Научная статья
УДК 531.391
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53

Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Геннадий Григорьевич Иванов[1], Геннадий Викторович Алфёров[2], Владимир Степанович Королёв[3]
[1, 2, 3] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru l, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Аннотация. В работе показано, что фундаментальное нормированное в нуле решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений может быть представлено в виде формального ряда произведений экспоненциальных матриц. Если система удовлетворяет условиям теоремы Перрона о триангуляции системы уравнений, то решение такой системы может быть представлено в виде конечного произведения экспоненциальных матриц. Кроме того, выведена формула для дифференцирования экспоненциальной матричной функции и рассмотрена задача построения преобразования, приводящего систему однородных дифференциальных уравнений к треугольному виду.

Ключевые слова: *линейные однородные системы дифференциальных уравнений; экспоненциальные матрицы; метод ортогонализации Шмидта*

Для цитирования: *Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С.* Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 47–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53.

Статья поступила в редакцию 10.11.2022; одобрена после рецензирования 02.02.2023; принята к публикации 15.03.2023.

Research article

The Differential Equations Linear Homogeneous System Solutions Investigation

Gennadiy G. Ivanov[1], Gennadiy V. Alferov[2], Vladimir S. Korolev[3]
[1, 2, 3]St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia
[1]guennadi.ivanov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2808-7913
[2]g.alferov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-3989-7850
[3]v.korolev@spbu.ru l, https://orcid.org/0000-0001-5812-1794

Abstract. The paper shows that the fundamental zero-normalized solution of a linear homogeneous differential equations system can be represented as an exponential matrices products formal series. If the system satisfies the equations system triangulation Perron theorem conditions, then the system solution can be represented as an exponential matrices finite product. In addition, an exponential matrix function differentiating formula is derived. Also, the transformation constructing problem is considered. Such, a homogeneous differential equations system allows to reduce to a triangular form.

Keywords: *linear homogeneous differential equations; exponential matrices; Schmidt orthogonalization method*

For citation: *Ivanov G. G., Alferov G. V., Korolev V. S.* The Differential Equations Linear Homogeneous System Solutions Investigation. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;1(60):47-53. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53.

The article was submitted 10.11.2022; approved after reviewing 02.02.2023; accepted for publication 15.03.2023.

Введение

Для построения математических моделей различных динамических систем следует выделить совокупность объектов исследования и определить условия взаимодействия внутри системы с учетом влияния дополнительных внешних сил. Основные законы динамики со времен Ньютона и развитие аналитических методов в работах Эйлера, Лагранжа и Гамильтона приводят к формированию систем дифференциальных уравнений, которые требуется исследовать, получить возможные решения и определить особые свойства.

Дальнейшее развитие аналитической механики связано с трудами многих выдающихся ученых своего времени при исследовании новых классов задач, в том числе проблем механики управляемого движения, и разработками новых методов [1–11] представления решений систем. Современная наука пытается изучать единый комплекс всего существующего, который проявляется столь многообразно в окружающем нас мире [12–21].

1.1. Сравнение методов решения

Многие проблемы при исследовании динамических процессов приводят к сложным системам дифференциальных уравнений. В задачах классической механики скобки Пуассона или скобки Ли часто используются для решения таких уравнений. Это операторы для векторных полей, которые играют центральную роль в определении эволюции динамической системы во времени.

Для классических непрерывных интегрируемых моделей скобка Пуассона, данная в матричном виде, допускает простую геометрическую интерпретацию в терминах текущей алгебры. При такой интерпретации фазовые пространства модели являются интегральными многообразиями стандартной симплектической структуры. В случае дискретных интегрируемых систем можно построить интегральные многообразия для рациональных матриц, связанных с классическими алгебрами Ли.

Использование уравнений Лагранжа или канонических уравнений Гамильтона при описании движения механических систем позволяет после преобразований записать их в нормализованном виде. Для их приближенного решения мы можем выделить основную часть, а затем на основе последовательных приближений получить решение в виде отрезков степенных рядов по малому параметру с требуемой точностью.

В этой статье предлагается другой подход к получению решения в виде конечного произведения экспоненциальных матриц, если система удовлетворяет условиям теоремы Перрона о триангуляции системы уравнений.

Рассмотрим систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = A(t)\, x, \qquad (1)$$

где A есть $n \times n$ матрица, интегрируемая на $[0, \infty)$. Положим

$$X(t) = \int_0^t A(t_1)\mathrm{d}t_1.$$

Через $[A, X](t)$ обозначим скобку Ли матриц A и X, т.е.

$$[A, X]\,(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t).$$

Далее положим

$$[A, X]_k\,(t) = [[A, X]_{k-1}, X](t),$$

продолжая процесс необходимое количество шагов.

1.2. Основные утверждения и выводы

Теорема. Если A – матрица, интегрируемая на $[0, \infty)$, то фундаментальное нормированное в нуле решение системы (1) может быть представлено в виде формального ряда произведений экспоненциальных матриц

$$\Omega(\mathrm{t}) = \exp\{\mathrm{X(t)}\} \prod_{i=1}^{\infty} \exp\{\int_0^t A_i(\mathrm{t_1})\, \mathrm{dt_1}\},$$

$$A_i\,(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} [A_{i-1}, X_{i-1}]_k(t),$$

$$X_{i-1}(\mathrm{t}) = \int_0^t A_{i-1}(t_1)\,\mathrm{d}t_1, \quad A_0(t) = A(t),$$

$$X_0(t) = X(t),\ i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Если система удовлетворяет условиям теоремы Перрона о триангуляции системы уравнений [1], то решение такой системы можно представить в виде произведения не более m экспоненциальных матриц, где m – целая часть числа (n+3)/2. И, наконец, если

$$H(t) = \exp\{\int_0^t A(t_l)\, \mathrm{d}t_l\},$$

то производная такой матрицы определяется соотношениями

$$\dot{H} = AH - HB$$

или

$$\dot{H} = HA - QH,$$

где

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} [A,X]_k\,(t)\,,$$

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)!} [A,X]_k\,(t).$$

Доказательство. Согласно Коши (см, например, [1]) общее нормированное в нуле решение системы (1) можно записать в виде:

$$\Omega(\mathrm{t}) \;=\; \sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty} K_i\,(\mathrm{t}), \qquad (2)$$

где

$$K_i(\mathrm{t}) =$$
$$= \int_0^t A(t_1) \int_0^{t_1} A(t_2) \ldots \int_0^{t_{i-1}} A(t_i)\mathrm{d}t_i \ldots\, \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1$$

и $K_0(\mathrm{t}) \equiv E$ – единичная матрица, которая дает представление общего нормированного решения системы. Если система (1) окажется треугольной, то легко проверить, что на m-м шаге мы получим систему, матрица которой будет коммутировать со своим интегралом, то есть мы приходим к случаю Лаппо-Данилевского [6].

Откуда следует теорема, что возможно построить экспоненциальную матрицу, приводящую исходную систему к треугольной форме. Положим

$$K_1(\mathrm{t}) = \int_0^t A(t_1)dt_1 = X(t),$$

$$Y_{k+1}(t) = \frac{k}{(k+1)!} \int_0^t [A,X]_k\,(t_1)dt_1,$$

$$Y_{k+1}(t)^{\circ} Y_{k+1}(t) = \frac{k\,l}{(k+1)!\,(l+1)!} \times$$
$$\times \int_0^t [A,X]_k\,(t_1) \int_0^{t_1} [A,X]_l\,(t_2)dt_2 dt_1,$$
$$k,l = 1,2,\ldots,\infty.$$

Используя введенные обозначения, слагаемое $K_1(\mathrm{t})$ из правой части (2) можно записать в виде:

$$\mathrm{K_i(t)} = \frac{\mathrm{X^{i\text{-}1}(t)}}{(\mathrm{i}\text{-}1)!} + \frac{\mathrm{X^{i\text{-}2}(t)}}{(\mathrm{i}\text{-}2)!}\mathrm{Y_2(t)} + \frac{\mathrm{X^{i\text{-}3}(t)}}{(\mathrm{i}\text{-}3)!}\mathrm{Y_3(t)} + \cdots +$$
$$\sum_{\mathrm{i_1+i_2+\cdots+i_s=k}} \mathrm{Y_{i_1}\,(t)^{\circ}Y_{i_2}(t)^{\circ} \ldots {}^{\circ}Y_{i_s}(t)} +$$
$$+ \sum_{\mathrm{i_1+i_2+\cdots+i_m=l}} \mathrm{Y_{i_1}\,(t)^{\circ}Y_{i_2}(t)^{\circ} \ldots {}^{\circ}Y_{i_m}(t)}, \qquad (3)$$
$$1 \le s \le \frac{1}{2}k, 1 \le m \le \frac{1}{2}i,$$
$$1 \le l \le m, 2 \le k \le i, i = 1,2,\ldots$$

Легко проверить справедливость этого утверждения, отметив, что общие члены $K_i(\mathrm{t})$, введенные в формулу Коши (2), удовлетворяют соотношению

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = A(t)K_{i-1}(t),\ i = 1,2,\ldots,\infty\,. \quad (4)$$

Следовательно, чтобы убедиться в справедливости выражения (3), достаточно проверить, что для него выполняется соотношение (4). Чтобы объяснить, как получается соотношение (3), покажем, как преобразуются первые члены ряда (2).

Применяя к $K_2(t)$ метод почленного интегрирования, получим:

$$K_2(t) = X_2(t) - \int_0^t \int_0^t A(t_2)dt_2 A(t_1)dt_1.$$

Подставляя в это выражение

$$\frac{1}{2}X_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2 +$$
$$+ \int_0^{t_1} A(t_2)dt_2 A(t_1)\Big)\, dt_1,$$

получим

$$K_2(t) = \frac{1}{2}X_2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t [A,X](t_1)\,dt_1 =$$
$$= \frac{1}{2}X_2(t) + \frac{1}{2}Y_2(t).$$

Используя это соотношение и повторяя приведенные выше рассуждения, для $K_3(t)$ найдем:

$$K_3(t) = \int_0^t A(t_1)K_2(t_1)\,dt_1. \qquad (5)$$

Остальные члены ряда, стоящего в правой части (2), получаются аналогичным образом.

Заменяя в (2) K_ι *(t)* соответствующим выражением из (3), получим:

$$\Omega(t) = \mathrm{e}^{X(t)}\left(E + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_s=k} Y_{i_1} \circ \ldots Y_{i_s}(t)\right)$$
$$i_1 \ge 2,\ 1 \le s \le \tfrac{1}{2}k. \qquad (6)$$

Полагаем $Z(t) = \sum_{i=2}^{\infty} Y_i(t)$.
Тогда (6) можно записать в виде:

$$\Omega(t) = \mathrm{e}^{X(t)} \sum_{i=0}^{\infty} Z_i\,(t). \qquad (7)$$

Здесь

$$Z_0 = E, \qquad \dots\ Z_l = Z \circ Z_{l-1}, \dots\ l \geq 1.$$

Обозначим через $\Omega_1(t)$ сумму ряда. Тогда общее нормированное в нуле решение системы (1) можно записать в виде:

$$\Omega(t) = \exp\left\{\int_0^t A(t_1)\,dt_1\right\}\Omega_1(t). \qquad (8)$$

Из (2) следует, что $\Omega_1(t)$ есть общее нормированное в нуле решение системы

$$\dot{x} = A_1(t)\,x. \qquad (9)$$

Применяя к системе (9) вышеприведенные рассуждения, будем иметь

$$\Omega_1(t) = \exp\left\{\int_0^t A_1(t_1)\,dt_1\right\}\Omega_2(t),$$

где $\Omega_2(t)$ – общее нормированное в нуле решение системы уравнений

$$\dot{x} = A_2(t)\,x,$$

где $A_2(t)$ определяется по тем же формулам, что и матрица $A_1(t)$.

Из сказанного следует, что общее нормированное в нуле решение системы (1) можно записать в виде:

$$\Omega(t) = \exp\left\{\int_0^t A(t_1)\,dt_1\right\} \cdot \exp\left\{\int_0^t A_1(t_1)\,dt_1\right\}\Omega_2(t).$$

Продолжая этот процесс, получим представление общего нормированного в нуле решения системы (1) в виде произведения бесконечного ряда экспоненциальных матриц. Но вопрос о сходимости этого формального ряда к решению системы (1) не является предметом исследования настоящей работы.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Сделаем в (1) замену переменных, положив

$$x = Uy,$$

где U – унитарная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы Перрона [1] о триангуляции системы линейных дифференциальных уравнений.

Тогда (1) примет вид:

$$\dot{y} = B\,y, \qquad (10)$$

где

$$B = U^*AU - U^*\dot{U}$$

– верхнетреугольная матрица. Здесь символ $*$ означает операцию транспонирования.

Как было показано выше, общее нормированное в нуле решение системы (10) можно представить в вид:

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{Q(t)}\Psi_1(t).$$

Здесь

$$Q(t) = \int_0^t B(t_1)\,dt_1\,,$$

а $\Psi_1(t)$ – общее нормированное в нуле решение системы

$$\dot{y} = B_1(t)y, \qquad (11)$$

$$B_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}[B,Q]_k\,(t).$$

Легко проверить, что матрица B_1 также является верхнетреугольной и что все ее элементы, стоящие на главной диагонали, равны нулю.

Повторяя все рассуждения для системы (11), найдем, что

$$\Psi_1(t) = \mathrm{e}^{Q_1(t)}\Psi_2(t).$$

где

$$Q_1(t) = \int_0^t B_1(t_1)\,dt_1,$$

а $\Psi_2(t)$ – есть общее нормированное в нуле решение системы

$$\dot{y} = B_2(t)y,$$

где, как нетрудно убедиться, B_2 – верхнетреугольная матрица, у которой не только элементы главной диагонали, но и элементы, стоящие на первой наддиагонали, равны нулю. Продолжая этот процесс, не более чем за m шагов, где m есть целая часть от $\frac{n+3}{2}$, получим общее нормированное в нуле решение системы (10) в виде произведения не более чем m экспоненциальных матриц. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно заметить, что полученная на m-ом шаге матрица B_m будет коммутировать со своим интегралом.

Из полученных результатов следует, что общее нормированное в нуле решение системы (1) можно представить в виде:

$$\Omega(t) = U(t)\,\mathrm{e}^{Q(t)}\mathrm{e}^{Q_1(t)} \dots \mathrm{e}^{Q_{m-1}(t)}.$$

Если $U\ (t)$ представить в виде $U(t) = \mathrm{e}^{\Gamma(t)}$, то общее нормированное в нуле решение системы (1) может быть представлено в виде произведения не более чем m+1 экспоненциальных матриц. Заметим попутно, что если матрица U представима в виде e^{Γ}, то матрица Γ в этом случае будет кососимметричной.

Действительно,

$$U^* = \mathrm{e}^{\Gamma}, \quad U^{-1} = \mathrm{e}^{-\Gamma}.$$

Но так как $U^* = U^{-1}$, то из последних двух равенств находим, что

$$(\mathrm{e}^{\Gamma})^* = \mathrm{e}^{-\Gamma}.$$

Откуда следует, что $\Gamma^* = -\Gamma$ и значит матрица Г является кососимметрической.

Вернемся к системе (1) и сделаем в ней замену переменных, положив $x = Hy$, где

$$H(t) = \exp\{\int_0^t A(t_1)\,dt_1\}.$$

Тогда y будет удовлетворять системе уравнений

$$\dot{y} = \left(H^{-1}AH - H^{-1}\dot{H}\right)y.$$

Но, как следует из соотношений (8) и (9), $y\,(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{y} = A_1\,\mathrm{y},$$

$$A_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}[A, X]_k\,(t).$$

Сравнивая эти два равенства, получим:

$$A_1 = H^{-1}AH - H^{-1}\dot{H}.$$

Отсюда

$$\dot{H} = AH - HA_1. \qquad (11)$$

Таким образом, мы получили формулу дифференцирования экспоненциальной матрицы.

Теорема доказана.

1.3. Пример

На основе метода ортогонализации Шмидта задача построения унитарного преобразования может быть сведена к задаче нахождения решения системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которых однозначно определяются коэффициентами матрицы A из системы (1). В качестве примера приведенной выше теории мы покажем, как строится унитарное преобразование U, которое сводит систему дифференциальных уравнений. Например, для построения требуемого преобразования, приводящего к треугольной форме системы

$$\dot{x} = A(\mathrm{t})\,\mathrm{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

просто найдите одно из решений определенного дифференциального уравнения

$$\dot{\varphi} = c_1 + c_2 \sin\varphi\, - c_3 \cos\varphi\ ,$$

где

$$c_1 = a_2 - a_3,\ c_2 = a_4 - a_1,\ \ c_3 = a_2 + a_3.$$

Тогда матрица может быть выбрана в качестве желаемого унитарного преобразования

$$U = e^P,\ P = \begin{pmatrix} 0 & {}^1\!/_{2\varphi} \\ -{}^1\!/_{2\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведем в системе (1) замену переменных:

$$x = Hy, \qquad H(t) = \exp\left\{\int_0^t A(t_1)dt_1\right\}.$$

Тогда легко проверить, что y удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{y} = \left(H^{-1}AH - H^{-1}\dot{H}\right)y,$$

$$\dot{y} = A_1\,\mathrm{y}, \qquad A_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}[A, X]_k\,(t).$$

Сравнение двух представлений решения дает желаемое утверждение.

Заключение

Показано, что фундаментальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений может быть представлено в виде формального ряда произведений экспоненциальных матриц. В отличие от формул Коши и Ляпунова [2] было получено другое представление решений системы однородных дифференциальных уравнений.

Кроме того, мы получили формулу дифференцирования экспоненциальной функции и показали, что задачу построения унитарного преобразования, приводящего систему к треугольному виду, можно свести к задаче отыскания решения специальной системы дифференциальных уравнений.

Список источников

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. *Ляпунов А.М.* Общая теория устойчивости. М.: Наука, 1969. 471 с.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 240 с.
4. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ, 2006. 447 с.
5. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1972. 664 с.
6. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1957. 456 с.
7. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 37–48.
8. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С., Селицкая Е.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Ме-

ханика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 5–15.
9. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Аппарат производных чисел и возможности применения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(54). С. 5–19.
10. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 31–39.
11. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.*, The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system // (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology, pp. 101–164.
12. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of gistoresis type // (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P. 080003.
13. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Sharlay A.S., Fedorov V.* Estimation for Number of Almost Periodic Solutions of First Order Ordinary Differential Equations // (2019) *AIP Conference Proceedings*, 2116. P. N080004.
14. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A.* Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics *(Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov)* (CNSA, 2017). P. 7973965.
15. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Gorovenko P., Sharlay A.S.* Estimation of Periodic Solutions Number of first-Order Differential Equations // (2018) *AIP Conference Proceedings*, 1959. P. 08006.
16. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, *Mathematics* 2018, Vol. 6, № 9. P. 171.
17. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S., Selitskaja E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis // 2019. *Mathematics.* 7(8). P. 677.
18. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* Possible solutions of linear homogenuous system of differential equations // 2020, *AIP Conference Proceedings* 2293. P. 060002.
19. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential // 2020, *AIP Conference Proceedings* 2293. 060003.
20. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* Study of Control Systems with Transistor Keys // *AIP Conference Proceedings*, 2022, 2425. 080003.
21. *Kadry S., Alferov G.V.,, Korolev V.S., Shymanchuk D.A.*, Mathematical Models of Control Processes and Stability In Problems of Mechanics // *AIP Conference Proceedings*, 2022, 2425. 080004.

References

1. *Demidovich B.P.* Lectures on the mathematical theory of stability. Moscow: Science; 1967. 472 s. (In Russ.).
2. *Lyapunov A.M.* The general problem of motion stability. M.–L.: Gostekhizdat, (Classics of Natural Science); 1950. 471 s. (In Russ.).
3. *Arnold V.I.* Ordinary Differential Equations. Moscow: Science; 1975. 240 s. (In Russ.).
4. *Gorbuzov V.N.* Integraly differencial'nyh sistem. Grodno: GrGU; 2006. 447 s. (In Russ.).
5. *Erugin N.P.* Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differencial'nyh uravnenij. Minsk: Nauka i tekhnika; 1972. 664 s. (In Russ.).
6. *Lappo-Danilevskij I.A.* Primenenie funkcij ot matric k teorii linejnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M.: Gostekhizdat; 1957. 456 s. (In Russ.).
7. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A.* Usloviya ustojchivosti linejnyh odnorodnyh sistem s pereklyucheniyami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2016;3(34):37-48. (In Russ.).
8. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S., Selickaya E.A.* Periodicheskie resheniya differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;3(46):5-15. (In Russ.).
9. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Apparat proizvodnyh chisel i vozmozhnosti primeneniya. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2021;3(54):5-19. (In Russ.).
10. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Ob ustojchivosti reshenij sistemy linejnyh differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022;2(57):31-39. (In Russ.).
11. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system. (Book Chapter)

Mechanical Systems: Research, Applications and Technology; 2017. P. 101–164.

12. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.*S. Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of gistoresis type. AIP Conference Proceedings. 2017; (1863):080003.
13. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Sharlay A.S., Fedorov V.* Estimation for Number of Almost Periodic Solutions of First Order Ordinary Differential Equations. AIP Conference Proceedings. 2019;(2116): N080004.
14. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A.* Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA, 2017). 2017. P. 7973965.
15. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Gorovenko P., Sharlay A.*S. Estimation of Periodic Solutions Number of first-Order Differential Equations. AIP Conference Proceedings; 2018;(1959): 08006.
16. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations. Mathematics. 2018;6(9):171.
17. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S., Selitskaja E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. Mathematics. 2019;7(8): 677.
18. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* Possible solutions of linear homogenuous system of differential equations. AIP Conference Proceedings. 2020;(2293): 060002.
19. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential. AIP Conference Proceedings. 2020;(2293): 060003.
20. *Kadry S., Alferov G.V., Ivanov G.G., Korolev V.S.* Study of Control Systems with Transistor Keys. AIP Conference Proceedings. 2022; (2425): 080003.
21. *Kadry S., Alferov G.V., Korolev V.S., Shymanchuk D.A.* Mathematical Models of Control Processes and Stability in Problems of Mechanics. AIP Conference Proceedings. 2022;(2425): 080004.

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 7342.

Information about the authors:

G. G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 116900;

G. V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 2873;

V. S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35 Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 7342.