ij} = t_{(i-1)j} + \tau_{ij}$), x_s – на $x_{(i-1)j}$, x_f – на x_{ij}, $x_{(i-1)j}$ – на $x(\tau)$, x_{ij} – на $x(\tau + 1)$, то из соотношений (21), (20) мы получим соотношения (11), (12) с соответствующими свойствами.

Покажем теперь, что программное решение $y^p(t)$ орбитально асимптотически устойчиво, для чего сначала установим, что нулевое решение $x(\tau) \equiv 0$ $(\tau \in T_+)$ системы (11) равномерно асимптотически устойчиво (при $\tau \to +\infty$).

Возьмем определенно-положительную квадратичную форму $W(\tau, x) = x^*\chi(\tau)x$, и построим квадратичную форму

$$V(\tau, x) = x^*\theta(\tau)x,$$

связанную с функцией W в силу уравнения (10) соотношением

$$V\left(\tau, x(\tau)\right) - V\left(\tau + 1, x(\tau + 1)\right) =$$
$$= x^*(\tau)\theta(\tau)x(\tau) -$$
$$- x^*(\tau)L^*(\tau)\theta(\tau + 1)L(\tau)x(\tau) =$$
$$= W\left(\tau, x(\tau)\right) \equiv x^*(\tau)\chi(\tau)x(\tau).$$

Тогда в силу свойств уравнения (10) квадратичная форма $V(\tau, x)$ также будет определенно-положительной, а именно будут выполняться соотношения

$$\theta(\tau) - L^*(\tau)\theta(\tau + 1)L(\tau) = \chi(\tau), \qquad (22)$$
$$\gamma_1 E_n \leq \chi(\tau) \leq \gamma_2 E_n,$$
$$\vartheta_1 E_n \leq \theta(\tau) \leq \vartheta_2 E_n, \ \tau \in T_+,$$

где γ_s, ϑ_s ($s = 1, 2$) – некоторые положительные числа. Вычислив разность значений функций V в моменты τ и $\tau + 1$, в силу уравнения (11) получим

$$V\big(\tau, x(\tau)\big) - V\big(\tau+1, x(\tau+1)\big) = \bar{W}\big(\tau, x(\tau)\big),$$
$$\bar{W}\big(\tau, x(\tau)\big) = W(\tau, x) - l^*(\tau, x)\theta(\tau+1)L(\tau)x$$
$$-x^*L^*(\tau)\theta(\tau+1)l(\tau, x)$$
$$-l^*(\tau, x)\theta(\tau+1). \qquad (23)$$

Из соотношений (22), (23) и с учетом свойств вектор-функции $l(\tau, x)$ следует, что для любого числа $\bar{\gamma}_1 \in (0, \gamma_1)$ найдется положительная величина $\bar{\rho}, \bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{\gamma}_1)$, для которой равномерно по $\tau \in T_+,\ x \in S_\rho(x)$, будут выполняться неравенства

$$\bar{\gamma}_1 \ \| x \|^2 \le \bar{W}(\tau, x) \le \bar{\gamma}_2 \ \| x \|^2$$
$$\bar{\gamma}_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \bar{\gamma}_1. \qquad (24)$$

Соотношения (22)–(24) позволяют установить, что любые решения системы (11)

$$\bar{\delta} = (\vartheta_1 \vartheta_2^{-1} \bar{\rho})^{1/2} \qquad (25)$$

с начальными условиями

$$\tau_0 \in T_+, \qquad x(\tau_0) \in S_{\bar{\delta}}(x)$$

при всех $\tau \in [\tau_0, +\infty)$ не покидают шара $S_{\bar{\rho}}(x)$, удовлетворяя предельному условию

$$\lim_{\tau \to \infty} x(\tau) = 0.$$

Более того, удается показать, что нулевое решение системы (11) является равномерно асимптотически устойчивым (при $\tau \to \infty$). Сделать это можно с помощью известных методик, поэтому здесь делать этого мы не будем.

Используя соотношения (12), (15) легко установить, что имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\tau \to +\infty} \max_{t \in [0, \tau_{ij})} \| x(t, 0, x(\tau)) \| = 0.$$

Как нетрудно проверить, это влечет за собой орбитальную асимптотическую устойчивость программного решения $y^p(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда программное решение $y^p(t)$ является T-периодическим (T – некоторое положительное число), причем, не умаляя общности, для простоты будем считать, что

$$t_{0j}^p = t_0 + jT,$$
$$y^p(t_{0j}^p) = y^p(t_0). \qquad (26)$$

Это влечет за собой выполнение соотношений

$$t_{ij}^p = t_i + jT,$$
$$y^p(t_{ij}^p) = y^p(t_i). \qquad (27)$$

$$T = \sum_{i=1}^{m} t_i, \qquad t_i = t_{i0}^p,$$
$$i = 1, \dots, m, \qquad j = 0, 1, \dots$$

и m-периодичность по τ величин $L(\tau)$, $C(\tau)$, $k(\tau)$, $l(\tau, x)$, $\lambda(\tau, x)$ в соотношениях (10)–(12).

Покажем, что имеют место соотношения (13), (14). Для этого изучим поведение решений, $\eta(\tau), x(\tau)$ систем (10), (11) при $\tau = \tau(j)$. Будем считать, что в выражении $\tau = i - 1 + jm$ (см. (7)) i фиксировано, а j изменяется от j_0 до $+\infty$, где $j_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Положим

$$\zeta^i(j) = \eta(\tau(j), z^i(j)) = x(\tau(j)),$$
$$N(p, q) = \begin{cases} E_n & ,\text{при } \ p < q \\ \prod_{r=0}^{p-q} L(p-r), & \text{при } \ p \ge q \end{cases} \qquad (28)$$
$$N_1^i = N(i-2, 0), N_2^i = N(m-1, i-1),$$
$$N^i = N_1^i N_2^i = N(m+i-2, i-1),$$
$$N_0 = N_2^i N_1^i = N(m-1, 0),$$
$$N^i\left(z^i(j)\right) = \sum_{r=i-1}^{m+i-2} N(m+i-2, r+1)$$
$$l\big(r + jm, x(r + jm)\big).$$

Тогда величины $\zeta^i(j)$, $z^i(j)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\zeta^i(j+1) = N^i \zeta^i(j), \qquad (29)$$
$$z^i(j+1) = N^i z^i(j) + n^i\left(z^i(j)\right). \qquad (30)$$

Прежде чем изучать поведение величин $\zeta^i(j), z^i(j)$, сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть задана система

$$z(j+1) = Nz(j) + n(z^i(j)), \qquad (31)$$

у которой матрица N и функция $n(z)$ удовлетворяют условиям

$$\|N^s\| \le ab^s, \qquad S \ge 0,$$
$$a \in (1, +\infty), \qquad b \in (0, 1),$$
$$\| n(z) \| \le c\|z\|^2, \ \ c \in (0, +\infty), \qquad (32)$$

где a, b, c – некоторые числа.

Тогда существуют числа

$$\tilde{a} \in (1, +\infty), \breve{\delta} \in (0, +\infty)$$

такие, что любые решения системы (31), начинающиеся при $j = j_0$ в множестве $S_{\breve{\delta}}(z)$, при $j > j_0$ будут удовлетворять оценке

$$\| z(j) \| \le \tilde{a} b^{j - j_0} \ \| z(j_0) \|. \qquad (33)$$

При этом в качестве $\tilde{a}, \breve{\delta}$, можно брать любые величины, удовлетворяющие условиям

$$\breve{\delta} \in (0, \delta_0), \ \delta_0 = b(1-b)(4a^2c)^{-1},$$
$$\tilde{a} \in (a_1, a_2),$$
$$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 = b(1-b)(4a^2c)^{-1}\Big\{1 \pm \big[1 -$$
$$-4a^2c\breve{\delta}\big(b(1-b)\big)^{-1}\big]^{1/2}\Big\} \qquad (34)$$

Доказательство. При $j > j_0$ решение системы (31) можно записать так:

$$z(j) = N^{(j-j_0)}z(j_0) + \sum_{r=0}^{j-j_0-1} N^{(j-j_0-1-r)}n(z\,(j_0+r)),$$

тогда из условий (32) следует, что

$$\|z(j)\| \le ab^{(j-j_0)}\|z(j_0)\| + \sum_{r=0}^{j-j_0-1} ab^{(j-j_0-1-r)}c\|z(j_0)\|^2.$$

Подставляя сюда оценки (33) в предположении, что они имеют место, получим

$$\|z(j)\| \le ab^{(j-j_0)}\|z(j_0)\| + \sum_{r=0}^{j-j_0-1} ab^{(j-j_0-1-r)}c\left(\tilde{a}b^{(r)}\|z(j_0)\|\right)^2 =$$

$$= ab^{(j-j_0)}\|z(j_0)\|[1 + c\|z(j_0)\|b^{-1}\,(1-b)\,(1-b^{(j-j_0)})].$$

Отсюда ясно, что для выполнения оценок (33) достаточно, чтобы параметры $\tilde{a}, \check{\delta}$ удовлетворяли неравенству

$$a[1 + c(b(1-b))^{-1}\,\check{\delta}\,\tilde{a}^2] \le \tilde{a}. \qquad (35)$$

Анализируя корни полинома относительно $\tilde{a}$:

$$f(\tilde{a}) = ac\check{\delta}[b(1-b)]^{-1}\tilde{a}^2 - \tilde{a} + a,$$

убеждаемся, что величины $\tilde{a},\ \check{\delta}$, удовлетворяющие условиям (34), удовлетворяют и неравенству (35). Это и завершает доказательство леммы 2.

Вернемся к системам (29), (30). Так как система (10) по условию теоремы 1 является равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$), то $\eta(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Следовательно, $\zeta\, i(j) \to 0$ при $j \to +\infty$ (см. (28)). Отсюда вытекает, что система (29) является равномерно асимптотически устойчивой (при $j \to +\infty$) и имеет постоянные коэффициенты. В силу леммы 2 это означает, что $N^i \in Z_i$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$.

Рассмотрим систему (30). Из соотношений (28) следует, что

$$\left(N^i\right)^s = N_1^i N_0^{(s-1)} N_2^i, \qquad s \ge 1,$$

а функции $n^i(z^i)$ являются величинами не ниже второго порядка малости относительно $\|z^i\|$, следовательно, матрицы N^i и функции $n^i(z^i)$ удовлетворяют оценкам

$$\left\|\left(N^i\right)^s\right\| \le a^i b^{(s)} \le ab^{(s)},$$
$$s \ge 0, b \in (0,1),$$
$$a = \max\{a^1, \dots, a^m\} \in (1, +\infty),$$
$$\left\|n^i(z^i)\right\| \le c^i\left\|z^i\right\|^2 \le c\left\|z^i\right\|^2, \qquad (36)$$
$$c = \max\{c^1, \dots, c^m\} \in (0, +\infty),$$

Это означает, что система (30) удовлетворяет всем требованиям леммы 2.

Следовательно, существуют положительные числа $\tilde{a},\ \breve{\delta}$, такие, что решения системы (30), начинающиеся при $j = j_0$ в множестве $S_{\overline{\delta}}(z^i)$, при $j > j_0$ будут удовлетворять оценке

$$\left\|z^i(j)\right\| \le \tilde{a}\; b^{(j-j_0)}\left\|z^i(j_0)\right\|. \qquad (37)$$

При этом величины $\tilde{a},\ \breve{\delta}$ можно определить в соответствии с соотношениями (34), в которых a, b, c взяты из неравенств (36).

Выполнение для системы (30) неравенств (37) является достаточным для выполнения неравенств (13), (14) для системы (11), (12), а это, как уже отмечалось, влечет за собой устойчивость по Ляпунову программного решения $y^p(t)$ системы (1). Доказывается это легко (поэтому мы этого делать не будем).

Замечание 1. Ранее мы считали, что функции $\psi_{ig}(y), f_i(y), (i = 1, \dots, m)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y. Требование это можно ослабить: достаточно считать, что они непрерывно дифференцируемы по y, а функции $l(\tau, x), \lambda(\tau, x)$ из соотношений (11), (12) удовлетворяют оценкам.

Замечание 2. Ранее для удобства изложения был рассмотрен лишь $y^p(t)$ системы (1), своеобразием которого был циклический переход от одного значения управления $w^p(t)$ к другому. Все полученные ранее результаты остаются в силе и тогда, когда такая цикличность нарушена. Нужно лишь, чтобы время, в течение которого управление сохраняет свое значение, было ограниченным, а именно: чтобы моменты t_s (s = 0, 1, . . .) перехода от одного значения управления к другому удовлетворяли требованиям типа (5):

Замечание 3. Ранее мы считали, что система (1) автономна, т.е. функции $f_i, \psi_{ig}(y), \varphi_{ig}^k(y)$ явно не зависят от времени t. Требование это не носит принципиального характера, ибо, как известно, всегда неавтономную систему можно преобразовать в автономную путем увеличения размерности на единицу.

1.4. Решение задачи орбитальной стабилизации

Опишем способ решения задачи орбитальной стабилизации, сводящийся для рассматриваемой далее ситуации к построению линейного управления вида

$$u(\tau) = M^*(\tau)x(\tau))\,, \qquad (38)$$

стабилизирующего систему

$$x(\tau+1) = \bar{A}(\tau)x(\tau) + \bar{B}(\tau)u(\tau)$$

и удовлетворяющего некоторым дополнительным требованиям (обозначение $\bar{A}, \bar{B}$ см. в (7)). Для простоты изложения будем считать, что программное решение $y^p(t)$ и программное управление $u^p(t)$ имеют ту же структуру, являются *T*-периодическими функциями, удовлетворяющими соотношениям (26), (27) и построены, например, опираясь на некоторые функции:

$$\psi_{ig}(y) = \psi_{ig}^p(y), \varphi_{ig}^k(y) = \varphi_{ig}^{kp}(y),$$

в частности, на функции

$$\psi_i(y) = \psi_i^p(y), \varphi_i^k(y) = \varphi_i^{kp}(y),$$

(см. обозначения (6)), для которых система (10) равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$) не оказалась.

Также для простоты будем считать, что функции $\psi_i^p(y)$ линейны по *y*, вследствие чего они будут иметь вид

$$\psi_i^p(y) = g^{p*}(i-1)\big(y - y^p(t_i)\big), \quad i = 1, \dots, m, \tag{39}$$

где $g^p(i-1)$ – некоторые постоянные векторы. Прежде чем сформулировать результаты, обозначим через $v(\tau)$ *m*-периодичную вектор-функцию размерностью *n* и положим

$$\bar{A}_v = \bar{A}(\tau) + \bar{B}(\tau)v^*(\tau),$$
$$S^+(\bar{A}_v, \bar{B}) \equiv S(\tau) = \big(s_1(\tau), \dots, s_n(\tau)\big),$$
$$S(\tau) = \bar{B}(\tau-1),$$
$$s_l(\tau) = \prod_{k=1}^{l-1} \bar{A}_v(\tau-k)\bar{B}(\tau-l), l \geq 2,$$
$$p(\tau) = \big(p_1(\tau), \dots, p_n(\tau)\big)^* = -S^{-1}(\tau)s_{n+1}(\tau),$$
$$\Sigma^+(\bar{A}_v, \bar{B}) \equiv \Sigma(\tau) = \big(\sigma_1(\tau), \dots, \sigma_n(\tau)\big),$$
$$\sigma_l(\tau) = E_n^{n+1-l} + I_n^l p(\tau+1), l = 1, \dots, n,$$
$$I_n = (0, E_n^1, \dots, E_n^{n-1}),$$
$$q^*(\tau) = \big(q_1(\tau), \dots, q_n(\tau)\big) = \big(p_1(\tau+1), \dots, p_n(\tau+n)\big),$$
$$r^*(\tau) = q^*(\tau) + v^*(\tau)S(\tau)\Sigma(\tau), \tag{40}$$
$$\Lambda^{n-1} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})^*,$$
$$d(\Lambda^{n-1}) = (d_1, \dots, d_{n-1})^*,$$
$$f(\lambda, \Lambda^{n-1}) = \lambda^{n-1} + \sum_{l=0}^{n-2} d_{n-1-l}\lambda^{(n-2-l)},$$
$$h^* = (d^*(\Lambda^{n-1}, 1)),$$
$$g^{s*}(\tau) = h^*[S(\tau+1)\Sigma(\tau+1)]^{-1}.$$

Здесь E_n – единичная матрица *n*-го порядка, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ – вещественные или попарно комплексно-сопряженные числа; $f(\lambda, \Lambda^{n-1})$ – многочлен, корнями которого являются числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, матрицы $\bar{A}(\tau)$, $\bar{B}(\tau)$, $\bar{A}_v$, $S^+(\bar{A}_v, \bar{B})$, $\Sigma^+(\bar{A}_v, \bar{B})$, $q^s(\tau)$ являются *m*-периодическими функциями аргумента τ, что есть следствие *T*-периодичности вектор-функции $y^p(t)$ и *m*-периодичности вектор-функции $v(\tau)$.

Из структуры определенных в соотношениях (40) величин $S^+(\bar{A}_v, \bar{B})$, $\Sigma^+(\bar{A}_v, \bar{B})$, $g^s(\tau)$, следует, что для того, чтобы вектор-функция $g^s(\tau)$ была определена, должно выполняться условие

$$S^+(\bar{A}_v, \bar{B}) \in Z(\mathrm{T}). \tag{41}$$

Легко убедиться, что столбцы матрицы $S^+(\bar{A}_v, \bar{B})$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы $S^+(\bar{A}_v, \bar{B})$, а именно: имеет место представление

$$S^+(\bar{A}_v, \bar{B}) = S^+(\bar{A}_v, \bar{B})\, C,$$

где *C* – верхняя треугольная матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы, т.е. $C \in Z(\mathrm{T})$. Это означает, что для всех $v(\tau)$ условие (41) эквивалентно условию

$$S^+(\bar{A}_v, \bar{B}) \in Z(T). \tag{42}$$

Таким образом, чтобы вектор-функция $g^s(\tau)$ была определена, необходимо и достаточно выполнения условия (42).

Теорема 2. Пусть функции

$$f_i(y), \varphi_i^k(y), (k = 1, \dots k_i, i = 1, \dots, m)$$

удовлетворяют ограничениям, наложенным на эти величины в теореме 1, а матрицы $\bar{A}(\tau)$, $\bar{B}(\tau)$ – условию (42). Пусть, кроме того, существует постоянный вектор Λ^{n-1} и *m*-периодичная функция $v(\tau)$, удовлетворяющие условиям

$$|\lambda_l| < 1, \ l = 1, \dots, n-1, \tag{43}$$

$$\psi_i^s(y^p(t)) = g^{s*}(i-1)\big(y^p(t) - y^p(t_i)\big) < 0 \tag{44}$$
$$t \in [t_{i-1}, t_i), i = 1, \dots, m.$$

Тогда задача орбитальной стабилизации разрешима, а именно: если вектор-функция $g^s(i-1)$ удовлетворяет неравенствам (43), (44), то вектор-функция $y^p(t)$ является орбитально асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову *T*-периодическим решением системы (1), у которой поверхности переключения $\psi_i(y)$ задаются по формуле

$$\psi_i(y) = g^{s*}(i-1)\big(y - y^p(t_i)\big), \quad i = 1, \dots, m, \tag{45}$$

где коэффициенты $g^s(i-1)$ определены по формулам (40).

Доказательство. Для разрешимости задачи орбитальной стабилизации в классе линейных по y функций $\psi_i(y)$ нам достаточно показать существование m-периодичной вектор-функции $g(i-1)$, такой, что, во-первых, вектор-функция $y^p(t)$ является решением системы (1) не только с поверхностями переключения:

$$\psi_i(y) = g^{p*}(i-1)\big(y - y^p(t_i)\big),$$

но и с поверхностями переключения (39):

$$\psi_i(y) = g^*(i-1)\big(y - y^p(t_i)\big),$$

(для этого не только коэффициенты $g^p(i-1)$, но и коэффициенты $g(i-1)$ должны удовлетворять соотношениям (38)), и, во-вторых, система (10), построенная для выбранных функций (39), является равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$). Тогда будут выполнены все требования теоремы 1, и, следовательно, вектор-функция $y^p(t)$ будет орбитально асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову T-периодическим решением системы (1) с построенными поверхностями переключения вида (39).

Покажем сначала, что вектор-функция $y^p(t)$ является решением системы (1) с поверхностями переключения (45). Из условий теоремы 2 следует, что $\varphi_i^k\big(y^p(t_i)\big) > 0$, а векторы $g^s(i-1)$ удовлетворяют неравенствам (44). Из структуры величин $g^s(i-1), S(i), \Sigma(i)$ (см. (40)) вытекает, что

$$g^{s*}(i-1)\bar{B}(i-1) = h^* E_n^{|n|} = 1.$$

Следовательно, выполняются все условия (38), а это и означает, что вектор-функция $y^p(t)$ является решением системы (1) с поверхностями переключения (45), (44), (40).

Покажем теперь, что система (10), построенная для поверхностей переключения (45), (44), (43), является равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$).

Перепишем уравнения (10)–(12) в виде, подчеркивающем то обстоятельство, что функции $\psi_i(y)$, точнее говоря, коэффициенты $g(i-1)$ этих функций, подлежат выбору. С этой целью, используя соотношения (7), (10)–(12), (19), (20) и сопутствующий текст, установим, что величины $\eta(\tau), x(\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$\eta(\tau+1) = \bar{A}(\tau)\eta(\tau) + \bar{B}(\tau)u(\tau), \quad (46)$$

$$u(\tau) = c^{-1}(\tau)k^*(\tau)\eta(\tau),$$
$$c(\tau) = -g^*(\tau)(\tau),$$
$$k^*(\tau) = g^*(\tau)\bar{A}(\tau), \quad (47)$$
$$x(+1) = \bar{A}(\tau)x(\tau) + \bar{B}(\tau)u(\tau) + \tilde{\chi}\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big),$$
$$\gamma(\tau) \equiv u(\tau) = c^{-1}(\tau)[k^*(\tau)x(\tau) + \mu\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big),$$

где функции $\tilde{\chi}\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)$, $\mu\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)$ являются величинами не ниже второго порядка малости относительно x, u.

Рассмотрим систему (46), (47) и перепишем ее в виде

$$\eta(\tau+1) = [\bar{A}(\tau) + \bar{B}(\tau)v^*(\tau)]\eta(\tau) + \bar{B}(\tau)u(\tau), \quad (48)$$

$$u(\tau)c^{-1}(\tau)g^*(\tau)$$
$$[\bar{A}_v(\tau) \quad - \bar{B}(\tau)v^*(\tau)]\eta(\tau), \quad (49)$$

причем будем считать, что $g(\tau) = g^*(\tau)$, благодаря чему

$$c(\tau) = -1. \quad (50)$$

Положим

$$\eta(\tau) = S(\tau)\Sigma(\tau)\zeta(\tau).$$

Тогда получим, что система (48)–(49) преобразуется в систему

$$\begin{aligned}\zeta(\tau+1) &= \Big\{\Big[I_n - E_n^{[n]}q^*(\tau)\Big] - E_n^{[n]}v^*(\tau)S(\tau)\Sigma(\tau)\Big\}\zeta(\tau) + E_n^{[n]}u(\tau)\\ &= \Big[I_n - E_n^{[n]}r^*(\tau)\Big] - E_n^{[n]}\zeta(\tau) + E_n^{[n]}u(\tau),\\ u(\tau) &= -h^*\Big\{\Big[I_n - E_n^{[n]}q^*(\tau)\Big] - E_n^{[n]}v^*(\tau)S(\tau)\Sigma(\tau)\Big\}\zeta(\tau)\\ &= -h^*\Big[I_n - E_n^{[n]}r^*(\tau)\Big]\zeta(\tau).\end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношения (40), (50).

Система (10), совпадающая с системой (46), замкнутой управлением (47), после указанного преобразования переменных перейдет в систему

$$\zeta(\tau+1) = = \Big[I_n - E_n^{[n]}(0, -d^*(\Lambda^{n-1})\Big]\zeta(\tau). \quad (51)$$

Характеристический многочлен этой системы совпадает с многочленом

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda f(\lambda, \Lambda^{n-1}).$$

В силу условий (43) теоремы 2 все корни этого многочлена по модулю меньше 1.

Следовательно, система (51), а тогда и система (10), будет равномерно асимптотически устойчивой (при $\tau \to +\infty$), причем, последняя – с периодическими коэффициентами.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Это и доказывает теорему 2.

Заключение

Ранее мы рассмотрели методику решения задачи орбитальной стабилизации для специального класса программных решений $y^p(t)$ системы (1) в ситуации, когда в процессе решения выбору подлежат все поверхности переключения. Описанная методика легко переносится и на случай программных решений системы (1) общего вида.

Для систем с кусочно-постоянными управлениями изложен общетеоретический подход к задаче орбитальной стабилизации программных движений.

В [7] мы рассматривали системы с транзисторными ключами. Очевидно, что и эти последние можно рассматривать как системы переменной структуры, относящиеся к классу рассматриваемых в настоящей работе систем.

Таким образом, работу [7] можно рассматривать как нетривиальный пример применения изложенного в настоящей работе метода исследования таких систем.

Список источников

1. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
2. *Емельянов С.В.* Системы переменной структуры – ключ к открытию новых типов обратной связи // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2013. № 8. С. 5–24.
3. *Емельянов С.В., Уткин В.И.* Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах // Кибернетика и Теория Регулирования. Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 2. С. 299–301.
4. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой, состояние проблемы, перспективы // Автоматика и Телемеханика. 1983. 9. С. 5–25.
5. *Емельянов С.В., Таран В.А*. К вопросу использования инерционных звеньев для построения одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой. I // Автоматика и Телемеханика. 1963. Т. 24, вып. 1. С. 33–46.
6. *Смирнов Е.Я.* О стабилизации программных движений систем переменной структуры // Вестник ЛГУ. Сер. математика, механика, астрономия. 1990. Вып. 1. С. 40–43.
7. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Системы с транзисторными ключами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2(49). С. 14–18.
8. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings. 1863. P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
9. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164
10. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics, 7(8). 677.
11. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Study of Control Systems with Transistor Keys. // (2022) AIP Conference Proceedings. 2425. 080003.
12. *Kadry S., Alferov G., Korolev V., Shymanchuk D.* Mathematical Models of Control Processes and Stability in Problems of Mechanics // (2022) AIP Conference Proceedings. 2425, 080004.
13. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Proceedings. 2293, 060004.
14. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Proceedings. 2293, 060005.
15. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* On estimation for numbersof periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Procedings. 2293, 060003.
16. *Alferov G., Ivanov G.,Sharlay A., Fedorov V.* Estimation for number of almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // (2019) AIP Conference Procedings. 2116, 080004.
17. *Kadry S., Alferov G., Kondratyuk A., Kurochkin V., Zhao S.* Modeling the motion of a space manipulation robot using position control // AIP Conference Procedings. 2116, 080005.
18. *Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Efimova P.* Remote control of space robots change-adaptive in its external environment // International journal of online and biomedical engineerings. 2019. 15(7). S. 84–98.

References

1. *Emel'yanov S.V.* Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s peremennoj strukturoj. M.: Nauka, 1967.
2. *Emel'yanov S.V.* Sistemy peremennoj struktury – klyuch k otkrytiyu novyh tipov obratnoj svyazi // Nelinejnaya dinamika i upravlenie. M.: Fizmatlit, 2013. № 8. S. 5–24.
3. *Emel'yanov S.V., Utkin V.I.* Primenenie sistem avtomaticheskogo regulirovaniya s peremennoj strukturoj dlya upravleniya ob"ektami, parametry kotoryh izmenyayutsya v shirokih predelah // Kibernetika i Teoriya Regulirovaniya. Dokl. AN SSSR, 1963. T 152, № 2. S. 299–301.
4. *Utkin V.I.* Sistemy s peremennoj strukturoj, sostoyanie problemy, perspektivy // Avtomatika i Telemekhanika. 1983. 9. S. 5–25.
5. *Emel'yanov S.V., Taran V.A.* K voprosu ispol-'zovaniya inercionnyh zven'ev dlya postroeniya odnogo klassa sistem avtomaticheskogo regulirovaniya s peremennoj strukturoj. I // Avtomatika i Telemekhanika, 1963 T. 24, vyp. 1. S. 33–46.
6. *Smirnov E.YA.* O stabilizacii programmnyh dvizhenij sistem peremennoj struktury // Vestnik LGU. Ser. mathematika, mekhanika, astronomiya. 1990. Vyp. 1. S. 40–43.
7. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Sistemy s tranzistornymi klyuchami // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. № 2(49). S. 14–18.
8. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
9. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
10. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. Mathematics. (2019). 7(8). 677.
11. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Study of Control Systems with Transistor Keys // (2022) AIP Conference Proceedings. 2425, 080003.
12. *Kadry S., Alferov G., Korolev V., Shymanchuk D.* Mathematical Models of Control Processes and Stability in Problems of Mechanics // (2022) AIP Conference Proceedings. 2425. 080004.
13. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Proceedings. 2293. 060004.
14. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Proceedings. 2293. 060005.
15. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* On estimation for numbersof periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // (2020) AIP Conference Procedings. 2293. 060003.
16. *Alferov G., Ivanov G.,Sharlay A., Fedorov V.* Estimation for number of almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations // (2019) AIP Conference Procedings. 2116. 080004.
17. *Kadry S., Alferov G., Kondratyuk A., Kurochkin V., Zhao S.* Modeling the motion of a space manipulation robot using position control // AIP Conference Procedings. 2116. 080005.
18. *Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Efimova P.* Remote control of space robots change-adaptive in its external environment // International journal of online and biomedical engineerings. 2019. 15(7). S. 84–98.

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 7342.

Information about the authors:

G. G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 116900;

G. V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 2873;

V. S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 7342.