«Механика»

Научная статья
УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-54-62

К динамике твердого стержня в пространстве Лобачевского

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия
nmakeyev@mail.ru, https: //orcid.org / 0000-0003-2807-977X

Аннотация. Рассматривается задача о винтовом движении относительно центра инерции свободного от связей абсолютно твердого бесконечно тонкого прямолинейного нематериального стержня конечной длины с одинаковыми по величине точечными массами, находящимися на его концах. Движение стержня происходит в пространстве постоянной отрицательной кривизны (пространстве Лобачевского) под воздействием системы гироскопических сил и постоянной следящей силы, заданной силовым винтом. Структура гироскопических сил задается специальными условиями, содержащими шесть характерных постоянных параметров (гироскопических коэффициентов). Приводятся характерные свойства данного движения. Найдены аналитические зависимости компонент кинематического винта стержня от параметров его ориентации, а также представления этих параметров в функциях времени.

Ключевые слова: *абсолютно твердое тело; винтовое движение; гироскопические силы; пространство Лобачевского; винты гиперболического пространства*

Для цитирования: *Макеев Н. Н.* К динамике твердого стержня в пространстве Лобачевского // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 54–62. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-54-62.

Статья поступила в редакцию 10.01.2023; одобрена после рецензирования 01.02.2023; принята к публикации 16.03.2023.

«Mechanics»

Research article

On the Solid Rod Dynamics in the Lobachevsky Space

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia
nmakeyev@mail.ru, https: //orcid.org / 0000-0003-2807-977X

Abstract. An absolutely solid infinitely thin rectilinear immaterial finite length rod helical motion problem is considered. Motion is heical relative to the inertia center. Located at rod ends point masses are identiall. The rod movement occurs in the constant negative curvature space (Lobachevsky space) under the gyroscopic forces system influence and a constant tracking force. The gyroscopic forces structure is set with using special conditions, which contain six characteristic constant parameters (gyroscopic coefficients). The characteristic motion properties are given. Components analytical dependense on the kinematic rod screw, rod orientation parameters is founded. Expressions of these parameters as time function, are obtained.

Keywords: *absolutely rigid body; helical motion; gyroscopic forces; Lobachevsky space; screws of hyperbolic space*

For citation: *Makeev N. N.* On the Solid Rod Dynamics in the Lobachevsky Space. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;1(60):54-62. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-54-62.

The article was submitted 10.01.2023; approved after reviewing 01.02.2023; accepted for publication 16.03.2023.

Введение

Теория винтов, созданная в 1870-х годах, изложенная в трактате Р. Белла [1], явилась аппаратом исследования свойств движения механических объектов в неевклидовых пространствах. Конструктивное построение этой теории было логически завершено А.П. Котельниковым в его монографии [2]. Он объединил в единую теорию − проективную теорию векторов − кинематику и динамику механических объектов, а также разработал теорию векторов в трехмерном проективном пространстве.

П.А. Широков [3] распространил теорию векторного поля на пространства постоянной кривизны, в том числе и на пространства Лобачевского. Движение твердого тела, являющееся аналогом классической регулярной прецессии в евклидовом пространстве и распространенное на пространство Лобачевского, было исследовано А.П. Широковым [4].

Различные виды движений механических объектов в пространстве Лобачевского были исследованы М.С. Крюковым [5−7]. Свойства многообразия состояний, устойчивость стационарных винтовых движений механического объекта в пространстве Лобачевского, а также условия существования первых интегралов его уравнений движения получены в работах [8−12].

1. Предварительные положения

Согласно проективной модели Ф. Клейна [5], пространство Лобачевского (пространство L_3) реализуется внутренними точками абсолюта:

$$g_{ij}x^{ij} = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0 \quad (1)$$

гиперболического пространства Γ_3. Здесь g_{ij} − метрический тензор псевдовекторного четырехмерного пространства, рассматриваемого как трехмерное проективное пространство P_3, реализующее пространство L_3. Отобразив точки пространства P_3 на точки гиперсферы псевдоевклидова пространства R_4^1, при решении задач в пространстве Γ_3 применяем тензорный аппарат пространства R_4^1.

Под движением пространства Γ_3 понимается проективное линейное преобразование, переводящее в себя абсолют (1).

Поскольку между одночленными группами движений в пространстве Γ_3 и специальными линейными комплексами в пространстве P_3 существует взаимно однозначное соответствие, то движение в пространстве Γ_3, как и в пространстве L_3, можно задавать бивектором пространства R_4^1 [6].

Винт в пространстве L_3 определяется непростым бивектором $U^{ij} = \lambda u^{ij} + \mu \overline{u}^{ij}$, который явно задается плюккеровыми координатами u^{ij}, $\overline{u}^{ij}$ внешней и внутренней оси винта, соответственно. Здесь λ, μ − действительные постоянные множители.

Рассмотрим свободный от связей абсолютно твердый прямолинейный стержень конечной длины, толщиной которого пренебрегаем по сравнению с его длиной, движущийся в гиперболическом пространстве L_3. Пусть $R^0(e_1^0 \dots e_4^0)$ − опорный координатный тетраэдр, автополярный относительно абсолюта (1), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством L_3. Этот неподвижный тетраэдр задается точками $e_j^0\ (j = 1, \dots, 4)$ данного пространства. С твердым стержнем неизменно свяжем подвижный координатный тетраэдр $R(e_1 \dots e_4)$ (тетраэдр инерции стержня), заданный точками e_j $(j = 1, \dots, 4)$, также автополярный относительно абсолюта (1). При этом тетраэдр R выбирается так, чтобы его вершина − точка e_4 стержня − была собственной, совпадала с центром инерции стержня, и чтобы пространственные ориентации этих тетраэдров совпадали [5].

Положение тетраэдра R и его точек относительно R^0 задается параметрами положения и ориентации по схеме, принятой в работе [7]. Положение точки e_4 задается двумя линейными и одним угловым параметрами, а ориентация тетраэдра R относительно R^0 определяется заданными углами Эйлера. Таким образом, взаимное положение данных тетраэдров устанавливается упорядоченным набором шести заданных характерных параметров.

Выберем положение тетраэдра R так, чтобы его ось $e_4\,e_3$ (далее кратко − ось 4–3) совпала со стержнем. Тогда моменты инерции вращения стержня вокруг осей 4–1 и 4–2 будут равны между собой.

Мгновенное состояние стержня в пространстве L_3 задается винтом мгновенной скорости $V^{j4}(v^{j4}, \omega^{j4})$ (кинематическим винтом) и винтом мгновенного кинетического момента (винтом импульса или кинетическим винтом) $G^{j4}(B_{j4}v^{j4}, -A_{j4}\omega^{j4})$ $(j=1,2,3)$ стержня. Здесь (v^{j4}, B_{j4}) − компоненты скорости сдвига и моменты инерции сдвига стержня относительно его главных осей инерции, соответственно; (ω^{j4}, A_{j4}) $(j=1,2,3)$ − компоненты скорости вращения и моменты инерции вращения стержня относительно тех же осей, соответственно. Определения моментов инерции твердых тел в пространстве L_3 как понятия приведены в работе [4].

Для моментов инерции сдвига и вращения твердого тела имеют место тождественные соотношения связи [4]

$$B_{j4} - A_{j4} = k^2 M \quad (j=1,2,3),$$

к которым следует присоединить тождественные союзные им соотношения связи аналогичного типа [12]:

$$B_{14} - A_{34} = k^2 M \qquad (1, 2, 3).$$

В приведенных равенствах и всюду далее обозначено: символ (1, 2, 3) означает циклическую перестановку величин с данными числовыми индексами, применяемую для получения по приведенным соотношениям-представителям всех остальных равенств этой группы; k − величина радиуса кривизны пространства L_3; M − величина массы тела.

2. Уравнения движения и первые интегралы

Система уравнений движения твердого тела, происходящего под воздействием силового винта внешних сил L^{ij} в пространстве L_3, имеет вид [10, 12]:

$$B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34} + B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) = k^2 L^{14},$$
$$A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34} - B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) = -k^2 L^{23}$$
$$(1, 2, 3). \tag{2}$$

В системе уравнений (2) каждая из двух групп уравнений задана приведенным здесь уравнением-представителем.

Остальные уравнения каждой из этих групп могут быть получены из данных путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3 в указанных величинах.

В дальнейшем предполагается, что движение твердого стержня происходит под воздействием сил с *гироскопической структурой* (по Томсону и Тэту [13; 14, с. 175]). Тогда компоненты силового винта L^{ij} для системы уравнений (2) относительно автополярного тетраэдра R задаются в виде [10]

$$k^2 L^{14} = \lambda^{34}v^{24} - \lambda^{24}v^{34} + \lambda^{31}\omega^{34} - \lambda^{12}\omega^{24} + k^2 m^{14}, \tag{3}$$

$$-k^2 L^{23} = \lambda^{31}v^{34} - \lambda^{12}v^{24} + \lambda^{24}\omega^{34} - \lambda^{34}\omega^{24} - k^2 n^{14} \tag{4}$$

$$(1, 2, 3).$$

В равенствах (3), (4) числа $\lambda^{rs}, m^{rs}, n^{rs}$ ($r = 1, 2, 3$; $s = 1, \dots, 4$; $r \neq s$) − заданные постоянные коэффициенты и характерные параметры винта внешних сил, соответственно.

Поскольку мощность силового винта, заданного выражениями (3), (4), при всех значениях $m^{rs} = n^{rs} = 0$ тождественно равна нулю, то силы, определяемые этим винтом при данных условиях, являются *гироскопическими*, а параметры λ^{rs} − заданными гироскопическими коэффициентами, обусловливающими гироскопический эффект.

Совокупность равенств (2)−(4) определяет систему уравнений движения твердого тела в пространстве L_3 и представима в виде

$$B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34} + B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) + \lambda^{24}v^{34} - \lambda^{34}v^{24} + \lambda^{12}\omega^{24} - \lambda^{31}\omega^{34} = k^2 m^{14},$$
$$A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34} - B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) + \lambda^{12}v^{24} - \lambda^{31}v^{34} + \lambda^{34}\omega^{24} - \lambda^{24}\omega^{34} = -k^2 n^{23} \quad (1, 2, 3). \tag{5}$$

Эта система эволюционного типа является многопараметрической и аналитически замкнутой относительно компонент скоростей v^{i4}, ω^{i4} $(i=1,2,3)$ при значениях заданных параметров (m^{rs}, n^{rs}) = const. Данная система уравнений может быть интерпретирована как динамическая система гиростата, относящаяся к пространству L_3, с соответствующими гиростатическими параметрами [8, 9].

Для системы уравнений (5) в режиме движения стержня по инерции, при котором

$$m^{j4} = n^{j4} = 0 \quad (j=1,2,3), \tag{6}$$

существуют первые основные алгебраические интегралы [8−10, 12]:

$$F_1 = h_1, \quad F_2 = h_2, \quad F_3 = h^2, \tag{7}$$

где квадратичные формы

$$F_1 \equiv \sum_{(123)}[(B_{34}v^{34} + \lambda^{12})^2 - (A_{14}\omega^{14} + \lambda^{14})^2], \tag{8}$$

$$F_2 \equiv \sum_{(123)}(B_{34}v^{34} + \lambda^{12})(A_{34}\omega^{34} + \lambda^{34}), \tag{9}$$

$$F_3 \equiv \sum_{(123)}[B_{34}(v^{34})^2 + A_{14}(\omega^{14})^2], \tag{10}$$

h_1, h_2, h − постоянные интегрирования. Условия (6) определяют движение твердого стержня по инерции с заданными силовыми коэффициентами λ^{ij} [8].

В равенствах (8)–(10) символ (123), находящийся под знаком суммы, обозначает операцию суммирования по величинам, получаемым путем циклической перестановки данных числовых индексов.

Вопрос о существовании первых интегралов (7) системы уравнений (5) при ограничениях (6) и их интерпретация рассмотрен в работах [10, 12], в которых приведены достаточные условия существования при определенных условиях первого квадратичного интеграла динамической системы (5) в виде

$$\sum_{j=1}^{3} a_{j4}(v^{j4})^2 = H^2, \tag{11}$$

где H − постоянная интегрирования, а коэффициенты квадратичной формы равны

$$a_{14} = B_{14}(B_{24} + A_{34})^{-1} \quad (1, 2, 3).$$

Интеграл (11) является дополнительным по Е.Т. Уиттекеру [15; 16, с. 84] интегралом к основным интегралам (8)–(10) динамической системы (5). Важность первого интеграла (11) здесь состоит в том, что по теореме Якоби об интегралах для сведения процедуры интегрирования динамической системы к квадратурам достаточно получить независимый первый интеграл, дополнительный к основным интегралам (7)–(10).

В дальнейшем представим стержень в виде двух материальных точек, соединенных прямолинейным отрезком длины 2 r, не имеющим массы; при этом масса каждой из концевых точек стержня равна $M/2$ [4]. Эта схема соответствует гантелеобразной модели механического объекта, применяемой, в частности, в динамике космических тел.

Приведем формулы для моментов инерции стержня, а также соотношения связи между ними, имея в виду определение моментов инерции твердых тел в пространстве L_3, данное А.П. Широковым [4].

В силу выбора положения тетраэдра R по отношению к стержню моменты инерции вращения стержня относительно осей тетраэдра 4-1 и 4-2 равны

$$A_{14} = A_{24} = A = k^2 M \,\mathrm{sh}^2(k^{-1}r), \tag{12}$$

а момент инерции вращения относительно оси 4-3 есть $A_{34} = 0$. Вследствие этого собственное вращение стержня не влияет на динамику его движения [5].

Моменты инерции сдвига относительно главных осей инерции 4-1, 4-2 есть

$$B_{14} = B_{24} = B = k^2 M \,\mathrm{ch}^2(k^{-1}r), \tag{13}$$

а момент инерции сдвига относительно главной оси инерции 4-3 равен $B_{34} = k^2 M$. Здесь и всюду далее принято $r \neq 0$.

Согласно данным зависимостям для моментов инерции стержня имеет место тождественное соотношение связи [5]

$$B - A = B_{34} = k^2 M. \tag{14}$$

3. Винтовое движение стержня

Определение. Движение твердого тела в пространстве L_3 называется *винтовым*, если компоненты винта мгновенного движения тела, удовлетворяющие системе уравнений (5), связаны ограничениями

$$v^{14}\omega^{34} - v^{34}\omega^{14} = 0 \quad (1, 2, 3). \tag{15}$$

Система соотношений (15) содержит только два независимых равенства; третье является их непосредственным следствием.

Соотношения (15) при $\omega^{ij} \neq 0$ могут быть представлены в параметрической форме

$$\frac{v^{14}}{\omega^{14}} = \frac{v^{24}}{\omega^{24}} = \frac{v^{34}}{\omega^{34}} = p,$$

где p − параметр винта.

Далее ставятся следующие две задачи.

Задача 1. Найти гладкое решение системы дифференциальных уравнений (5) вида $v^{i4}(t)$, $\omega^{j4}(t)$ ($i = 1, 2, 3$; j = 1, 2), определенное в односвязной области пространства переменных $\mathbf{V}(v^{i4})$, $\mathbf{\Omega}(\omega^{j4})$, удовлетворяющее условиям $\{v^{i4}(0), \omega^{j4}(0)\} = \{v_0^{i4}, \omega_0^{j4}\}$ и соотношениям (15) для значений времени $t \in T = [0, +\infty)$.

Обозначим

$$a = A^{-1},\ b = B^{-1},\ c = (B_{34})^{-1},$$
$$n_r = bk^2 m^{r4}, \quad n_3 = ck^2 m^{34}$$
$$(r = 1, 2),$$

и для дальнейшего положим

$$\lambda^{12} = \lambda^{23} = \lambda^{31} = 0. \tag{16}$$

Условия (16) определяют отсутствие гиросилового эффекта относительно осей координат 1-2, 2-3, 3-1 подвижного (связанного со стержнем) координатного тетраэдра *R*.

Представим систему уравнений движения (5) с учетом равенств (12)–(14) и условия $A_{34} = 0$. В результате получаем

$$\begin{gathered}\dot v^{14} + b(\lambda^{24} v^{34} - \lambda^{34} v^{24}) + v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34} = n_1,\\ \dot v^{24} + b(\lambda^{34} v^{14} - \lambda^{14} v^{34}) + v^{14}\omega^{34} - v^{34}\omega^{14} = n_2,\\ \dot v^{34} + c(\lambda^{14} v^{24} - \lambda^{24} v^{14}) +\\ + c(A+B)(v^{24}\omega^{14} - v^{14}\omega^{24}) = n_3\\ \lambda^{24}\omega^{14} - \lambda^{14}\omega^{24} = -k^2 n^{12}.\end{gathered} \tag{17}$$

Система (17), полученная из уравнений (5), содержит лишь уравнения, необходимые для дальнейшего.

Введем дополнительные структурно-динамические условия, положив

$$n^{12} = 0, \quad \lambda^{14}\lambda^{24}\lambda^{34} \neq 0. \tag{18}$$

Согласно условиям винтового движения (15), в котором все величины v^{ij}, ω^{ij} должны удовлетворять уравнениям (17) и ограничениям (18), данная система принимает окончательный вид:

$$\begin{gathered}\dot v^{14} + b(\lambda^{24} v^{34} - \lambda^{34} v^{24}) = n_1,\\ \dot v^{24} + b(\lambda^{34} v^{14} - \lambda^{14} v^{34}) = n_2,\\ \dot v^{34} + c(\lambda^{14} v^{24} - \lambda^{24} v^{14}) = n_3,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\lambda^{24}\omega^{14} - \lambda^{14}\omega^{24} = 0. \tag{20}$$

Из соотношения (20) в силу условий (15) следует зависимость

$$\lambda^{24} v^{14} - \lambda^{14} v^{24} = 0, \tag{20*}$$

согласно которой третье уравнение системы (19) принимает вид

$$\dot v^{34} = n_3.$$

Тогда получаем

$$v^{34}(t) = v_0^{34} + n_3 t \equiv \overline{\varphi}(t), \tag{21}$$

где $v_0^{34} = v^{34}(0)$. Аналогично предыдущему далее обозначается $v_0^{ij} = v^{ij}(0)$.

При известной зависимости (21) первые два уравнения системы (19) имеют вид

$$\begin{gathered}\dot v^{14} - b\lambda^{34} v^{24} = F_1(t),\\ \dot v^{24} + b\lambda^{34} v^{14} = F_2(t),\end{gathered} \tag{22}$$

где правые части уравнений представлены выражениями

$$F_1(t) = n_1 - b\lambda^{24}\overline{\varphi}(t),$$
$$F_2(t) = n_2 + b\lambda^{14}\overline{\varphi}(t).$$

Из уравнений (22) путем взаимного исключения величин v^{14}, v^{24} получаем систему

$$\begin{gathered}\ddot v^{14} + \Omega^2 v^{14} = \Phi_1(t),\\ \ddot v^{24} + \Omega^2 v^{24} = \Phi_2(t),\end{gathered} \tag{23}$$

где обозначено

$$\Phi_1(t) = \dot F_1 + \Omega F_2, \quad \Phi_2(t) = \dot F_2 - \Omega F_1,$$

причем $\Omega = b\lambda^{34} \neq 0$.

Для дальнейшего примем условия (6) движения стержня по инерции; тогда, согласно соотношению (21), при $n_3 = 0$ имеем

$$(F_1, F_2) = (F_1^0, F_2^0) = bv_0^{34}(-\lambda^{24}, \lambda^{14})$$

и уравнения (23) примут вид

$$\begin{gathered}\ddot v^{14} + \Omega^2 v^{14} = \Omega F_2^0,\\ \ddot v^{24} + \Omega^2 v^{24} = -\Omega F_1^0.\end{gathered} \tag{24}$$

Обозначим

$$b_1 = v_0^{14} - \Omega^{-1} F_2^0, \quad b_2 = v_0^{24} + \Omega^{-1} F_1^0,$$
$$b_3 = \Omega^{-1}\dot v_0^{14}, \quad b_4 + \Omega^{-1}\dot v_0^{24},$$

$$V^{14}(t) = b_1 \cos\Omega t + b_3 \sin\Omega t,$$
$$V^{24}(t) = b_2 \cos\Omega t + b_4 \sin\Omega t.$$

Решения уравнений (24) в данных обозначениях примут вид

$$\begin{gathered}v^{14}(t) = V^{14}(t) + \Omega^{-1} F_2^0,\\ v^{24}(t) = V^{24}(t) - \Omega^{-1} F_1^0.\end{gathered} \tag{25}$$

При этом, согласно условию (20*)

$$\lambda^{24} b_1 - \lambda^{14} b_2 = \lambda^{24} b_3 - \lambda^{14} b_4 = 0,$$
$$\lambda^{24} F_2^0 + \lambda^{14} F_1^0 = 0.$$

Найдем определяющие соотношения для величин $\omega^{14}(t)$, $\omega^{24}(t)$.

Обозначим

$$Q_1 = ab\,[h_2 - B(\lambda^{14}v^{14} + \lambda^{24}v^{24}) - B_{34}\lambda^{34}v^{34}],$$
$$Q_2 = a[h_3^2 - BW^2 - B_{34}(v^{34})^2],$$
$$W^2(v^{14}, v^{24}) = (v^{14})^2 + (v^{24})^2, \qquad (26)$$
$$D(v^{14}, v^{24}) = (v^{24})^2\,\Delta(v^{14}, v^{24}),$$
$$\Delta(v^{14}, v^{24}) = Q_2 W^2 - Q_1^2.$$

Интегралы (7), (9), (10) для системы уравнений (5), имеющие место при ограничениях (6), рассматриваемые при условиях (16) и обозначениях (26), представляются в виде

$$v^{14}\omega^{14} + v^{24}\omega^{24} = Q_1, \quad (\omega^{14})^2 + (\omega^{24})^2 = Q_2. \qquad (27)$$

Исключая из системы уравнений (27) величину ω^{24}, в результате получаем двухзначное выражение

$$\omega^{14} = (Q_1 v^{14} \mp v^{24}\sqrt{\Delta})W^{-2}, \qquad (28)$$

где величины v^{14}, v^{24} определяются равенствами (25).

В силу равенств (28) действительные значения величины ω^{14} существуют лишь при выполнении определяющего дискриминантного условия

$$Q_2 W^2 - Q_1^2 \ge 0. \qquad (29)$$

При этом в случае равенства в этом условии значение данной величины является определенным и единственным; в ином случае имеет место пара ее действительных значений.

Согласно соотношению связи (20) из зависимости (28) при условии (29) непосредственно следует

$$\omega^{24} = (\lambda^{14})^{-1}\lambda^{24}(Q_1 v^{14} \mp v^{24}\sqrt{\Delta})W^{-2}. \qquad (30)$$

В силу равенств (28), (30) при строгом условии (29) имеют место бинарные представления выражений для компонент скорости винта вращения стержня, что отражает характерное свойство его винтового движения в пространстве L_3.

Таким образом, искомые зависимости вида $\omega^{14}(t)$, $\omega^{24}(t)$ согласно найденным из равенств (25) функций $v^{14}(t), v^{24}(t)$ при условии (29) полностью определены.

4. Кинематические характеристики движения стержня

Задача 2. Найти гладкие аналитические зависимости параметров положения и ориентации стержня, удовлетворяющие соотношениям (15), от компонент кинематического и кинетического винтов для значений $t \in T$.

Рассмотрим соотношения, связывающие компоненты кинематического и кинетического винтов с параметрами, определяющими взаимное положение и ориентацию координатных тетраэдров R^0, R и с их производными по времени. Под кинематическими и кинетическими уравнениями стержня подразумеваются уравнения, содержащие компоненты кинематического и кинетического винтов, соответственно, и связывающие эти компоненты с параметрами положения и ориентации стержня. В развернутом виде они приведены в работе [5] и в другой форме − в статье [11].

Положение точки e_4 задается параметрами x, y, α. Здесь x − расстояние между точкой e_4^0 и точкой пересечения заданной плоскости $(e_1^0 e_2^0 e_4)$ с осью $(e_4^0 e_3^0)$; y − расстояние от данной точки пересечения до точки e_4; α − угол между пересекающимися плоскостями $(e_1^0 e_3^0 e_4^0)$ и $(e_1^0 e_3^0 e_4)$. Тогда ориентация тетраэдра R относительно R^0 задается классическими углами Эйлера θ, ψ, φ. Таким образом, упомянутое взаимное расположение тетраэдров R, R^0 определяется упорядоченным набором позиционных параметров $(x, y, \alpha; \theta, \psi, \varphi)$.

Обозначим

$$X = k^{-1}x, \; Y = k^{-1}y$$

и введем функции $\Psi_r(\psi, \theta, \varphi)$ $(r = 1, \dots, 4)$:

$$\Psi_1 = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$\Psi_2 = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi,$$
$$\Psi_3 = \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi,$$
$$\Psi_4 = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi,$$

а также функции углов Эйлера:

$$(f_1, f_2) = \sin\theta\,(\cos\psi, \sin\psi),$$
$$(f_3, f_4) = (g_1, g_2)\,\mathrm{ch}\,Y,$$
$$(g_1, g_2) = \sin\theta\,(\cos\varphi, \sin\varphi),$$
$$g_3 = \cos\theta\,\mathrm{ch}\,Y.$$

Для компонент кинетического винта стержня относительно тетраэдра инерции R имеют место соотношения [11]:

$$-B\,v^{j4} = \lambda\, f_{5-j} - \mu\,\Psi_j\,\mathrm{sh}Y, \qquad (31)$$

$$-B_{34}v^{34} = \lambda\, g_3 + \mu\, f_1\,\mathrm{sh}Y, \qquad (32)$$

$$A\omega^{j4} + \lambda^{j4} = \mu\, f_{5-j} + \lambda\Psi_j\,\mathrm{sh}Y \quad (j = 1, 2), \qquad (33)$$

$$0 = \mu g_4 - \lambda\, f_1\mathrm{sh}Y. \qquad (34)$$

Зависимости (31)–(34) имеют место в результате отображения векторных компонент кинетического винта стержня в гиперболическом пространстве на комплексные векторы комплексного евклидова пространства. Здесь λ, μ – постоянные коэффициенты, заданные в выражении непростого бивектора, упомянутые выше. При этом должны быть учтены ограничения (16).

Компоненты кинематического винта стержня определяются равенствами [5]:

$$v^{j4} = -\dot X\, g_{3-j}\,\mathrm{ch}Y - \dot\alpha\,\Psi_j\,\mathrm{sh}Y + (-1)^j\,\dot Y\,\Psi_{5-j} \quad (j = 1, 2), \qquad (35)$$

$$v^{34} = -\dot X\, g_3 + \dot\alpha\, f_1\mathrm{sh}Y - \dot Y f_2, \qquad (36)$$

$$\omega^{j4} = -\dot X\,\Psi_j\,\mathrm{sh}Y + \dot\alpha\, g_{3-j}\,\mathrm{ch}Y + \dot\psi\, g_{3-j} + \dot\theta\,\rho(\varphi), \qquad (37)$$

где $\rho(\varphi) = \cos\varphi$ при $j = 1$, $\rho(\varphi) = -\sin\varphi$ при $j = 2$;

$$0 = \dot X\, f_1\,\mathrm{sh}Y + \dot\alpha g_3 + \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi. \qquad (38)$$

Равенства (35)–(38) имеют место в силу соотношений аналитического перехода от тетраэдра R^0 к тетраэдру R в результате применения переходных преобразований [5].

Выразим функции углов Эйлера через компоненты кинематического винта стержня. Рассмотрим равенства (35)–(36) как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно величин v^{j4} с определителем $\overline{\Delta}(y;\psi,\theta,\varphi)$:

$$(\mathrm{sh}Y)^{-1}\overline{\Delta} = [(f_2\Psi_1 + g_3\Psi_4)\,g_1 + (g_3\Psi_3 - f_2\Psi_2)\,g_2]\mathrm{ch}Y + (\Psi_1\Psi_3 + \Psi_2\Psi_4)\,g_4 \neq 0. \qquad (39)$$

Условие (39) обусловливает однозначное определение зависимостей величин v^{j4} от углов Эйлера. Однако непосредственное определение этих зависимостей отсюда связано с громоздкими результирующими выражениями. Поэтому для нахождения искомых функций воспользуемся следующим приемом, примененным в работе [5].

Из уравнений (35), (36) следует:

$$-\dot X\,\mathrm{ch}\,Y = g_2 v^{14} + g_1 v^{24} + (\cos\theta)\,v^{34}, \qquad (40)$$

$$\dot\alpha\,\mathrm{sh}Y = -\Psi_1 v^{14} - \Psi_2 v^{24} + f_1 v^{34}. \qquad (41)$$

В равенствах (40), (41) выразим величины v^{14}, v^{24}, учитывая принятое ранее условие $n_3 = 0$. Применяя условия (15), (20) и составляя линейные по λ, μ комбинации уравнений системы (31)–(34), в результате преобразований получаем

$$\dot X = \lambda b[1 + K(\mathrm{ch}^2 Y)^{-1}], \quad \dot\alpha = -\mu b[1 + K(\mathrm{sh}^2 Y)^{-1}], \qquad (42)$$

где обозначено

$$K = A(B - A)\sigma^2 (v_0^{34})^2, \quad \sigma^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

Согласно равенствам (42) в частном случае, при котором $v_0^{34} = 0$, имеем

$$X(t) = X_0 + \lambda b t, \quad \alpha(t) = \alpha_0 - \mu b t,$$

где нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

Аналогичным образом из данных соотношений получаем

$$\sigma^2\sin\theta\,\mathrm{ch}\,Y \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = F(p)\begin{bmatrix} v^{14} \\ v^{24} \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} \lambda^{14} \\ \lambda^{24} \end{bmatrix}, \qquad (43)$$

где обозначено

$$F(p) = Ap^{-1}\mu - B\lambda.$$

Из уравнений (32), (34) следует

$$\sin\theta\,\cos\psi\,\mathrm{sh}Y = -\mu k\sigma^{-2}, \qquad (44)$$

где $k = B_{34}v_0^{34}$.

Тогда в силу предыдущих соотношений и равенства (44) получаем

$$\cos\theta = -\lambda k(\sigma^2\,\mathrm{ch}Y)^{-1}. \qquad (45)$$

$$\cos\psi = -\mu k(\lambda P)^{-1}\mathrm{cth}\,Y, \qquad (46)$$

где обозначено

$$P(Y) = \sqrt{(\sigma^2\mathrm{ch}Y)^2 - (\lambda k)^2}.$$

При этом равенство (46) имеет место, если только выполняется условие $\sigma^2 \operatorname{ch} Y > |\lambda k|$.

Из равенств (43) имеем

$$\cos\varphi = [F(p)v^{14} + \mu\lambda^{14}]P^{-1}. \qquad (47)$$

Согласно равенствам (45)–(47) функции углов Эйлера θ, ψ, φ выражаются через величину Y (t). Для ее нахождения введем тождество

$$\operatorname{ch}^2 Y = f_3^2 + f_4^2 + g_4^2,$$

из которого в силу соотношений (43), (45) получаем

$$(\sigma^2 \operatorname{ch} Y)^2 = \sum_{j=1}^{2}[F(p)v^{j4} + \mu\lambda^{14}]^2 + (\lambda k)^2. \qquad (48)$$

Здесь величины $v^{14}(t), v^{24}(t)$ определятся равенствами (25).

Из соотношений (42)–(48) следует, что нахождение зависимостей вида $X(t), \alpha(t)$ сводится к квадратурам.

Итак, параметры, устанавливающие положение и ориентацию стержня в пространстве конфигураций, определяются как явные однозначные функции времени.

Список источников

1. *Bell R.S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Cambridge: University Press, 1900. 544 p.
2. *Котельников А.П.* Проективная теория векторов. Казань, 1899. 317 с.
3. *Широков П.А.* Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны // In memoriam N.I. Lobatschevskii. Казань: Главнаука, 1927. Т. 2. С. 119–134.
4. *Широков А.П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196–207.
5. *Крюков М.С.* О движении стержня по инерции в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1964. № 4. С. 86–98.
6. *Крюков М.С.* О движении твердого тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 5. С. 34–39.
7. *Крюков М.С.* Движение симметричного тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 6. С. 68–75.
8. *Макеев Н.Н.* Устойчивость перманентных движений гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: изд-во Саратовского ун-та. 1981. Вып. 6. С. 58–71.
9. *Макеев Н.Н.* Линейный интеграл движения гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Дифференциально-геометрические структуры и их приложения: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: изд-во Саратовского ун-та. 1991. Вып. 10. С. 29–36.
10. *Макеев Н.Н.* Квазитвердое движение прототела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермский ун-т. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 110–130.
11. *Макеев Н.Н.* Движение симметричного твёрдого тела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермский ун-т. Пермь, 2010. Вып. 42. С. 46–63.
12. *Макеев Н.Н.* Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского // Математический вестник Вятского государственного университета. 2022. № 1(24). С. 24–32. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.004.
13. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London: Cambridge University Press, 1879.
14. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
15. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
16. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

References

1. *Bell R.S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Cambridge: University Press; 1900. 544 p. (In Eng.).
2. *Kotel'nikov A.P.* Proyektivnaya teoriya vektorov. Kazan; 1899. 317 s. (In Russ.).
3. *Shirokov P.A.* Preobrazovanie vintovykh integralov v prostranstvakh postoyannoy krivizny. In memoriam N.I. Lobatschevskii. Kazan: Glavnauka. 1927;(2):119–134. (In Russ.).
4. *Shirokov A.P.* Vintovaya regulyarnaya pretsessiya v prostranstve Lobachevskogo. Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta. 1963;(123:1):196–207. (In Russ.).
5. *Kryukov M.S.* O dvizhenii sterzhnya po inertsii v prostranstve Lobachevskogo. Izvestiya vuzov. Mathematica. 1964;(4):86–98. (In Russ.).

6. *Kryukov M.S.* O dvizhenii tverdogo tela v prostranstve Lobachevskogo. Izvestiya vuzov. Mathematica. 1967;(5):34−39. (In Russ.).
7. *Kryukov M.S.* Dvizhenie simmetrichnogo tela v proctranstve Lobachevskogo. Izvestiya vuzov. Mathematica. 1967;(6):68−75. (In Russ.).
8. *Makeev N.N.* Ustoychivost permanentnykh dvizheniy girostata v prostranctve Lobachevskogo. Differentsialnaya geometriya. Geometriya obobshchennykh prostranstv i eye prilozheniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov: izd-vo Saratovskogo un-ta. 1981;(6):58−71. (In Russ.).
9. *Makeev N.N.* Lineynyy integral dvizheniya girostata v prostranstve Lobachevskogo. Differentsialnaya geometriya. Geometriya obobshchennykh prostranstv i eye prilozheniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov: izd-vo Saratovskogo un-ta. 1991;(10):29−36. (In Russ.).
10. *Makeev N.N.* Kvazitvyerdoe dvizhenie prototela v prostranstve Lobachevskogo. Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Permskij un-t. Perm', 2007;(39):110−130. (In Russ.).
11. *Makeev N.N.* Dvizhenie simmetrichnogo tvyerdogo tela v prostranstve Lobachevskogo. Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Permskij un-t. Perm. 2010;(42):46−63. (In Russ.).
12. *Makeev N.N.* Integraly uravneniy dvizheniya v prostranstve Lobachevskogo. Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta. 2022;(1:24):24−32. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.004. (In Russ.).
13. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London: Cambridge University Press; 1879. (In Eng.).
14. *Zhuravlyev V.F.* Osnovy teoreticheskoy mekhaniki. M.: Fizmatlit; 2001. 320 s. (In Russ.).
15. *Uitteker E.T.* Analiticheskaya dinamika. M.; L.: ONTI; 1937. 500 s. (In Russ.).
16. *Dzhakal'ya G.E.O.* Metody teorii vozmushcheniy dlya nelineynykh system. M.: Nauka; 1979. 320 s. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев − доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020.

Information about the author:

N. N. Makeev − Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020.