«Математика»

Научная статья
УДК 519.6
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14

Обобщение метода Петрова‑Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Н. К. Волосова[1], К. А. Волосов[2], А. К. Волосова[2], М. И. Карлов[3], Д. Ф. Пастухов[4], Ю. Ф. Пастухов[4]
[1]Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2] Российский Университет Транспорта, Москва, Россия
[3]Московский физико-технический университет, Москва, Россия
[4]Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача численного решения линейной системы m интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Впервые предложено обобщение проекционного метода Петрова–Галеркина для решения данной задачи. Количество координатных функций n двух линейно независимых систем может быть равно, больше или меньше m – количества интегральных уравнений. Преимущество данного алгоритма заключается в том, что он не чувствителен к малости параметров λ в системе интегральных уравнений. Алгоритм требует правильного выбора двух линейно независимых систем координатных функций и их числа. Определена диагональная и антидиагональная задача. Для антидиагональной задачи из двух уравнений Фредгольма алгоритм решения сведен к матричному решению. Решены два примера для антидиагональной задачи из двух уравнений Фредгольма, в которых численные решения задачи совпадают с точными решениями системы. Доказаны две теоремы для достаточных условий корректности предложенных численных алгоритмов в двух случаях. В первом случае рассматривается антидиагональная задача с двумя уравнениями Фредгольма второго рода. Вторая теорема рассматривает условия корректности для диагональной задачи общего вида. Несомненно, предложенный алгоритм будет полезен в задачах механики и вычислительной математики.

Ключевые слова: *уравнение Фредгольма; численные методы; уравнения математической физики; матрица; интегральные уравнения*

Для цитирования: *Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К., Карлов М. И., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф.* Обобщение метода Петрова–Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 5–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14.

Статья поступила в редакцию 05.01.2023; одобрена после рецензирования 27.01.2023; принята к публикации 15.03.2023.

«Mathematics»

Research article

The Petrov–Galerkin Method Generalization for Solving a Second Kind Fredholm Integral Equations System

N.K. Volosova[1], K.A. Volosov[2], A.K. Volosova[2], M.I. Karlov[3], D.F. Pastuhov[4], Yu.F. Pastuhov[4]
[1]University of the Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

[2] Russian University of Transport, Moscow, Russia
[3] Moscow Physics and Technology University, Moscow, Russia
[4] Polotsk State University, Novopolotsk, Belrussia

Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract. The numerical solution problem of a second kind Fredholm *m* integral equations linear system is considered. The Petrov–Galerkin projection method generalization for solving this problem is proposed the first time. *n* is a coordinate functions number of two linearly independent systems. It can be equal, more or less then the *m* – the integral equations number. This algorithm advantage is that it is not sensitive to the parameters λ smallness in the integral equations system. The algorithm requires the correct choice of two linearly independent coordinate functions systems and their number. The solution algorithm is reduced to a matrix solution for an antidiagonal problem. Two examples are solved for the antidiagonal problem, and numerical solutions of the problem coincide with the exact solutions. Two theorems are proved for sufficient conditions for the proposed numerical algorithms correctness in two cases. In the first case, an antidiagonal problem is considered with two Fredholm equations of the second kind. The second theorem considers well-posedness conditions for a general diagonal problem. Undoubtedly, the proposed algorithm will be useful in mechanics and computational mathematics problems.

Keywords: *Fredholm equation; numerical methods; equations of mathematical physics; matrix; integral equations*

For citation: *Volosova N. K., Volosov K. A., Volosova A. K., Karlov M. I., Pastuhov D. F., Pastuhov Yu. F.* The Petrov–Galerkin Method Generalization for Solving a Second Kind Fredholm Integral Equations System. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;1(60):5-14. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14.

The article was submitted 05.01.2023; approved after reviewing 27.01.2023; accepted for publication 15.03.2023.

Введение

В работах [1], [2], [3] описана постановка задачи для интегрального уравнения Фредгольма второго рода и различные ее методы численного решения. Одним из важных методов является проекционный метод Петрова–Галеркина, применяемый для одного интегрального уравнения Фредгольма в конечномерных пространствах линейно-независимых координатных функций. Уравнение Фредгольма второго рода подробно изучено в работе [4], в частности, для малых значений λ и для больших значений параметра λ.

Однако при удачном выборе системы координатных функций применение проекционного метода Петрова–Галеркина не требует малости параметра λ (требуется проверка удаленности λ от всех собственных значений интегрального ядра [1], [2]).

В данной работе мы обобщили метод Петрова–Галеркина на систему интегральных уравнений Фредгольма. В последнее время уравнения Фредгольма второго рода активно применяются в конформных отображениях [5], в механике [6]. В работе [7] для численного решения уравнения Фредгольма с двойной точностью при небольших параметрах λ применен метод замены интеграла в матричной форме.

Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных уравнений Фредгольма 2-го рода, которую будем решать проекционным методом Петрова–Галеркина. Метод решения одного интегрального уравнения Фредгольма (1) описан в работе [1], [2], [3].

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x)\,, \qquad (1)$$

где: $K(x,s)\in C([a,b]\times[a,b])$ – непрерывная функция (кусочно-непрерывная на квадрате $(x,s)\in[a,b]\times[a,b]$ – ядро интегрального уравнения Фредгольма (1)), $f(x)\in C[a,b]$ – заданная непрерывная правая часть уравнения (1), λ – известный параметр. Обобщим уравнение (1) на случай m интегральных уравнений и m неизвестных квадратично-интегрируемых функций $y_i(x)\in L_2[a,b],\ i=\overline{1,m}$ [1, 2]. Правые части уравнений $f_i(x), i=\overline{1,m}$ и параметры $\lambda_{i,j},\ i,j=\overline{1,m}$ в задаче (2) заданы. Число интегральных ядер $K_{i,j}(x,s)\in C([a,b]\times[a,b]), i,j=\overline{1,m}$ в системе интегральных уравнений (2) равно m^2.

$$y_i(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_{i.j}\int_a^b K_{i,j}(x,s)y_j(s)ds = f_i(x), i,j=\overline{1,m}. \qquad (2)$$

Определение 1. Задачу (2), у которой интегральные ядра имеют только равные индексы $i = j$, назовем ***диагональной***. Очевидно, что каждая неизвестная функция $y_i(x)$ в диагональной задаче входит только в свое i-е уравнение, а система интегральных уравнений разбивается на m независимых уравнений с разделенными функциями $y_i(x),\ i = \overline{1,m}$.

Например, явление квазиупругости в механике сводится к диагональной задаче из двух интегральных уравнений [8], в которой функции механического напряжения и относительной деформации связаны дополнительно линейным законом Гука.

Определение 2. Задачу (2), у которой интегральные ядра содержат произвольные индексы $i \le j (i \ge j)$, назовем ***смешанной***. Если при этом отсутствуют ядра $K_{i,i}(x,s)$ и параметры $\lambda_{i.i}$ с равными индексами $i = j$, то задачу (2) назовем ***антидиагональной***.

Сначала решим задачу (2) методом Петрова–Галеркина в общем виде. Затем в качестве частного случая рассмотрим антидиагональную систему двух интегральных уравнений.

Как и в работе [1], выберем две системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n, \{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$.

По первой системе координатных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ запишем разложение неизвестных функций решения $y_j(x),\ j = \overline{1,m}$, для удобства добавляя каждый раз функцию правой части системы (2) $f_i(x),\ i = \overline{1,m}$.

Решение системы уравнений (2) ищем в виде (3):

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j^i \varphi_j(x),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \quad (3)$$

Коэффициенты разложения $C_j^i,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ в формуле (3) неизвестны ($n \cdot m$ неизвестных). Подставим искомые функции $y_i(x)$ в систему интегральных уравнений (2):

$$f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j^i \varphi_j(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} \int_a^b K_{i,j}(x,s)\left(f_j(s) + \sum_{k=1}^{n} C_k^j \varphi_k(s)\right) ds =$$

$$= f_i(x) \Leftrightarrow R_i(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j^i \varphi_j(x) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} \int_a^b K_{i,j}(x,s)\left(f_j(s) + \sum_{k=1}^{n} C_k^j \varphi_k(s)\right) ds,\ k = \overline{1,n}. \quad (4)$$

В формуле (4) функция $R_i(x), i = \overline{1,m}$ представляет собой невязку i-го уравнения в системе уравнений Фредгольма (2). Потребуем ортогональности невязки $R_i(x), i = \overline{1,m}$ всем функциям линейно-независимой второй системы:

$$\{\psi_l(x)\}_{l=1}^n < R_i, \psi_l >= 0,\ i = \overline{1,m}, l = \overline{1,n}. \quad (5)$$

Запишем формулу (5) – $n \cdot m$ условий более подробно с учетом формулы (4), в первой сумме заменим индекс j на k.

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^i \int_a^b \varphi_k(x)\psi_l(x)dx -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} \int_a^b \int_a^b \psi_l(x) K_{i,j}(x,s)\left(f_j(s) + \sum_{k=1}^{n} C_k^j \varphi_k(s)\right) dsdx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^i \int_a^b \varphi_k(x)\psi_l(x)dx - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} \sum_{k=1}^{n} C_k^j \int_a^b \int_a^b \psi_l(x) K_{i,j}(x,s)\varphi_k(s)dsdx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} \int_a^b \int_a^b \psi_l(x) K_{i,j}(x,s) f_j(s)dsdx,\ i,j = \overline{1,m}, k,l = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Введем в формуле (6) обозначения:

$$a_{k,l} = \int_a^b \varphi_k(x)\psi_l(x)dx, b_{j,k}^{i,l} = \int_a^b \int_a^b \psi_l(x) K_{i,j}(x,s)\varphi_k(s)dsdx$$

$$f_j^{i,l} = \int_a^b \int_a^b \psi_l(x) K_{i,j}(x,s) f_j(s)dsdx, i,j = \overline{1,m}, k,l = \overline{1,n}.$$

Тогда формула (6) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} C_{i,k} a_{k,l} - \sum_{j=1,k=1}^{j=m,k=n} C_{j,k} \lambda_{i,j} b_{j,k}^{i,l} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i.j} f_j^{i,l},\ i,j = \overline{1,m};\ k,l = \overline{1,n}. \quad (7)$$

В формуле (7) всего $m \cdot n$ условий для определения $m \cdot n$ элементов неизвестной матрицы коэффициентов разложения. Коэффициенты $a_{k,l}; k,l = \overline{1,n}$, $b_{j,k}^{i,l}; j,i = \overline{1,m}; k,l = \overline{1,n}$, $f_j^{i,l}$ найдены, а матрица параметров $\lambda_{i.j}; i,j = \overline{1,m}$ задана в задаче (2). Система условий (7) содержит трехиндексные $f_j^{i,l}$ и четырехиндексные коэффициенты. По нижним индексам $j,k(j)$ проводится суммирование.

Как частный пример задачи (2) рассмотрим антидиагональную систему двух интегральных уравнений Фредгольма с двумя неизвестными функциями $u(x), v(x)$:

$$\begin{cases} u(x) - \lambda_{1,2} \int_a^b K_{1,2}(x,s)v(s)ds = f_1(x), \\ v(x) - \lambda_{2,1} \int_a^b K_{2,1}(x,s)u(s)ds = f_2(x) \end{cases}. \quad (8)$$

Решение (8) ищем в виде (9)

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j^1 \varphi_j(x), \\ v(x) = f_2(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \varphi_j(x) \end{cases}. \quad (9)$$

Невязки системы (8) имеют вид

$$\begin{cases} R_1 = \sum_{j=1}^{n} C_j^1 \varphi_j(x) - \lambda_{1,2} \int_a^b K_{1,2}(x,s) \left(f_2(s) + \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \varphi_j(s) \right), \\ R_2 = \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \varphi_j(x) - \lambda_{2,1} \int_a^b K_{2,1}(x,s) \left(f_1(s) + \sum_{j=1}^{n} C_j^1 \varphi_j(s) \right) \end{cases}.$$

Условия ортогональности невязок имеют вид

$$< R_1, \psi_k >= 0, k = \overline{1,n}; < R_2, \psi_k >= 0, k = \overline{1,n} \quad . \quad (10)$$

Запишем $2n$ условий формулы (10)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j^1 \int_a^b \psi_k(x) \varphi_j(x) dx - \lambda_{1,2} \int_a^b K_{1,2}(x,s) \psi_k(x) \left(f_2(s) + \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \varphi_j(s) \right) dsdx = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \int_a^b \psi_k(x) \varphi_j(x) dx - \lambda_{2,1} \int_a^b K_{2,1}(x,s) \psi_k(x) \left(f_1(s) + \sum_{j=1}^{n} C_j^1 \varphi_j(s) \right) dsdx = 0 \end{cases}$$

Для упрощения последних формул введем обозначения:

$$a_{k,j} = \int_a^b \psi_k(x) \varphi_j(x) dx, \; f_k^1 = \int_a^b \int_a^b K_{2,1}(x,s) \psi_k(x) f_1(s) dsdx$$

$$b_{k,j} = \int_a^b \int_a^b K_{1,2}(x,s) \varphi_j(s) \psi_k(x) dsdx, \; f_k^2 = \int_a^b \int_a^b K_{1,2}(x,s) \psi_k(x) f_2(s) dsdx$$

$$d_{k,j} = \int_a^b \int_a^b K_{2,1}(x,s) \varphi_j(s) \psi_k(x) dsdx, \; k, j = \overline{1,n} \, .$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} C_j^1 - \lambda_{1,2} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} C_j^2 = \lambda_{1,2} f_k^2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} C_j^2 - \lambda_{2,1} \sum_{j=1}^{n} d_{k,j} C_j^1 = \lambda_{2,1} f_k^1 \end{cases}. \quad (11)$$

Система двух уравнений (11) допускает матричную запись и ее решение:

$$\begin{cases} AC^1 - \lambda_{1,2} BC^2 = \lambda_{1,2} F^2 \\ AC^2 - \lambda_{2,1} DC^1 = \lambda_{2,1} F^1 \end{cases}. \quad (12)$$

Решая (12), получим такой результат

$$C^1 = A^{-1}\left(\lambda_{1,2} F^2 + \lambda_{1,2} BC^2\right), AC^2 - \lambda_{2,1} DC^1 = \lambda_{2,1} F^1 \Leftrightarrow$$

$$AC^2 - \lambda_{2,1} D\left(A^{-1}\left(\lambda_{1,2} F^2 + \lambda_{1,2} BC^2\right)\right) = \lambda_{2,1} F^1 \Leftrightarrow$$

$$C^2 = \left(A - \lambda_{2,1}\lambda_{1,2} DA^{-1}B\right)^{-1}\left(\lambda_{2,1} F^1 + \lambda_{2,1}\lambda_{1,2} DA^{-1} F^2\right). \quad (13)$$

Аналогично, получим, используя систему (12):

$$\begin{cases} AC^1 - \lambda_{1,2} BC^2 = \lambda_{1,2} F^2 \\ AC^2 - \lambda_{2,1} DC^1 = \lambda_{2,1} F^1 \end{cases},$$

$$C^2 = A^{-1}\left(\lambda_{2,1} F^1 + \lambda_{2,1} DC^1\right), AC^1 - \lambda_{1,2} BC^2 = \lambda_{1,2} F^2 \Leftrightarrow$$

$$AC^1 - \lambda_{1,2} B\left(A^{-1}\left(\lambda_{2,1} F^1 + \lambda_{2,1} DC^1\right)\right) = \lambda_{1,2} F^2 \Leftrightarrow$$

$$C^1 = \left(A - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1} BA^{-1}D\right)^{-1}\left(\lambda_{1,2} F^2 + \lambda_{1,2}\lambda_{2,1} BA^{-1} F^1\right). \quad (14)$$

В формулах (13), (14) элементы матриц A, B, D и векторов F^1, F^2 определяются формулами (11).

Рассмотрим численный пример

$$\begin{cases} u(x) - \int_0^1 xsv(s) ds = x, \\ v(x) - \int_0^1 (x+s) u(s) ds = 2x - 2/3 \end{cases}, \quad (15)$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 1, K_{1,2}(x,s) = xs, K_{2,1}(x,s) = x + s \, ,$$

$$f_1(x) = x, \; f_2(x) = 2x - 2/3, a = 0, b = 1 \, .$$

Пример (15) имеет тот же алгоритм решения, что и задача (8). Вид функций $f_1(x) = x, \; f_2(x) = 2x - 2/3$ показывает, что линейно-независимые системы состоят из двух функций:

$$\{\varphi_1(x) \equiv 1, \varphi_2(x) = x\}, \{\psi_1(x) \equiv 1, \psi_2(x) = x\}, m = n = 2 \, .$$

По формулам (11) находим матричные элементы для СЛАУ:

$$a_{k,j} = \int_0^1 \psi_k(x) \varphi_j(x) dx, \; k, j = \overline{1,2} \, ,$$

$$a_{1,1} = \int_0^1 \psi_1(x) \varphi_1(x) dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1 \, ,$$

$$a_{1,2} = \int_0^1 \psi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} = a_{2,1} \, ,$$

$$a_{2,2} = \int_0^1 \psi_2(x) \varphi_2(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$b_{k,j} = \int_0^1 \int_0^1 xs \varphi_j(s) \psi_k(x) dsdx, \; k, j = \overline{1,2} \, ,$$

$$b_{1,1} = \int_0^1 \int_0^1 xs \varphi_1(s) \psi_1(x) dsdx = \int_0^1 \int_0^1 xsdsdx = \frac{s^2}{2}\Bigg|_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$b_{1,2} = \int_0^1 \int_0^1 xs \varphi_2(s) \psi_1(x) dsdx = \int_0^1 \int_0^1 xs^2 dsdx = \frac{s^3}{3}\Bigg|_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$b_{2,1} = \int_0^1 \int_0^1 xs \varphi_1(s) \psi_2(x) dsdx = \int_0^1 \int_0^1 x^2 sdsdx = \frac{s^2}{2}\Bigg|_0^1 \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$b_{2,2}=\int_0^1\int_0^1 xs\varphi_2(s)\psi_2(x)dsdx=\int_0^1\int_0^1 x^2s^2dsdx=\frac{s^3}{3}\bigg|_0^1\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{9},$$

$$d_{k,j}=\int_0^1\int_0^1(x+s)\varphi_j(s)\psi_k(x)dsdx,\ k,j=\overline{1,2}\ ,$$

$$d_{1,1}=\int_0^1\int_0^1(x+s)dsdx=\int_0^1\left(xs+\frac{s^2}{2}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)_0^1=1,$$

$$d_{1,2}=\int_0^1\int_0^1(x+s)sdsdx=\int_0^1\left(x\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right)_0^1=\frac{7}{12},$$

$$d_{2,1}=\int_0^1\int_0^1(x+s)xdsdx=\int_0^1\left(x^2s+\frac{xs^2}{2}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)_0^1=\frac{7}{12},$$

$$d_{2,2}=\int_0^1\int_0^1(x+s)sxdsdx=\int_0^1\left(x^2\frac{s^2}{2}+\frac{xs^3}{3}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)_0^1=\frac{1}{3},$$

$$f_k^1=\int_0^1\int_0^1(x+s)\psi_k(x)f_1(s)dsdx=\int_0^1\int_0^1(x+s)\psi_k(x)sdsdx, k=\overline{1,2}\ ,$$

$$f_1^1=\int_0^1\int_0^1(x+s)sdsdx=\int_0^1\left(x\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right)_0^1=\frac{7}{12},$$

$$f_2^1=\int_0^1\int_0^1(x+s)xsdsdx=\int_0^1\left(x^2\frac{s^2}{2}+\frac{xs^3}{3}\right)_0^1dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)_0^1=\frac{1}{3},$$

$$f_k^2=\int_0^1\int_0^1 xs\psi_k(x)f_2(s)dsdx=\int_0^1\int_0^1 xs\psi_k(x)(2s-2/3)dsdx, k=\overline{1,2}\ ,$$

$$f_1^2=\int_0^1\int_0^1 xs(2s-2/3)dsdx=\int_0^1\left(\frac{2s^3x}{3}-\frac{2xs^2}{6}\right)_0^1dx=\left(\frac{2x^2}{6}-\frac{x^2}{6}\right)_0^1=\frac{1}{6},$$

$$f_2^2=\int_0^1\int_0^1 x^2s(2s-2/3)dsdx=\int_0^1\left(\frac{2s^3x^2}{3}-\frac{2x^2s^2}{6}\right)_0^1dx=\left(\frac{2x^3}{9}-\frac{x^3}{9}\right)_0^1=\frac{1}{9}.$$

Используя найденные коэффициенты, составим СЛАУ (11):

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^n a_{k,j}C_j^1-\lambda_{1,2}\sum_{j=1}^n b_{k,j}C_j^2=\lambda_{1,2}f_k^2, k,n=\overline{1,2}\\ \sum_{j=1}^n a_{k,j}C_j^2-\lambda_{2,1}\sum_{j=1}^n d_{k,j}C_j^1=\lambda_{2,1}f_k^1, k,n=\overline{1,2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a_{11}C_1^1+a_{12}C_2^1-\left(b_{11}C_1^2+b_{12}C_2^2\right)=f_1^2\\ a_{21}C_1^1+a_{22}C_2^1-\left(b_{21}C_1^2+b_{22}C_2^2\right)=f_2^2\\ a_{11}C_1^2+a_{12}C_2^2-\left(d_{11}C_1^1+d_{12}C_2^1\right)=f_1^1\\ a_{21}C_1^2+a_{22}C_2^2-\left(d_{21}C_1^1+d_{22}C_2^1\right)=f_2^1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}C_1^1+\frac{1}{2}C_2^1-\left(\frac{1}{4}C_1^2+\frac{1}{6}C_2^2\right)=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}C_1^1+\frac{1}{3}C_2^1-\left(\frac{1}{6}C_1^2+\frac{1}{9}C_2^2\right)=\frac{1}{9}\\ C_1^2+\frac{1}{2}C_2^2-\left(C_1^1+\frac{7}{12}C_2^1\right)=\frac{7}{12}\\ \frac{1}{2}C_1^2+\frac{1}{3}C_2^2-\left(\frac{7}{12}C_1^1+\frac{1}{3}C_2^1\right)=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \qquad (16)$$

$C_1^1=0, C_2^1=1, C_1^2=\frac{2}{3}, C_2^2=1$, подстановкой убеждаемся, что найденные коэффициенты $C_1^1=0, C_2^1=1, C_1^2=\frac{2}{3}, C_2^2=1$ удовлетворяют СЛАУ (16).

Согласно формуле (3), решение задачи (15) имеет вид

$$\begin{cases}u(x)=f_1(x)+C_1^1\varphi_1(x)+C_2^1\varphi_2(x)=x+x=2x,\\ v(x)=f_2(x)+C_1^2\varphi_1(x)+C_2^2\varphi_2(x)=2x-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+x=3x\end{cases}\qquad (17)$$

Подставляя численно найденные решения (17) в условие примера (15), получим, что

$$\begin{cases}2x-\int_0^1 xs3sds=2x-xs^3\Big|_0^1=x=f_1(x)\\ 3x-\int_0^1(x+s)2sds=3x-\left(xs^2+\frac{2}{3}s^3\right)_0^1=2x-\frac{2}{3}=f_2(x)\end{cases}$$

численное решение (17) является точным в примере (15).

Замечание 1. В некоторых частных случаях, используя дополнительную информацию о правых частях задачи вида (2) или (8), точное решение задачи вида (2) или (8) можно получить с меньшим набором координатных функций. Найдем численное решение примера (18), используя по одной координатной функции (поскольку правые части (18) содержат всего одну координатную функцию степенного вида $\varphi_1(x)=x, \psi_1(x)=x$. В этом случае матрицы A, B, D и векторы F^1, F^2 являются числами.

$$\begin{cases}u(x)-\int_0^1 xsv(s)ds=x,\\ v(x)-\int_0^1 xu(s)ds=2x\end{cases}, \qquad (18)$$

$$\lambda_{1,2}=\lambda_{2,1}=1, K_{1,2}(x,s)=xs, K_{2,1}(x,s)=x\ ,$$

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=2x, a=0, b=1\ .$$

$$a_{1,1}=\int_0^1\psi_1(x)\varphi_1(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3},$$

$$b_{1,1}=\int_0^1\int_0^1 K_{1,2}(x,s)\varphi_1(s)\psi_1(x)dsdx=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xs\cdot s\cdot xdsdx=\frac{s^3}{3}\bigg|_0^1\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{9},$$

$$d_{1,1}=\int_0^1\int_0^1 K_{2,1}(x,s)\varphi_1(s)\psi_1(x)dsdx=\int_0^1\int_0^1 x\cdot s\cdot xdsdx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\frac{s^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{6},$$

$$f_1^2 = \int_a^b\int_a^b K_{1,2}(x,s)\psi_1(x)f_2(s)dsdx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (xs)x2sdsdx = 2\frac{s^3}{3}\bigg|_0^1 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{9},$$

$$f_1^1 = \int_a^b\int_a^b K_{2,1}(x,s)\psi_1(x)f_1(s)dsdx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x\cdot x\cdot sdsdx = \int_0^1\left(\frac{s^2x^2}{2}\right)_0^1 dx = \left(\frac{x^3}{6}\right)_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Запишем СЛАУ, используя формулу (11), $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 1$.

$$\begin{cases} a_{11}C_1^1 - b_{11}C_1^2 = f_1^2 \\ a_{11}C_1^2 - d_{11}C_1^1 = f_1^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}C_1^1 - \frac{1}{9}C_1^2 = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3}C_1^2 - \frac{1}{6}C_1^1 = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$C_1^1 = 1, C_1^2 = 1.$$

По формуле (9) получим

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + C_1^1\varphi_1(x) = x + 1\cdot x = 2x, \\ v(x) = f_2(x) + C_1^2\varphi_1(x) = 2x + 1\cdot x = 3x \end{cases}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2x - \int_0^1 xs3sds = 2x - xs^3\Big|_0^1 = x = f_1(x) \\ 3x - \int_0^1 x2sds = 3x - \left(xs^2\right)_0^1 = 2x = f_2(x) \end{cases}.$$

В примере (18) найденное численное решение $u(x) = 2x, v(x) = 3x$ является точным. По сравнению с примером (15), в котором вычислено 16 интегральных коэффициентов, в примере (18), мы вычислили всего 5 интегральных коэффициентов, то есть в три раза меньше.

Замечание 2. Предположим, что точное решение задачи (2) имеет разложение по системе координатных функций в виде бесконечного ряда или с конечным числом слагаемых $N>n$, превышающим число координатных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n; n < N$.

Тогда точное решение имеет вид [1], [2], [3]:

$$y_i(x)_{exact} = f_i(x) + \sum_{j=1}^N C_j^i\varphi_j(x),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,N} \quad (18)$$

или
$$y_i(x)_{exact} = f_i(x) + \sum_{j=1}^\infty C_j^i\varphi_j(x),\ i = \overline{1,m},\ j = 1,2,3,... \quad (19)$$

$$y_i(x)_{num} = f_i(x) + \sum_{j=1}^n C_j^i\varphi_j(x),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

С учетом формулы (3) получим невязку для каждой функции решения задачи (2) соответственно в случаях (18) и (19):

$$r_i(x) = y_i(x)_{exact} - y_i(x)_{num} = \sum_{j=n+1}^N C_j^i\varphi_j(x),\ i = \overline{1,m}, \quad (20)$$

$$r_i(x) = y_i(x)_{exact} - y_i(x)_{num} = \sum_{j=n+1}^\infty C_j^i\varphi_j(x),\ i = \overline{1,m}. \quad (21)$$

Если системы линейно-независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n, \{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ являются полиномами, то, как показано в работах [1], [2], [3] они выбираются, начиная с самых грубых функций (дающих максимальный вклад погрешности без их использования), например, в виде степенных мономов ($n+1$ функция в системе) $\{\varphi_0(x) = \psi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \psi_1(x) = x, ..., \varphi_n(x) = \psi_n(x) = x^n\}$.

Тогда невязки решения в формулах (20), (21) дают одинаковую асимптотику решения:

$$\|r_i\| = \|y_{i_{exact}} - y_{i_{num}}\| = O\left(\sum_{j=n+1}^\infty C_j^i\varphi_j(x)\right) = O\left(x^{n+1}\right),\ i = \overline{1,m}. \quad (22)$$

Рассмотрим достаточные условия корректности алгоритма (13), (14) численного решения задачи (8).

Теорема 1. Достаточные условия корректности численного решения задачи (8). Пусть матрица А обратима (существуют матрица A^{-1}обратная к А) и выполнено условие $|\lambda_{1,2}||\lambda_{2,1}|\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\| \le q < 1$, тогда алгоритм (13), (14) корректен и верна оценка

$$\left\|\left(A - \lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}B\right)^{-1}\right\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-q}, q = |\lambda_{1,2}||\lambda_{2,1}|\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\|$$

$$\left\|\left(A - \lambda_{2,1}\lambda_{1,2}BA^{-1}D\right)^{-1}\right\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-q}. \quad (23)$$

Доказательство

Согласно формулам (13), (14) задачи (8)

$$C^1 = \left(A - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}D\right)^{-1}\left(\lambda_{1,2}F^2 + \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}F^1\right),$$

$$C^2 = \left(A - \lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}B\right)^{-1}\left(\lambda_{2,1}F^1 + \lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}F^2\right)$$

векторы C^1, C^2 коэффициентов разложения функций решения $u(x), v(x)$ по системе координатных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ существуют тогда и только тогда, если существуют обратные матрицы A^{-1} и $\left(A - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}D\right)^{-1}$, $\left(A - \lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}B\right)^{-1}$.

Матрица A обратима по условию теоремы 1, что обеспечивает существование векторов $\left(\lambda_{1,2}F^2+\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}F^1\right)$, $\left(\lambda_{2,1}F^1+\lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}F^2\right)$ в формулах (13), (14) с конечной нормой
$\left\|\lambda_{1,2}F^2+\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}F^1\right\|<\infty, \left\|\lambda_{2,1}F^1+\lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}F^2\right\|<\infty$.

Отметим, что условие $|\lambda_{1,2}\|\lambda_{2,1}|\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\|\le q<1$ является общим для матриц $\left(A-\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}D\right)^{-1}$, $\left(A-\lambda_{2,1}\lambda_{1,2}DA^{-1}B\right)^{-1}$, поэтому достаточно доказать обратимость одной из матриц.

Так как матрица Z представима в виде произведения двух матриц

$$Z=A-\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}BA^{-1}D=A\left(I-\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}A^{-1}BA^{-1}D\right),$$

то если матрица Z обратима, получим $Z^{-1}=\left(I-\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}A^{-1}BA^{-1}D\right)^{-1}A^{-1}$. Здесь I – единичная квадратная матрица размерности ($n\times n$). По условию Теоремы 1 выполнено условие $|\lambda_{1,2}\|\lambda_{2,1}|\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\|\le q<1$, следовательно,

$$\left(I-\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}A^{-1}BA^{-1}D\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}\right)^k\left(A^{-1}BA^{-1}D\right)^k$$

$$Z^{-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}\right)^k\left(A^{-1}BA^{-1}D\right)^k\right)A^{-1}.$$

С учетом последней формулы и условия $|\lambda_{1,2}\|\lambda_{2,1}|\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\|\le q<1$ оценим по норме матрицу Z^{-1}:

$$\|Z^{-1}\|\le\left(\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}\right)^k\left(A^{-1}BA^{-1}D\right)^k\right\|\right)\|A^{-1}\|\le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\lambda_{1,2}\|\lambda_{2,1}|\right)^k\left(\|A^{-1}\|^2\|B\|\|D\|\right)^k\right)\|A^{-1}\|\le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)\|A^{-1}\|=\frac{\|A^{-1}\|}{1-q}.$$

Теорема 1 доказана.

Сравним условия корректности в диагональной задаче (24) из системы уравнений Фредгольма второго рода с условиями корректности численного алгоритма для одного интегрального уравнения (частный случай системы уравнений (24) при $i=m=1$):

$$y_i(x)-\lambda_{i,i}\int_a^b K_{i,i}(x,s)y_j(s)ds=f_i(x), i=\overline{1,m}. \qquad (24)$$

Система (24) имеет решение и невязку:

$$y_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j^i\varphi_j(x),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

$$R_i(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j^i\varphi_j(x)-\lambda_{i,i}\int_a^b K_{i,i}(x,s)\left(f_i(s)+\sum_{j=1}^{n}C_j^i\varphi_j(s)\right)ds, i=\overline{1,m}.$$

Требуем ортогональности невязок всем n линейно-независимым функциям второй системы $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^n$ $<R_i,\psi_l>=0,\ i=\overline{1,m}, l=\overline{1,n}$

$$\sum_{j=1}^{n}C_j^i\int_a^b\varphi_j(x)\psi_l(x)dx-\lambda_{i,i}\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)\left(f_i(s)+\sum_{j=1}^{n}C_j^i\varphi_j(s)\right)dsdx=0,$$

$i=\overline{1,m},\ j,l=\overline{1,n}$

$$\sum_{j=1}^{n}C_j^i\int_a^b\varphi_j(x)\psi_l(x)dx-\lambda_{i,i}\sum_{j=1}^{n}C_j^i\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)\varphi_j(s)dsdx=$$

$$=\lambda_{i,i}\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)f_i(s)dsdx, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \qquad (25)$$

$$a_{l,j}^i=\int_a^b\varphi_j(x)\psi_l(x)dx-\lambda_{i,i}\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)\varphi_j(s)dsdx$$

$i=\overline{1,m}; l,j=\overline{1,n}$

$$f_l^i=\lambda_{i,i}\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)f_i(s)dsdx, i=\overline{1,m}, l=\overline{1,n}.$$

Тогда формула (25) примет простой вид:

$$A^iC^i=F^i\Leftrightarrow C^i=\left(A^i\right)^{-1}F^i, i=\overline{1,m}. \qquad (26)$$

В формуле (26) $A^i(n\times n), i=\overline{1,m}$ матрица коэффициентов с номером i, $C^i(n\times 1), i=\overline{1,m}$ – вектор-столбец размерности n с номером i. $F^i, i=\overline{1,m}$ – вектор-столбец правой части в i-й строке системы интегральных уравнений (высоты n). Все указанные коэффициенты определяются формулой (25). Как показано в работах [1], [2], [3], для одного интегрального уравнения Фредгольма в системе уравнений (26), решение существует и единственно тогда и только тогда, если $\det(A)\ne 0$, соответственно в (26) $\det\left(A^i\right)\ne 0, i=\overline{1,m}$, что дополнительно накладывает ограничения. Ограничения на элементы матриц $A^i, i=\overline{1,m}$, в том числе на величину параметров $\lambda_{i,i}$ и норму интегральных ядер $\|K_{i,i}\|, i=\overline{1,m}$.

Разобьем матрицу $A^i(n\times n), i=\overline{1,m}$ на разность двух матриц и введем обозначения:

$$b_{l,j}^i=\int_a^b\varphi_j(x)\psi_l(x)dx=b_{l,j};\ d_{l,j}^i=\int_a^b\int_a^b K_{i,i}(x,s)\psi_l(x)\varphi_j(s)dsdx,$$

$$a_{l,j}^i=b_{l,j}-\lambda_{i,i}d_{l,j}^i\Leftrightarrow A^i=B-\lambda_{i,i}D_i, i=\overline{1,m}. \qquad (27)$$

Докажем Теорему 2.

Теорема 2 (достаточные условия корректности алгоритма (25), (26)). Пусть матрица B в (27) обратима и выполнены условия $|\lambda_{i,i}|\|B^{-1}\|\|D_i\|\le q_i<1, i=\overline{1,m}, \max_{i=\overline{1,m}}q_i=q<1$, тогда алгоритм (26) вычисления коэффициентов $C^i, i=\overline{1,m}$ корректен.

Верны оценки:

$$\left\|\left(A^i\right)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|B^{-1}\right\|}{1-q}, i=\overline{1,m}. \qquad (28)$$

Доказательство

По условию Теоремы 2 матрица B обратима, тогда

$$A^i = B-\lambda_{i,i}D_i = B\left(I-\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right), i=\overline{1,m}.$$

Тогда формула (26) $C^i=\left(A^i\right)^{-1}F^i, i=\overline{1,m}$ корректна, если и только если обратимы матрицы

$$A^i = B\left(I-\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right), i=\overline{1,m},$$

$$A^i \equiv Z_i = B\left(I-\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right), Z_i^{-1}=\left(I-\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right)^{-1}B^{-1}.$$

По условию Теоремы 2 $\left|\lambda_{i,i}\right|\left\|B^{-1}\right\|\left\|D_i\right\| \le q_i<1$, имеем:

$$Z_i^{-1}=\left(I-\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right)^{-1}B^{-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda_{i,i}B^{-1}D_i\right)^k\right)B^{-1}, i=\overline{1,m}.$$

Последнюю матрицу Z_i^{-1} оценим по норме

$$\left\|Z_i^{-1}\right\| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\lambda_{i,i}\right|\left\|B^{-1}\right\|\left\|D_i\right\|\right)^k\right)\left\|B^{-1}\right\| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}q_i^{\,k}\right)\left\|B^{-1}\right\| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)\left\|B^{-1}\right\| = \frac{\left\|B^{-1}\right\|}{1-q}, i=\overline{1,m}.$$

Теорема 2 доказана.

По сравнению с одним интегральным уравнением Фредгольма второго рода в диагональной задаче с системой интегральных уравнений(24) (Теорема 2) требуется не только обратимость матрицы B с одним условием $\left|\lambda\right|\left\|B^{-1}\right\|\left\|D\right\| \le q<1$, но и m неравенств (условий-ограничений $\left|\lambda_{i,i}\right|\left\|B^{-1}\right\|\left\|D_i\right\| \le q_i, i=\overline{1,m}, \max\limits_{i=\overline{1,m}} q_i=q<1$).

В работе получены основные результаты:

1) Поставлена задача для системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами на квадрате $K_{i,j}(x,s)\in C\left([a,b]\times[a,b]\right), i,j=\overline{1,m}$. Введено определение диагональной задачи и антидиагональной задачи.
2) Впервые для задачи общего вида (2) предложен алгоритм ее численного решения обобщенным проекционным методом Петрова–Галеркина (3)–(7). Идея состоит в требовании ортогональности m невязок интегральных уравнений системы к n функциям второй линейно-независимой системы $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$. Предложен алгоритм решения антидиагональной системы двух уравнений Фредгольма второго рода (8)–(14). Формулы (13), (14) матричного вида для коэффициентов разложения $C^1, C^2 \in R^n$ решения $u(x), v(x)$ по первой системе $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ функций. Указана формула для невязки неизвестных функций между точным и численным решением.
3) Используя алгоритм (8)–(14) численно решены два примера (15) и (17), в которых численные решения примеров совпали с точными решениями.
4) Доказаны Теоремы 1, 2 (достаточные условия корректности численных алгоритмов (13), (14) для антидиагональной задачи с двумя уравнениями Фредгольма и (25), (26) для диагональной задачи (24) общего вида).

Отметим также, что решение краевых задач в частных производных иногда сводится к решению интегральных уравнений [5], [6], [9]. Последние 10 лет активно изучаются уравнения с производными дробного порядка, сводимые к интегральным уравнениям [10].

Список источников

1. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 240 с. ISBN 978-5-9963-2266-4.
4. *Васильева А.Б.* Интегральные уравнения: учебник / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов; А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. Изд. 3-е, стер. СПб. [и др.]: Лань, 2009. 159 с. ISBN 978-5-8114-0911-2.
5. *Полянский И.С., Логинов К.О.* Приближенный метод решения задачи конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ме-

ханика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 1. С. 107–129. DOI 10.35634/vm220108.

6. *Юденков А.В., Володченков А.М.* Устойчивость математических моделей основных задач анизотропной теории упругости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 1. С. 112–124. DOI 10.35634/vm200108.
7. *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К.* [и др.] Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 4(59). С. 9–17. DOI 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17.
8. *Ильюшин А.А.* Труды. Теория термовязкоупругости. Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 288 с.
9. *Волосов К.А.* Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 2(34). С. 29–39.
10. *Кумыкова С.К., Эржибова Ф.А., Гучаева З.Х.* Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 9–1. С. 73–78.

References

1. *Bahvalov N.S., Lapin A.V., CHizhonkov E.V.* Chislennye metody v zadachah i uprazhneniyah: ucheb. posobie. M.: BINOM. Laboratoriya znanij; 2010. 240 s. (In Russ.).
2. *Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M.* Chislennye metody. 7-e izd. M.: BINOM. Laboratoriya znanij; 2011. 636 s. (In Russ.).
3. *Bahvalov N.S.* Chislennye metody v zadachah i uprazhneniyah / N.S. Bahvalov, A.V. Lapin, E.V. Chizhonkov. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2013; 240 s. ISBN 978-5-9963-2266-4. (In Russ.).
4. *Vasil'eva A.B.* Integral'nye uravneniya: uchebnik / A.B. Vasil'eva, N.A. Tihonov; A.B. Vasil'eva, N.A. Tihonov. Izd. 3-e, ster. SPb. [i dr.]: Lan'; 2009. 159 s. ISBN 978-5-8114-0911-2. (In Russ.).
5. *Polyanskij I.S., Loginov K.O.* Priblizhennyj metod resheniya zadachi konformnogo otobrazheniya proizvol'nogo mnogougol'nika na edinichnyj krug. Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 2022;32(1):107-129. (In Russ.). DOI 10.35634/vm220108.
6. *Yudenkov A.V., Volodchenkov A.M.* Ustojchivost' matematicheskih modelej osnovnyh zadach anizotropnoj teorii uprugosti. Vestnik Udmurtsko-go universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'-yuternye nauki. 2020;30(1):112-124. (In Russ.). DOI 10.35634/vm200108.
7. *Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov Yu.F.* Solution of the Fredholm Integral Equations Method of Replacing the Integral by a Quadrature With the Twelveth Order of Error in Matrix Form. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022;4(59):9-17. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17.
8. *Il'yushin A.A.* Trudy. Teoriya termovyazkouprugosti. T. 3. M.: FIZMATLIT; 2007. 288 s. (In Russ.).
9. *Volosov K.A.* Konstrukciya reshenij kvazilinejnyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi. Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. 2008; 11(2(34)): 29-39. (In Russ.).
10. *Kumykova S.K., Erzhibova F.A., Guchaeva Z.H.* Zadacha tipa zadachi Bicadze – Samarskogo dlya uravneniya smeshannogo tipa. Sovremennye naukoemkie tekhnologii. 2016;(9-1):73-78. (In Russ.).

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского Университета Транспорта (127994, ГСП-4, Россия, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского Университета Транспорта (127994, ГСП-4, Россия, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238, AuthorID 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Moscow State Technical University. N. E. Bauman (5-1, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9-9, Obraztsova Street, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC Russian University of Transport (9-9, Obraztsova Street, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin Street, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238; AuthorID 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin Street, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.