Научная статья
УДК 517.929
DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-15-29

Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом

Сергей Алексеевич Гусаренко
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
sagusarenko@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются необходимые и достаточные условия устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздывающим аргументом. Предлагается новый метод исследования устойчивости системы, основанный на прямой оценке компонент матрицы-функции Коши.

Ключевые слова: *устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом; устойчивость систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом; матрица Коши; W-метод*

Для цитирования: *Гусаренко С. А.* Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 15–29. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-15-29.

Статья поступила в редакцию 02.12.2022; одобрена после рецензирования 29.01.2023; принята к публикации 15.03.2023.

Research article

About the Second Order Linear Differential Equations Systems Stability With a Delayed Argument

Sergey A. Gusarenko
Perm State University, Perm, Russia
sagusarenko@mail.ru

Abstract. The necessary and sufficient stability conditions for a two linear differential equations system with a concentrated delayed argument are considered. A new research method of system stability is proposed. The new method based on a Cauchy function-matrix components direct assessment.

Keywords: *stability of equations with delayed argument; stability of systems of differential equations with delayed argument; Cauchy matrix; W-method*

For citation: *Gusarenko S. A.* About the Second Order Linear Differential Equations Systems Stability With a Delayed Argument. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;1(60):15-29. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-15-29.

The article was submitted 02.12.2022; approved after reviewing 29.01.2023; accepted for publication 15.03.2023.

1. Основные определения и понятия

1.1. Пространства функций на полуоси

Обозначим через L пространство локально суммируемых функций $x:[a,\infty)\to \mathrm{P}$, а через $\mathrm{L}_\infty \subset \mathrm{L}$ пространство функций ограниченных в существенном на полуоси с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{t\ge a}|x(t)|$. В пространстве $\mathrm{L}_\infty^2 = \mathrm{L}_\infty \times \mathrm{L}_\infty$ определим норму равенством $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \|x_1\|_\infty + \|x_2\|_\infty$. Подпространство функций из L, суммируемых на полуоси с нормой $\|x\|_1 = \int_a^\infty |x(t)|\,dt$, будем обозначать L_1. Через W обозначим пространство таких локально абсолютно непрерывных функций $x:[a,\infty)\to \mathrm{P}$, что $\dot{x}\in \mathrm{L}$, а через $\mathrm{W}_\infty \subset \mathrm{W}$ подпространство ограниченных на полуоси функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t\ge a}|x(t)|$. В пространстве $\mathrm{W}_\infty^2 = \mathrm{W}_\infty \times \mathrm{W}_\infty$ норма определяется равенством $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \|x_1\|_\infty + \|x_2\|_\infty$.

1.2. Система дифференциальных уравнений

Для скалярного произведения соответствующих строк матриц $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ размерности 2x2 будет использоваться обозначение

$$P\cdot Q = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} + p_{12}q_{12} \\ p_{21}q_{21} + p_{22}q_{22} \end{pmatrix}.$$

В статье рассматривается система второго порядка линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим сосредоточенным аргументом вида

$$\dot{x}(t) + P(t)\cdot x[h(t)] = f(t),\ t\ge a \qquad (1)$$

где $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{L}^2$, $P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$, $p_{ij}\in \mathrm{L}$, вектор-функция $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $x[h(t)] = \begin{pmatrix} x_1(h_{11}(t)) & x_2(h_{12}(t)) \\ x_1(h_{21}(t)) & x_2(h_{22}(t)) \end{pmatrix}$, причем $x_i(\xi)=0$, если $\xi < a$, функции $h_{ij}:[a,\infty)\to \mathrm{P}$ измеримы и $h_{ij}(t)\le t$ при всех $1\le i,j\le 2$. Под решением системы (1) понимается вектор-функция $x\in \mathrm{W}^2$, удовлетворявшая равенству (1) почти всюду на каждом конечном промежутке.

1.3. Постановка задачи

Целью работы является получение эффективных коэффициентных признаков, гарантирующих устойчивость системы (1).

Будем говорить, что система (1) устойчива (по правой части), если для любой ограниченной на полуоси вектор-функции f решение системы (1) также ограничено на полуоси. Отметим при этом, что устойчивость системы (1) по правой части непосредственно связана с асимптотическими свойствами решений соответствующей однородной системы

$$\dot{x}(t) + P(t)\cdot x[h(t)] = 0,\ t\ge a. \qquad (2)$$

В частности, при некоторых естественных ограничениях, из устойчивости по правой части следует экспоненциальная оценка решений однородной системы (2) $|x_i(t)| \le Ne^{-\alpha(t-a)}$, $\alpha>0$, т. е. экспоненциальная устойчивость. Теоремы такого типа носят название теорем типа Боля–Перрона [1, с. 112;2, с. 127]. Для системы (1), например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. [2, с. 105; 3]. Если система (1) устойчива по правой части и

$$\operatorname*{vraisup}_{\substack{t\ge a \\ 1\le i,j\le 2}} (t - h_{ij}(t)) < \delta < \infty,$$

то решения соответствующей однородной системы (2) экспоненциально устойчивы.

1.4. Формула Коши и устойчивость по правой части

Как известно [1, с. 68], общее решение системы (1) представимо формулой Коши:

$$x(t) = C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s)f(s)\,ds, \qquad (3)$$

где $C:\Delta\to \mathrm{P}^2, \Delta = \{(t,s)\in \mathrm{P}^2 : a\le s\le t\}$ – матрица-функция Коши [1, с. 68]. В координатном виде формула Коши (3) имеет вид:

$$x_1(t)=C_{11}(t,a)x_1(a)+C_{12}(t,a)x_2(a)+ \int_a^t \left(C_{11}(t,s)f_1(s)+C_{12}(t,s)f_2(s)\right)ds,$$

$$x_2(t)=C_{21}(t,a)x_1(a)+C_{22}(t,a)x_2(a)+ \int_a^t \left(C_{21}(t,s)f_1(s)+C_{22}(t,s)f_2(s)\right)ds,$$

где $C_{ij}(t,s)$ – компоненты матрицы Коши. Отсюда следует, что устойчивость по правой части эквивалента непрерывному действию оператора Коши $(\mathbf{C}f)(t)=\int_a^t C(t,s)f(s)ds$ из пространства L^2_∞ в пространство W^2_∞.

Таким образом, вопрос об устойчивости системы (1) можно свести к существованию интегральных оценок вида

$$\sigma_{ij}=\sup_{t\ge a}\int_a^t \left|C_{ij}(t,s)\right|ds<\infty$$

для всех компонент матрицы Коши C, гарантирующих ограниченное действие оператора Коши $\mathbf{C}$ из пространства L^2_∞ в W^2_∞.

1.5. Методы для исследования устойчивости

Для системы с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием устойчивость определяется расположением корней характеристического квазиполинома этой системы. Для системы с переменными коэффициентами и запаздыванием, чтобы установить факт устойчивости системы (1), используются разнообразные методы. Построение оценки матрицы Коши $\Gamma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$ является при этом одним наиболее эффективных приемов. Отметим, что построить матрицу Γ точно можно только в исключительных случаях.

Для оценки матрицы Коши можно применять W-метод Азбелева. Суть метода заключается в выборе некоторой вспомогательной "модельной" устойчивой системы. Тогда для всех систем, достаточно близких к модельной, свойство устойчивости сохраняется.

Рассмотрим в качестве модельной систему

$$\dot{x}(t)+P(t)\cdot x[g(t)]=f(t),\ t\ge a, \qquad (4)$$

где функции $g_{ij}:[a,\infty)\to \mathrm{P}$ измеримы и $g_{ij}(t)\le t$ при всех $1\le i,j\le 2$.

Предположим, что для всех компонент матрицы Коши C^0 системы (4) известны оценки $\sigma^0_{ij}=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|C^0_{ij}(t,s)\right|ds<\infty$. Построим матрицы $\Gamma^0=\begin{pmatrix}\sigma^0_{11} & \sigma^0_{12}\\ \sigma^0_{21} & \sigma^0_{22}\end{pmatrix}$, $\Pi=\begin{pmatrix}\|p_{11}\|_\infty & \|p_{12}\|_\infty\\ \|p_{21}\|_\infty & \|p_{22}\|_\infty\end{pmatrix}$ и

$$\Theta=\begin{pmatrix}\|p_{11}(g_{11}-h_{11})\|_\infty & \|p_{12}(g_{12}-h_{12})\|_\infty\\ \|p_{21}(g_{21}-h_{21})\|_\infty & \|p_{22}(g_{22}-h_{22})\|_\infty\end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Система (1) устойчива тогда и только тогда, когда существует такое модельное уравнение (4), что спектральный радиус матрицы $\Gamma^0\Theta\Pi$ меньше единицы. При этом для матрицы Γ справедливо покомпонентное неравенство:
$\Gamma\le(\mathrm{E}-\Gamma^0\Theta\Pi)^{-1}\Gamma^0(\mathrm{E}+\Theta)$.

Доказательство. Для доказательства необходимости достаточно положить $g_{ij}(t)=h_{ij}(t)$. Покажем достаточность. Положим $x(a)=0$. Из системы (1) следует покомпонентное неравенство $\begin{pmatrix}\|\dot{x}_1\|_\infty\\ \|\dot{x}_2\|_\infty\end{pmatrix}\le \Pi X+F$, где $X=\begin{pmatrix}\|x_1\|_\infty\\ \|x_2\|_\infty\end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix}\|f_1\|_\infty\\ \|f_2\|_\infty\end{pmatrix}$. Запишем эквивалентное системе (1) уравнение в виде

$$x(t)=\int_a^t C^0(t,s)(P(s)\cdot(x[g(s)]-x[h(s)]+f(s))ds.$$

Так как

$$x[h(s)]-x[g(s)]=\begin{pmatrix}\int_{\bar{h}_{11}(t)}^{\bar{g}_{11}(t)}\dot{x}_1(s)ds & \int_{\bar{h}_{12}(t)}^{\bar{g}_{12}(t)}\dot{x}_2(s)ds\\ \int_{\bar{h}_{21}(t)}^{\bar{g}_{21}(t)}\dot{x}_1(s)ds & \int_{\bar{h}_{22}(t)}^{\bar{g}_{22}(t)}\dot{x}_2(s)ds\end{pmatrix},$$

где $\bar{h}_{ij}(t)=\max(h_{ij}(t),a),\bar{g}_{ij}(t)=\max(g_{ij}(t),a)$, то $\|P(\cdot)\cdot(x[g(\cdot)]-x[h(\cdot)])\|_\infty\le\Theta(\Pi X+F)$, $X\le\Gamma^0(\Theta(\Pi X+F)+F)$. Отсюда следует устойчивость системы (1) и оценка $X\le(\mathrm{E}-\Gamma^0\Theta\Pi)^{-1}\Gamma^0(\mathrm{E}+\Theta)F$.

Рассмотрим теперь более общее модельное уравнение.

$$\dot{x}(t)+B(t)x[g(t)]=f(t),t\ge a, \qquad (5)$$

для компонент матрицы Коши которого известны оценки Γ^0. Построим матрицу

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\|p_{11}-b_{11}\|_\infty & \|p_{12}-b_{12}\|_\infty\\ \|p_{21}-b_{21}\|_\infty & \|p_{22}-b_{22}\|_\infty\end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Система (1) устойчива тогда и только тогда, когда существует такое модельное уравнение (5), что спектральный радиус матрицы $\Gamma^0(\Lambda+\Theta\Pi)$ меньше единицы. При этом для матрицы Γ справедливо покомпонентное неравенство

$$\Gamma \le (\mathrm{E}-\Gamma^0(\Lambda+\Theta\Pi))^{-1}\Gamma^0(\mathrm{E}+\Theta).$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Основная трудность в применении теорем 2, 3 заключается, очевидно, в выборе модельного уравнения, для которого известна оценка компонент матрицы Γ^0. В связи с этим в качестве модельного оказывается возможным использовать достаточно узкий класс уравнений.

В этой статье предлагается новой метод доказательства устойчивости системы (1), основанный на непосредственной оценке компонент матрицы Коши. Как известно, для системы (1) справедлива обобщенная формула Коши для так называемого "s-урезанного" уравнения [1, с. 67].

$$x(t)=C(t,s)x(s)+\int_s^t C(t,\xi)f(\xi)\,d\xi,\ t\ge s. \quad (6)$$

Пусть матрица-функция $\mathrm{X}:[a,\infty)\to \mathrm{R}^2\times\mathrm{R}^2$ обратима при каждом $t\ge a$, причем $\mathrm{X}\in \mathrm{W}^2_\infty\times\mathrm{W}^2_\infty$.

Тогда из формулы Коши (6) следует, что

$$\mathrm{X}(t)=C(t,s)\mathrm{X}(s)+\int_s^t C(t,\xi)(\dot{\mathrm{X}}(\xi)+P(\xi)\cdot\mathrm{X}[h(\xi)])\,d\xi.$$

Отсюда получаем представление

$$C(t,s)=\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(s)^{-1}-\int_s^t C(t,\xi)(\dot{\mathrm{X}}(\xi)+P(\xi)\cdot\mathrm{X}[h(\xi)])d\xi\,\mathrm{X}(s)^{-1}.$$

Оценив все компоненты этого представления, можно получить оценку компонент матрицы Коши.

1.6. Функция Коши для скалярного дифференциального уравнения с постоянным запаздывающим аргументом

Решение скалярного дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t)+x(t-\tau)=f(t),\ t\ge a,$$
$$x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<a,$$

где $f\in \mathrm{W}$, может быть получено методом шагов. Оно представимо формулой Коши $x(t)=C(t,a)x(a)+\int_a^t C(t,s)f(s)ds$, причем функция Коши имеет вид $C(t,s)=c(t-s)$. Функция c является решением однородной задачи Коши:

$$\dot{c}(t)+c(t-\tau)=0,\ t\ge 0,$$
$$x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<0,$$
$$c(0)=1,$$

и имеет вид

$$c(t)=\sum_{k=0}^{K}(-1)^k\frac{(t-k\tau)^k}{k!},$$

где K – целая часть числа $\frac{t}{\tau}$.

При $\tau\le\frac{1}{e}$ функция $c(t)\ge 0$ неотрицательна и монотонно убывает к нулю.

Если $\tau<\frac{\pi}{2}$, то уравнение устойчиво и $\lim\limits_{t\to\infty}c(t)=0$, причем при $\tau>\frac{1}{e}$ функция c осциллирует [2, с. 66].

Определим функцию $k\colon[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ равенством $\kappa(\tau)=\sup\limits_{t\ge a}\int_a^t|C(t,s)|ds=\int_0^{+\infty}|c(s)|ds$ [2, с. 66]. Функция $k\colon[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ не убывает, причем $\kappa(\tau)=1$ при $\tau\in[0,\frac{1}{e}]$ и $\lim\limits_{\tau\to\frac{\pi}{2}-0}\kappa(\tau)=+\infty$.

Для оценки функции κ удобно использовать ряд

$$\kappa(\tau)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}|c(t_k+\tau)|,$$

где t_k – последовательность нулей функции c.

Функция Коши уравнения

$$\dot{x}(t)+px(t-\tau)=f(t),\ t\ge a,$$
$$x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<a,$$

представима в виде $C(t,s)=c(p(t-s))$, и при этом $\sup\limits_{t\ge a}\int_a^t|C(t,s)|ds=\frac{\kappa(p\tau)}{p}$.

Функция Коши уравнения

$$\dot{x}(t)+p(t)x(h(t))=f(t),\ t\ge a,$$
$$x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<a,$$

если $\int_{h(t)}^t p(s)\,ds=\begin{cases}\tau,\ \text{при}\ h(t)\ge a,\\ 0,\ \text{при}\ h(t)<a,\end{cases}$ $p(t)>0$

представима в виде

$$C(t,s) = c\left(\int_s^t p(\xi)\,d\xi\right).$$

Если

$$\int_0^\infty p(s)\,ds = +\infty,$$

то $\sup\limits_{t\ge a}\int_a^t |C(t,s)|\,ds = \int_0^\infty \frac{|c(s)|}{p(s)}\,ds \le \frac{\kappa(\tau)}{\inf\limits_{t\ge a} p(t)}$.

2. Система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\dot{x}(t) + Px(t) = f(t),\, t \ge a, \qquad (7)$$

с постоянными коэффициентами

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Все компоненты матрицы Коши системы (7) представимы в разностном виде: $C_{ij}(t,s) = c_{ij}(t-s)$, где матрица-функция $c:[0,\infty)\to \mathrm{R}$ определяется равенством $c(t) = C(t+a,a)$.

Тогда $\int_a^t |C_{ij}(t,s)|\,ds = \int_a^t |c_{ij}(t-s)|\,ds = \int_0^{t-a} |c_{ij}(s)|\,ds$ и интегральная оценка соответствующей компоненты матрицы Коши имеет вид $\sigma_{ij} = \int_0^\infty |c_{ij}(s)|\,ds$.

Отметим также, что так как $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = c(t-s)$, где X – фундаментальная матрица системы (7), то $c(t) = X(t+a)X^{-1}(a)$.

Характеристическое уравнение системы (7) имеет вид:

$$\mu^2 + (p_{11}+p_{22})\mu + p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = 0. \qquad (8)$$

Корни этого уравнения равны

$$\mu_1 = -\frac{p_{11}+p_{22}}{2} + \sqrt{D},\ \mu_2 = -\frac{p_{11}+p_{22}}{2} - \sqrt{D},$$

где $D = \frac{(p_{11}-p_{22})^2}{4} + p_{12}p_{21}$ – дискриминант характеристического уравнения.

Как известно, система (7) устойчива тогда и только тогда, когда действительная часть корней характеристического уравнения (6) $\Re\mu_{1,2} < 0$, что эквивалентно условию $\lim\limits_{t\to\infty} c(t) = 0$.

Для устойчивости системы (7) необходимо и достаточно, чтобы $p_{11}+p_{22} > 0$ и $p_{12}p_{21} < p_{11}p_{22}$.

2.1. Оценка знакопостоянных компонент матрицы Коши

Если решение системы (7) постоянный вектор x, то из формулы Коши (3) следует, что $x = \left(C(t,a) + \int_a^t C(t,s)P\,ds\right)x$,

т. е. $E = c(t-a) + \int_0^{t-a} c(s)P\,ds$.

В случае обратимости матрицы P получаем представление $\int_0^t c(s)\,ds = (E - c(t))P^{-1}$.

Если уравнение (7) устойчиво, то тогда $\int_0^\infty c(t)\,dt = P^{-1}$.

Таким образом, если компонента c_{ij} матрицы c сохраняет свой знак при $t \ge 0$, то $\sigma_{ij} = |p_{ij}^{-}|$, где p_{ij}^{-} – компоненты обратной матрицы P^{-1}. Отметим также, что если все компоненты матрицы c неотрицательны (то есть при условии $p_{12} \le 0$, $p_{21} \le 0$), то тогда просто $\Gamma = P^{-1}$ или

$$\sigma_{11} = \frac{p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}},\ \sigma_{12} = -\frac{p_{12}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}},$$

$$\sigma_{21} = -\frac{p_{21}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}},\ \sigma_{22} = \frac{p_{11}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}.$$

2.2. Оценка компонент матрицы Коши в случае положительного дискриминанта

Пусть $D > 0$. Тогда характеристическое уравнение (6) имеет два разных действительных корня μ_1 и μ_2. Фундаментальная матрица системы (7) равна

$$X(t) = \begin{pmatrix} -p_{12}e^{\mu_1(t-a)} & -p_{12}e^{\mu_2(t-a)} \\ (\mu_1 + p_{11})e^{\mu_1(t-a)} & (\mu_2 + p_{11})e^{\mu_2(t-a)} \end{pmatrix},$$

а компоненты матрицы c имеют вид:

$$c_{11}(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{p_{22}-p_{11}}{4\sqrt{D}}\right)e^{\mu_1 t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{p_{22}-p_{11}}{4\sqrt{D}}\right)e^{\mu_2 t}=$$

$$\left(\operatorname{ch}(\sqrt{D}t)+\frac{p_{22}-p_{11}}{2\sqrt{D}}\operatorname{sh}(\sqrt{D}t)\right)e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{12}(t)=-p_{12}\frac{e^{\mu_1 t}-e^{\mu_2 t}}{2\sqrt{D}}=-p_{12}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{D}t)}{\sqrt{D}}e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{21}(t)=-p_{21}\frac{e^{\mu_1 t}-e^{\mu_2 t}}{2\sqrt{D}}=-p_{21}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{D}t)}{\sqrt{D}}e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{22}(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{p_{11}-p_{22}}{4\sqrt{D}}\right)e^{\mu_1 t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{p_{11}-p_{22}}{4\sqrt{D}}\right)e^{\mu_2 t}=$$

$$\left(\operatorname{ch}(\sqrt{D}t)+\frac{p_{11}-p_{22}}{2\sqrt{D}}\operatorname{sh}(\sqrt{D}t)\right)e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t}.$$

Очевидно, что функции c_{12} и c_{21} всегда сохраняют свой знак, поэтому $\sigma_{12}=\dfrac{|p_{12}|}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}$, $\sigma_{21}=\dfrac{|p_{21}|}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}$.

Если $p_{11}\neq p_{22}$, то функция c_{11} может иметь единственный корень в точке T, где $\operatorname{th}(\sqrt{D}T)=\dfrac{2\sqrt{D}}{p_{11}-p_{22}}$.

Отсюда следует, что

$$T=\frac{1}{2\sqrt{D}}\ln\frac{p_{11}-p_{22}+2\sqrt{D}}{p_{11}-p_{22}-2\sqrt{D}}\in(0,\infty)$$

только при условии $0<\dfrac{2\sqrt{D}}{p_{11}-p_{22}}<1$, т. е. если $p_{11}>p_{22}$ и $p_{12}p_{21}<0$. Отсюда получаем, что если $p_{11}\le p_{22}$ или $p_{12}p_{21}\ge 0$, то $c_{11}(t)\ge 0$ и $\sigma_{11}=\dfrac{p_{22}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}$. В противном случае $\sigma_{11}=\int\limits_0^\infty|c_{11}(t)|\,dt=\int\limits_0^T c_{11}(t)\,dt-\int\limits_T^\infty c_{11}(t)\,dt$, или $\sigma_{11}=2S(T)-S(0)$, где функция $S(t)=\left(1+\dfrac{p_{22}-p_{11}}{2\sqrt{D}}\right)\dfrac{e^{\mu_1 t}}{2\mu_1}+\left(1-\dfrac{p_{22}-p_{11}}{2\sqrt{D}}\right)\dfrac{e^{\mu_2 t}}{2\mu_2}$ – первообразная функции c_{11}.

Так как $S(0)=-\dfrac{p_{22}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}$ и

$$S(T)=\frac{\sqrt{-p_{12}p_{21}}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}\left(\frac{p_{11}-p_{22}-2\sqrt{D}}{p_{11}-p_{22}+2\sqrt{D}}\right)^{\frac{p_{11}+p_{22}}{4\sqrt{D}}},$$

то

$$\sigma_{11}=\frac{p_{22}+2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\left(\dfrac{p_{11}-p_{22}-2\sqrt{D}}{p_{11}-p_{22}+2\sqrt{D}}\right)^{\frac{p_{11}+p_{22}}{4\sqrt{D}}}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}.$$

Аналогично, если $p_{11}\ge p_{22}$ или $p_{12}p_{21}\ge 0$, то $c_{22}(t)\ge 0$ и $\sigma_{22}=\dfrac{p_{11}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}$.

В противном случае

$$\sigma_{22}=\frac{p_{11}+2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\left(\dfrac{p_{22}-p_{11}-2\sqrt{D}}{p_{22}-p_{11}+2\sqrt{D}}\right)^{\frac{p_{11}+p_{22}}{4\sqrt{D}}}}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}.$$

2.3. Оценка компонент матрицы Коши в случае отрицательного дискриминанта

Пусть $D<0$, $\Delta=\sqrt{-D}$. Тогда характеристическое уравнение (8) имеет два разных комплексных сопряженных корня

$$\mu_1=-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}+\Delta i \quad\text{и}\quad \mu_2=-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}-\Delta i.$$

Компоненты матрицы c равны

$$c_{11}(t)=\left(\cos\Delta t+\frac{p_{22}-p_{11}}{2\Delta}\sin\Delta t\right)e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{12}(t)=-p_{12}\frac{\sin\Delta t}{\Delta}e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{21}(t)=-p_{21}\frac{\sin\Delta t}{\Delta}e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t},$$

$$c_{22}(t)=\left(\cos\Delta t+\frac{p_{11}-p_{22}}{2\Delta}\sin\Delta t\right)e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t}.$$

Для вычисления величин σ_{12},σ_{21} можно воспользоваться формулой 2.5.35.2 из [4, с. 451]:

$$\int\limits_0^\infty|\sin\omega t|e^{-pt}\,dt=\frac{\omega}{\omega^2+p^2}\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\omega}.$$

Отсюда получаем, что

$$\sigma_{12}=\frac{|p_{12}|}{\Delta}\int\limits_0^\infty|\sin\Delta t|e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}t}\,dt=$$

$$\frac{|p_{12}|}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}\operatorname{cth}\frac{(p_{11}+p_{22})\pi}{4\Delta}.$$

Аналогично имеем

$$\sigma_{21}=\frac{|p_{21}|}{p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}}\operatorname{cth}\frac{(p_{11}+p_{22})\pi}{4\Delta}.$$

Если $p_{11} = p_{22}$, то в соответствии с формулой 2.5.35.3 из [4, с. 451]

$$\int_0^\infty |\cos\omega t| e^{-pt} = \frac{1}{p^2+\omega^2}\left(p + \frac{\omega}{\operatorname{sh}\left(\frac{p\pi}{2\omega}\right)} \right),$$

получаем, что

$$\sigma_{11} = \frac{1}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}\left(p_{22} + \frac{\Delta}{\operatorname{sh}\left(\frac{(p_{11}+p_{22})\pi}{4\Delta}\right)} \right)$$

или

$$\sigma_{11} = \frac{1}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}\left(p_{22} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}\pi}{2\Delta}}}{1-e^{-\frac{p_{11}\pi}{\Delta}}} \right).$$

Если $p_{11} \ne p_{22}$, то функция c_{11} обращается в ноль, если $\operatorname{tg}\Delta t = \frac{2\Delta}{p_{11}-p_{22}}$, т. е. в точках $T_k = T_0 + \frac{k\pi}{\Delta}$, где точка $T_0 = \frac{1}{\Delta}\operatorname{arctg}\frac{2\Delta}{p_{11}-p_{22}}$.

Рассмотрим два случая.

Пусть $p_{11} > p_{22}$. Тогда $T_0 > 0$ и

$$\sigma_{11} = \int_0^\infty |c_{11}(t)|dt = \int_0^{T_0} c_{11}(t)\,dt +$$

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^{k+1}\int_{T_k}^{T_{k+1}} c_{11}(t)\,dt = -S(0) + 2\sum_{k=0}^\infty (-1)^k S(T_k),$$

где

$$S(t) = \left(\frac{p_{11}p_{22} - p_{22}^2 - 2p_{12}p_{21}}{2\Delta}\sin\Delta t - p_{22}\cos\Delta t \right)$$

$$\frac{e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}t$$

– первообразная функции c_{11}.

Так как

$$S(0) = -\frac{p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}$$

и

$$S(T_k) = (-1)^k\,\frac{\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}\left(T_0+\frac{k\pi}{\Delta}\right)}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}},$$

то

$$\sigma_{11} = \frac{\left(p_{22} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\operatorname{arctg}\frac{2\Delta}{p_{11}-p_{22}}}}{1-e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\pi}} \right)}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}.$$

В случае $p_{11} < p_{22}$ точка $T_0 < 0$, поэтому

$$\sigma_{11} = \int_0^{T_1} c_{11}(t)\,dt + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \int_{T_k}^{T_{k+1}} c_{11}(t)\,dt =$$

$$-S(0) + 2\sum_{k=1}^\infty (-1)^k S(T_k).$$

Так как $S(T_k) = (-1)^k\,\frac{\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2}\left(T_0+\frac{k\pi}{\Delta}\right)}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}$, то

$$\sigma_{11} = \frac{\left(p_{22} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2\Delta}{p_{11}-p_{22}}\right)}}{1-e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\pi}} \right)}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}.$$

Для σ_{22} получаются следующие значения:

при $p_{11} \ne p_{22}$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}\left(p_{11} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{22}\pi}{2\Delta}}}{1-e^{-\frac{p_{22}\pi}{\Delta}}} \right),$$

при $p_{22} > p_{11}$

$$\sigma_{22} = \frac{\left(p_{11} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\operatorname{arctg}\frac{2\Delta}{p_{22}-p_{11}}}}{1-e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\pi}} \right)}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}},$$

при $p_{22} \le p_{11}$

$$\sigma_{22} = \frac{\left(p_{11} + \frac{2\sqrt{-p_{12}p_{21}}\,e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{2\Delta}{p_{22}-p_{11}}\right)}}{1-e^{-\frac{p_{11}+p_{22}}{2\Delta}\pi}} \right)}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}.$$

2.4. Оценка компонент матрицы Коши в случае нулевого дискриминанта

Пусть $D=0$. Тогда характеристическое уравнение (8) имеет единственный корень $\mu=-\dfrac{p_{11}+p_{22}}{2}$ второй кратности.

Если $p_{11}\neq p_{22}$, то матрица-функция

$$X(t)=\begin{pmatrix} -p_{12}e^{\mu(t-a)} & -p_{12}te^{\mu(t-a)} \\ \dfrac{p_{11}-p_{22}}{2}e^{\mu(t-a)} & \left(1+\dfrac{p_{11}-p_{22}}{2}\right)e^{\mu(t-a)} \end{pmatrix}$$

является фундаментальной матрицей системы уравнений (7), а матрица c имеет вид

$$c(t)=\begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{p_{22}-p_{11}}{2}t\right)e^{\mu t} & -p_{12}te^{\mu t} \\ -p_{21}te^{\mu t} & \left(1+\dfrac{p_{11}-p_{22}}{2}t\right)e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем $\sigma_{12}=\int\limits_0^\infty |p_{12}|te^{\mu t}=\dfrac{4|p_{12}|}{(p_{11}+p_{22})^2}$, $\sigma_{21}=\int\limits_0^\infty |p_{21}|te^{\mu t}=\dfrac{4|p_{21}|}{(p_{11}+p_{22})^2}$. Если $p_{22}>p_{11}$, то

$$\sigma_{11}=\int\limits_0^\infty\left(1+\frac{p_{22}-p_{11}}{2}t\right)e^{\mu t}=-\frac{1}{\mu}+\frac{p_{22}-p_{11}}{2\mu^2}=\frac{4p_{22}}{(p_{11}+p_{22})^2}.$$

Если же $p_{22}<p_{11}$, то

$$\sigma_{11}=\int\limits_0^T c_{11}(t)\,dt-\int\limits_T^0 c_{11}(t)\,dt,\ \text{где}\ T=\frac{2}{p_{11}-p_{22}}.$$

Таким образом, $\sigma_{11}=-S(0)+2(T)$, где $S(t)=\left(1+\dfrac{(p_{22}-p_{11})(\mu t-1)}{2\mu}\right)\dfrac{e^{\mu t}}{\mu}$ – первообразная функции c_{11}. Так как $S(0)=\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{p_{22}-p_{11}}{2\mu^2}$ и $S(T)=(p_{11}-p_{22})\dfrac{e^{\mu T}}{2\mu^2}$, то

$$\sigma_{11}=\frac{4}{(p_{11}+p_{22})^2}\left(p_{22}+(p_{11}-p_{22})e^{\frac{p_{11}+p_{22}}{p_{22}-p_{11}}}\right).$$

Соответственно,

$$\sigma_{22}=\frac{4p_{11}}{(p_{11}+p_{22})^2},\ \text{если}\ p_{22}<p_{11}\ \text{и}$$

$$\sigma_{22}=\frac{4}{(p_{11}+p_{22})^2}\left(p_{11}+(p_{22}-p_{11})e^{\frac{p_{11}+p_{22}}{p_{22}-p_{11}}}\right),$$

если $p_{22}>p_{11}$.

Если $p_{11}=p_{22}$, то $\mu=-p_{11}=-p_{22}$ и $p_{12}p_{21}=0$. Пусть $p_{12}=0$.

Тогда $c(t)=\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ -p_{21}e^{\mu t} & e^{\mu t}\end{pmatrix}$, $\sigma_{11}=\dfrac{1}{p_{22}}$, $\sigma_{22}=\dfrac{1}{p_{11}}$, $\sigma_{12}=0$ и $\sigma_{21}=\dfrac{4|p_{21}|}{(p_{11}+p_{22})^2}$.

Аналогично, если $p_{21}=0$, то $\sigma_{11}=\dfrac{1}{p_{22}}$, $\sigma_{22}=\dfrac{1}{p_{11}}$, $\sigma_{12}=\dfrac{4|p_{12}|}{(p_{11}+p_{22})^2}$ и $\sigma_{21}=0$.

3. Система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

3.1. Критерий устойчивости системы с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

Как известно, система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)+p_1x_1(t-\tau_1)+p_{12}x_2(t-\tau_{12})&=f_1(t),\\ \dot{x}_2(t)+p_{21}x_1(t-\tau_{21})+p_2x_2(t-\tau_2)&=f_2(t),\end{aligned}\qquad(9)$$

устойчива тогда и только тогда, когда действительные части $\Re s$ всех корней характеристического уравнения системы (9)

$$s^2+(p_1e^{-\tau_1 s}+p_2e^{-\tau_2 s})s+p_1p_2e^{-(\tau_1+\tau_2)s}=p_0e^{-\tau_0 s},$$

где $\tau_0=\tau_{12}+\tau_{21}$ и $p_0=p_{12}p_{21}$, отрицательны [2, с. 116].

В рассмотренной выше в п. 2 ситуации $\tau_1=\tau_2=\tau_0=0$ это характеристическое уравнение является полиномом второго порядка и система (9) устойчива тогда и только тогда, когда $p_1+p_2>0$ и $p_0<p_1p_2$. Во всех остальных случаях характеристическое уравнение является квазиполиномом и найти все его корни невозможно.

Отметим, однако, что при непрерывном изменении параметров системы (9) в критической ситуации потери устойчивости у характеристического уравнения системы (9) должен появиться чисто мнимый корень $s=i\omega$.

Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

При $\omega=0$ имеем $p_1p_2=p_0$.

В общем случае, отделяя действительную и мнимую части характеристического уравнения, получаем систему, определяющую появление мнимого корня:

$$\begin{aligned}&(p_1\sin\omega\tau_1+p_2\sin\omega\tau_2)\omega+p_1p_2\cos\omega(\tau_1+\tau_2)\\&\qquad=\omega^2+p_0\cos\omega\tau_0,\\&(p_1\cos\omega\tau_1+p_2\cos\omega\tau_2)\omega-p_1p_2\sin\omega(\tau_1+\tau_2)\\&\qquad=-p_0\sin\omega\tau_0.\end{aligned}\tag{10}$$

Из системы (10) следуют соотношения:

$$\begin{aligned}&\omega\cos\omega\tau_2\,p_1^2-(2\omega^2\sin\omega\tau_1\cos\omega\tau_2+\\&p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0))p_1+\omega p_0\cos\omega(\tau_2-\tau_0)+\\&\omega^3\cos\omega\tau_2=0,\\&\omega\cos\omega\tau_1\,p_2^2-(2\omega^2\cos\omega\tau_1\sin\omega\tau_2+\\&p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0))p_2+\omega p_0\cos\omega(\tau_1-\tau_0)+\\&\omega^3\cos\omega\tau_1=0.\end{aligned}$$

Следовательно, границы устойчивости системы (9) на плоскости с координатами p_1, p_2 принадлежат семейству кривых, параметрические уравнения которых имеют вид:

$$p_1=\omega^2\sin\omega\tau_1+\frac{p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)+\sqrt{D}}{2\omega\cos\omega\tau_2},$$

$$p_2=\omega^2\sin\omega\tau_2+\frac{p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)+\sqrt{D}}{2\omega\cos\omega\tau_1},$$

и

$$p_1=\omega^2\sin\omega\tau_1+\frac{p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)-\sqrt{D}}{2\omega\cos\omega\tau_2},$$

$$p_2=\omega^2\sin\omega\tau_2+\frac{p_0\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)-\sqrt{D}}{2\omega\cos\omega\tau_1},$$

где

$$\begin{aligned}D=p_0^2-(&p_0\cos\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)+\\&2\omega^2\cos\omega\tau_1\cos\omega\tau_2)^2,\end{aligned}$$

в случае $\cos\omega\tau_1\neq0$ и $\cos\omega\tau_2\neq0$. Если же $\cos\omega\tau_1=0$, то

$$p_1=\omega+\frac{p_0\cos\omega(\tau_2-\tau_0)}{\omega\cos\omega\tau_2},\ p_2=\frac{\omega\sin\omega\tau_0}{\cos\omega(\tau_2-\tau_0)},\ \text{и,}$$

соответственно, если $\cos\omega\tau_2=0$, то

$$p_1=\frac{\omega\sin\omega\tau_0}{\cos\omega(\tau_1-\tau_0)},\ p_2=\omega+\frac{p_0\cos\omega(\tau_1-\tau_0)}{\omega\cos\omega\tau_1}.$$

Если удается исключить из уравнения кривых параметр ω, то полученное соотношение между коэффициентами системы (9) задает границу области устойчивости системы. Однако сделать это и получить тем самым эффективные коэффициентные необходимые и достаточные условия устойчивости удается только в нескольких исключительных частных случаях. Перечислим некоторые из них.

3.1.1. Случай $p_0=0$

Характеристическое уравнение системы (7) в этом случае имеет вид $(s+p_1e^{-\tau_1s})(s+p_2e^{-\tau_2s})=0$. Так как условия отрицательности действительных частей всех корней квазиполиномов $s+p_ie^{-\tau_is}=0$ известны, то система (9) устойчива тогда и только тогда, когда $0<p_1\tau_1<\dfrac{\pi}{2}$ и $0<p_2\tau_2<\dfrac{\pi}{2}$.

3.1.2. Случай $\tau_1=\tau_2=0$

В этом случае система (10) принимает вид

$$\begin{aligned}&p_1p_2-\omega^2=p_0\cos\omega\tau_0,\\&(p_1+p_2)\omega=-p_0\sin\omega\tau_0.\end{aligned}$$

Отсюда $\omega^4+(p_1^2+p_2^2)\omega^2+p_1^2p_2^2-p_0^2=0$ или

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{(p_{11}^2-p_{22}^2)^2+4p_0^2}-p_{11}^2-p_{22}^2}{2}}.$$

Таким образом, параметр ω исключается из системы (10) и условия устойчивости принимают имеют вид $p_1+p_2>0$ и $p_0<p_1p_2$ или же $p_1p_2\le p_0<-\dfrac{(p_1+p_2)\omega}{\sin\omega\tau_0}$.

3.1.3. Случай $\tau=\tau_{11}=\tau_{22}>0$

Система (10) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}&(p_{11}+p_{22})\omega\sin\omega\tau+p_{11}p_{22}\cos2\omega\tau=\\&\qquad\omega^2+p_0\cos\omega\tau_0,\\&(p_{11}+p_{22})\omega\cos\omega\tau-p_{11}p_{22}\sin2\omega\tau=\\&\qquad-p_0\sin\omega\tau_0.\end{aligned}\tag{11}$$

В случае $\cos\omega\tau=0$ получаем $\sin\omega\tau=\pm1$ и

$$\left(\frac{\pi}{2\tau}-p_1\right)\left(\frac{\pi}{2\tau}-p_2\right)=-p_0\cos\frac{\pi\tau_0}{2\tau},$$

$$0=p_0\sin\frac{\pi\tau_0}{2\tau}.$$

Отсюда $\tau_0=2\tau$ и $p_0<\left(\dfrac{\pi}{2\tau}-p_{11}\right)\left(\dfrac{\pi}{2\tau}-p_{22}\right)$.

Если же $\cos\omega\tau\neq0$, то решение системы (11) можно записать в параметрическом виде:

$$p_1+p_2=2\omega\sin\omega\tau-\frac{\sin\omega(\tau_0-2\tau)}{\omega\cos\omega\tau}p_0,$$

$$p_1p_2=\omega^2+\frac{\cos\omega(\tau_0-\tau)}{\cos\omega\tau}p_0.$$

Здесь параметрическая кривая определяет границу устойчивости на плоскости параметров p_1+p_2 и p_1p_2.

В некоторых случаях параметр ω исключается.

Например, если $\tau_0=0$, то

$\omega=\sqrt{p_{11}p_{22}-p_0}$ и $p_{11}+p_{22}=2\dfrac{\sin\omega\tau}{\omega}p_{11}p_{22}$.

Если $\tau_0=2\tau$, то $\omega=\sqrt{p_{11}p_{22}-p_0}$

и $$p_{11}+p_{22}=2\omega\sin\omega\tau .$$

3.1.4. Случай $p=p_1=p_2$

Система (10) принимает вид

$$(\sin\omega\tau_1+\sin\omega\tau_2)p\omega+\cos\omega(\tau_1+\tau_2)p^2-p_0\cos\omega\tau_0=\omega^2,$$
$$(\cos\omega\tau_1+\cos\omega\tau_2)p\omega-\sin\omega(\tau_1+\tau_2)p^2+p_0\sin\omega\tau_0=0.$$

Отсюда получаем

$$\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)p^2-(\cos\omega(\tau_1-\tau_0)+\cos\omega(\tau_2-\tau_0))\omega p+\omega^2\sin\omega\tau_0=0$$

или

$$p=\frac{\cos\omega(\tau_1-\tau_0)+\cos\omega(\tau_2-\tau_0)\pm\sqrt{D}}{2\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)}\omega,$$

где

$$D=(\cos\omega(\tau_1-\tau_0)-\cos\omega(\tau_2-\tau_0))^2+4\cos\omega\tau_1\cos\omega\tau_2,$$

$$p_0=\left(\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}(\tau_1-\tau_2)(\cos\omega\tau_0+\cos\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0))}{\sin^2\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)}\pm\frac{\cos\omega\tau_1+\cos\omega\tau_2}{2\sin^2\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)}\sqrt{D}-\frac{\sin\omega(\tau_1+\tau_2)}{\sin\omega(\tau_1+\tau_2-\tau_0)}\right)\omega^2.$$

Здесь параметрическая кривая, определяющая границу устойчивости, принадлежит плоскости параметров p и p_0.

Параметр ω исключается, например, в случае $\tau_0=0$.

Тогда $\omega^2=p^2-p_0$ и

$$p\sin(\sqrt{p^2-p_0}(\tau_1+\tau_2))=\sqrt{p^2-p_0}(\cos\sqrt{p^2-p_0}\tau_1+\cos\sqrt{p^2-p_0}\tau_2).$$

3.2. Оценка компонент матрицы Коши для уравнения с постоянными коэффициентами и запаздыванием

При использовании системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)+p_{11}x_1(t-\tau_{11})+p_{12}x_2(t-\tau_{12})&=f_1(t),\\ \dot{x}_2(t)+p_{21}x_1(t-\tau_{21})+p_{22}x_2(t-\tau_{22})&=f_2(t),\end{aligned}\tag{11}$$

в качестве модельного уравнения, актуальной задачей является вычисление или оценка компонент матрицы Коши этой системы.

Отметим, прежде всего, что все компоненты матрицы Коши системы (11) имеют разностный вид $C(t,s)=c(t-s)$.

Если решение системы (11) является постоянным вектором x, то из формулы Коши (3) следует представление

$$x=\left(c(t-a)+\int_a^t c(t-s)\tilde{P}(s)\,ds\right)x,$$

где

$$\tilde{P}(s)=\begin{pmatrix}p_{11}\chi_{a+\tau_{11}}(s) & p_{12}\chi_{a+\tau_{12}}(s)\\ p_{21}\chi_{a+\tau_{21}}(s) & p_{22}\chi_{a+\tau_{22}}(s)\end{pmatrix}$$ и

$$\chi_\tau(s)=\begin{cases}1, & \text{если } s>\tau,\\ 0, & \text{если } s<\tau.\end{cases}$$

Отсюда следует тождество $E=c(t)+\tilde{C}(t)P$,

где матрица $\tilde{C}(t)=\begin{pmatrix}\int_0^{t-\tau_{11}}c_{11}(s)\,ds & \int_0^{t-\tau_{12}}c_{12}(s)\,ds\\ \int_0^{t-\tau_{21}}c_{21}(s)\,ds & \int_0^{t-\tau_{22}}c_{22}(s)\,ds\end{pmatrix}$

и $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$.

Из устойчивости системы (11) следует, что $E=\int_0^\infty c(t)\,dt\,P$.

В случае обратимости матрицы P получаем представление $\int_0^\infty c(t)\,dt=P^{-1}$.

Таким образом, если компонента c_{ij} матрицы c сохраняет свой знак при $t\ge 0$, то $\sigma_{ij}=\left|p_{ij}^-\right|$, где p_{ij}^- – компонента обратной матрицы P^{-1}. Если все компоненты матрицы c неотрицательны, то тогда просто $\sigma_{ij}=p_{ij}^-$.

В общей ситуации компоненты матрицы P^{-1} дают оценку компонент матрицы Г снизу: $p_{ij}^-\le\sigma_{ij}$.

Условия неотрицательности матрицы Коши сформулированы в следующем утверждении.

Теорема 4. Пусть $p_{11}\tau_{11} \le \frac{1}{e}$, $p_{22}\tau_{22} < \frac{1}{e}$, $p_{12} \le 0$, $p_{21} \le 0$. Тогда все компоненты матрицы c неотрицательны.

Доказательство

Положим $x_1(a) = x_2(a) = 0$ и $f_1 \ge 0$, $f_2 \ge 0$. Тогда система (11) эквивалентна системе

$$x_1(t) = -p_{12}\int_{a+\tau_{12}}^{t} C_1(t,s)x_2(s-\tau_{12})\,ds + \int_a^t C_1(t,s)\,f_1(s)\,ds,$$

$$x_2(t) = -p_{21}\int_{a+\tau_{21}}^{t} C_2(t,s)x_1(s-\tau_{21})\,ds + \int_a^t C_2(t,s)\,f_2(t)\,ds,$$

где функции Коши C_1, C_2 соответствующих скалярных уравнений неотрицательны.

Отсюда получаем

$$x_1(t) = \int_a^t K(t,s)x_1(s)\,ds - p_{12}\int_{a+\tau_{12}}^{t} C_1(t,s)\int_a^{s-\tau_{12}} C_2(s-\tau_{12},\theta)f_2(\theta)\,d\theta ds + \int_a^t C_1(t,s)\,f_1(s)\,ds.$$

Так как ядро

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, \text{ если } s > t-\tau_{12}-\tau_{21}, \\ p_{12}p_{21}\int_{s+\tau_{21}}^{t-\tau_{12}} C_1(t,\xi+\tau_{12})C_2(\xi,s+\tau_{21})\,d\xi, \\ \text{если } s \le t-\tau_{12}-\tau_{21} \end{cases}$$

интегрального оператора Вольтерра $(Kx)(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds$ неотрицательно, то оператор $(I-K)^{-1} = I + K + K^2 + \ldots$ отображает неотрицательные функции в неотрицательные. Но тогда $x_1(t) \ge 0$. Аналогично показывается, что $x_2(t) \ge 0$, что эквивалентно неотрицательности матрицы Коши.

3.2.1. W-метод

Воспользуемся для получения условий устойчивости уравнения (9) и оценок компонент матрицы Коши W-методом.

Пусть $p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$.

Выберем в качестве модельной систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) + p_{11}x_1(t-\tau_1) = f_1(t), \quad t \ge a, \\ &\dot{x}_2(t) + p_{22}x_2(t-\tau_2) = f_2(t), \\ &x_1(\xi) = x_2(\xi) = 0, \text{ если } \xi < a, \end{aligned}$$

тогда $$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} \frac{\kappa(p_{11}\tau_1)}{p_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa(p_{22}\tau_2)}{p_{22}} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & |p_{12}| \\ |p_{21}| & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} p_{11}|\tau_1-\tau_{11}| & 0 \\ 0 & p_{22}|\tau_2-\tau_{22}| \end{pmatrix},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & |p_{12}| \\ |p_{21}| & p_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 3, система (11) устойчива, если

$$q_1 = 1-\kappa(p_{11}\tau_1)\,p_{11}|\tau_1 - \tau_{11}| > 0,$$
$$q_2 = 1-\kappa(p_{22}\tau_2)\,p_{22}|\tau_2 - \tau_{22}| > 0 \quad \text{и}$$
$$|p_{12}p_{21}|\kappa(p_{11}\tau_1)\kappa(p_{22}\tau_2) < \frac{q_1q_2p_{11}p_{22}}{(1+p_{11}|\tau_1-\tau_{11}|)(1+p_{22}|\tau_2-\tau_{22}|)}.$$

При этом компоненты матрицы Коши оцениваются равенствами:

$$\sigma_{11} \le \frac{q_2(1+p_{11}|\tau_1-\tau_{11}|)\kappa(p_{11}\tau_1)}{d}\,p_{22},$$
$$\sigma_{22} \le \frac{q_1(1+p_{22}|\tau_2-\tau_{22}|)\kappa(p_{22}\tau_2)}{d}\,p_{11},$$
$$\sigma_{12} \le \frac{r}{d}|p_{12}|, \quad \sigma_{21} \le \frac{r}{d}|p_{21}|,$$

где

$$r = \kappa(p_{11}\tau_1)\kappa(p_{22}\tau_2)(1+p_{11}|\tau_1-\tau_{11}|)(1+p_{22}|\tau_2-\tau_{22}|)$$

и

$$d = (1-p_{11}\kappa(p_{11}\tau_1)|\tau_{11}-\tau_1|)(1-p_{22}\kappa(p_{22}\tau_2)|\tau_{22}-\tau_2|)p_{11}p_{22} - \kappa(p_{11}\tau_1)\kappa(p_{22}\tau_2)(1+p_{11}|\tau_{11}-\tau_1|)(1+p_{22}|\tau_{22}-\tau_2|)|p_{12}p_{21}|.$$

Если $\tau_1 = \tau_{11}$ и $\tau_2 = \tau_{22}$, то эти условия преобразуются к виду $|p_{12}p_{21}|\kappa(p_{11}\tau_{11})\kappa(p_{22}\tau_{22}) < p_{11}p_{22}$. Если $\tau_1 = \dfrac{1}{p_{11}e}$ и $\tau_2 = \dfrac{1}{p_{22}e}$, то получаем следующие условия: $p_{11}\tau_{11} < 1 + e^{-1}$, $p_{22}\tau_{22} < 1 + e^{-1}$ и $|p_{12}p_{21}| < p_{11}p_{22}\dfrac{(1-|p_{11}\tau_{11} - e^{-1}|)(1-|p_{22}\tau_{22} - e^{-1}|)}{(1+|p_{11}\tau_{11} - e^{-1}|)(1+|p_{22}\tau_{22} - e^{-1}|)}$.

Если $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, то тогда условия устойчивости системы (11) запишутся в виде $p_{11}\tau_{11} < 1$, $p_{22}\tau_{22} < 1$ и

$$|p_{12}p_{21}| < p_{11}p_{22}\frac{(1-p_{11}\tau_{11})(1-p_{22}\tau_{22})}{(1+p_{11}\tau_{11})(1+p_{22}\tau_{22})}.$$

3.2.2. Прямая оценка матрицы Коши

Чтобы получить оценку компонент матрицы Коши поступим следующим образом. Выберем функции $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $u, v \in \mathrm{W}_1^2$ так, чтобы $u_1(a) = 1$, $u_2(a) = 0$, $v_1(a) = 0$, $v_2(a) = 1$ и определим функции $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathrm{W}$ равенствами

$$f_1(t) = \dot{u}_1(t) + p_{11}u_1(t-\tau_{11}) + p_{12}u_2(t-\tau_{12}),$$
$$f_2(t) = \dot{u}_2(t) + p_{21}u_1(t-\tau_{21}) + p_{22}u_2(t-\tau_{22}),$$
$$g_1(t) = \dot{v}_1(t) + p_{12}v_1(t-\tau_{11}) + p_{12}v_2(t-\tau_{12}),$$
$$g_2(t) = \dot{v}_2(t) + p_{21}v_1(t-\tau_{21}) + p_{22}v_2(t-\tau_{22}).$$

Тогда в силу формулы Коши (3)

$$\begin{pmatrix} c_{11}(t-a) \\ c_{21}(t-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} - \int_a^t c(t-s)\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds,$$
$$\begin{pmatrix} c_{12}(t-a) \\ c_{22}(t-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} - \int_a^t c(t-s)\begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{pmatrix} ds.$$

Так как $\displaystyle\int_a^\infty\int_a^t |c_{ij}(t-s)||f(s)|\,ds\,dt = \sigma_{ij}\int_a^\infty |f(s)|\,ds$, то, оценивая эти соотношения, получим систему неравенств

$$\sigma_{11} \le U_1 + \sigma_{11}F_1 + \sigma_{12}F_2,$$
$$\sigma_{21} \le U_2 + \sigma_{21}F_1 + \sigma_{22}F_2,$$
$$\sigma_{12} \le V_1 + \sigma_{11}G_1 + \sigma_{12}G_2,$$
$$\sigma_{22} \le V_2 + \sigma_{21}G_1 + \sigma_{22}G_2,$$

где $U_i = \displaystyle\int_a^\infty |u_i(s)|\,ds$, $V_i = \displaystyle\int_a^\infty |v_i(s)|\,ds$,

$$F_i = \int_a^\infty |f_i(s)|\,ds \text{ и } G_i = \int_a^\infty |g_i(s)|\,ds.$$

Условия разрешимости этой системы сформулированы в следующем утверждении.

Теорема 5. Система (11) устойчива тогда и только тогда, когда существуют такие функции:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\ u_i, v_i \in \mathrm{W},\ u_1(0) = 1,$$
$$u_2(0) = 0,\ v_1(0) = 0,\ v_2(0) = 1,$$

что спектральный радиус матрицы $K = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{pmatrix}$ меньше единицы.

При этом компоненты матрицы Коши оцениваются неравенствами:

$$\sigma_{11} \le \frac{(1-G_2)U_1 + F_2V_1}{(1-G_2)(1-F_1) - G_1F_2},$$
$$\sigma_{12} \le \frac{G_1U_1 + (1-F_1)V_1}{(1-G_2)(1-F_1) - G_1F_2},$$
$$\sigma_{21} \le \frac{(1-G_2)U_2 + F_2V_2}{(1-G_2)(1-F_1) - G_1F_2},$$
$$\sigma_{22} \le \frac{G_1U_2 + (1-F_1)V_2}{(1-G_2)(1-F_1) - G_1F_2}.$$

Напомним, что спектральный радиус матрицы K с неотрицательными компонентами меньше единицы тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы $I-K$ положительны.

Таким образом, это условие эквивалентно неравенствам $F_1 < 1$, $G_2 < 1$ и $G_1F_2 < (1-G_2)(1-F_1)$.

Пример. Полагая $u_1(t) = e^{-p_{11}(t-a)}$, $u_2(t) = 0$, $v_1(t) = 0$, $v_2(t) = e^{-p_{22}(t-a)}$, где $p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$ получаем, что система (11) устойчива, если $p_{11}\tau_{11} < \ln 2$, $p_{22}\tau_{22} < \ln 2$ и $|p_{12}p_{21}| < (2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1)\,p_{11}p_{22}$.

При этом оценки компонент матрицы Γ имеют вид:

$$\sigma_{11} \le \frac{(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1)p_{22}}{p_{11}p_{22}(2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1) - |p_{12}p_{21}|},$$
$$\sigma_{12} \le \frac{|p_{12}|}{p_{11}p_{22}(2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1) - |p_{12}p_{21}|},$$
$$\sigma_{21} \le \frac{|p_{21}|}{p_{11}p_{22}(2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1) - |p_{12}p_{21}|},$$
$$\sigma_{22} \le \frac{(2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)p_{11}}{p_{11}p_{22}(2e^{-p_{11}\tau_{11}} - 1)(2e^{-p_{22}\tau_{22}} - 1) - |p_{12}p_{21}|}.$$

4. Система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

4.1. W-метод

Применим к системе (1) W-метод.

Рассмотрим предварительно систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t)+x_1(h_1(t))+q_1(t)x_2(h_1(t))=f_1(t),\\ \dot{x}_2(t)+q_1(t)x_1(h_2(t))+x_2(h_2(t))=f_2(t),\\ t\ge a,\ x(\xi)=0,\ \text{если } \xi<a,\end{gathered} \tag{12}$$

Выбирая систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t)+x_1(t-\tau_1)=f_1(t),\quad t\ge a,\\ \dot{x}_2(t)+x_2(t-\tau_2)=f_2(t),\\ x_1(\xi)=x_2(\xi)=0,\ \text{если } \xi<a,\end{gathered}$$

в качестве модельной, получим, что в силу теоремы 3 система (11) устойчива, если спектральный радиус матрицы

$$\begin{pmatrix}\kappa(\tau_1)\|h_1-\tau_1\| & \kappa(\tau_1)\|q_1\|(1+\|h_1-\tau_1\|)\\ \kappa(\tau_2)\|q_2\|(1+\|h_2-\tau_2\|) & \kappa(\tau_2)\|h_2-\tau_2\|\end{pmatrix}$$

меньше единицы.

Система (1) приводится к виду (12) заменой переменных $x_i(t)=y_i\left(\int\limits_a^t p_{ii}(s)\,ds)\right)$ при $p_{ii}(t)>0$. Отсюда следует, что система (11) устойчива, если $p_{11}(t)\ge\delta>0$, $p_{22}(t)\ge\delta>0$ и при некоторых $\tau_1,\tau_2\in[0,\frac{\pi}{2})$ справедливы неравенства

$$|\theta_1(t)-\tau_1|\le\frac{1}{\kappa(\tau_1)},\ \theta_1(t)=\int\limits_{h_{11}(t)}^{t}p_{11}(s)\,ds,$$

$$|\theta_2(t)-\tau_2|\le\frac{1}{\kappa(\tau_2)},\ \theta_2(t)=\int\limits_{h_{22}(t)}^{t}p_{22}(s)\,ds \text{ и}$$

$$\left\|\frac{p_{12}}{p_{11}}\right\|\left\|\frac{p_{21}}{p_{22}}\right\|<\frac{\left(k(\tau_1)^{-1}-\|\theta_1-\tau_1\|\right)\left(k(\tau_2)^{-1}-\|\theta_2-\tau_2\|\right)}{\left(1+\|\theta_1-\tau_1\|\right)\left(1+\|\theta_2-\tau_2\|\right)}.$$

В частности, система (1) устойчива, если выполняется одно из неравенств:

$$\left\|\frac{p_{12}}{p_{22}}\right\|\left\|\frac{p_{21}}{p_{22}}\right\|<\frac{\left(1-\|\theta_1-e^{-1}\|\right)\left(1-\|\theta_2-e^{-1}\|\right)}{\left(1+\|\theta_1-e^{-1}\|\right)\left(1+\|\theta_2-e^{-1}\|\right)},$$

или

$$\left\|\frac{p_{12}}{p_{22}}\right\|\left\|\frac{p_{21}}{p_{22}}\right\|<\frac{\left(1-\|\theta_1\|\right)\left(1-\|\theta_2\|\right)}{\left(1+\|\theta_1\|\right)\left(1+\|\theta_2\|\right)},$$

или

$$\|\theta_1\|\le\frac{2}{e},\ \|\theta_2\|\le\frac{2}{e},\left\|\frac{p_{12}}{p_{11}}\right\|\left\|\frac{p_{21}}{p_{22}}\right\|<\left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2.$$

4.2. Прямая оценка матрицы Коши

Получим теперь условия устойчивости системы (1) с помощью прямой оценки матрицы Коши.

Выберем функции $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},$

$u_i,v_i\in\mathrm{W}$ так, чтобы $d(t)=\begin{vmatrix}u_1(t) & u_2(t)\\ v_1(t) & v_2(t)\end{vmatrix}\ne0$

и положим

$$\begin{gathered}f_1(t,s)=\dot{u}_1(t)+p_{11}(t)u_1(h_{11}(t))+p_{12}(t)u_2(h_{12}(t)),\\ f_2(t,s)=\dot{u}_2(t)+p_{21}(t)u_1(h_{21}(t))+p_{22}(t)u_2(h_{22}(t)),\\ g_1(t,s)=\dot{v}_1(t)+p_{11}(t)v_1(h_{11}(t))+p_{12}(t)v_2(h_{12}(t)),\\ g_2(t,s)=\dot{v}_2(t)+p_{21}(t)v_1(h_{21}(t))+p_{22}(t)v_2(h_{22}(t)),\\ t\ge s,\ u_i(\xi)=v_i(\xi)=0,\ \text{если } \xi<s.\end{gathered}$$

Тогда из обобщенной формулы Коши (6) следует, что

$$\begin{gathered}u_1(t)=C_{11}(t,s)u_1(s)+C_{12}(t,s)u_2(s)+\\ \int\limits_s^t\left(C_{11}(t,\theta)f_1(\theta,s)+C_{12}(t,\theta)f_2(\theta,s)\right)d\theta,\\ u_2(t)=C_{21}(t,s)u_1(s)+C_{22}(t,s)u_2(s)+\\ \int\limits_s^t\left(C_{21}(t,\theta)f_1(\theta,s)+C_{22}(t,\theta)f_2(\theta,s)\right)d\theta,\\ v_1(t)=C_{11}(t,s)v_1(s)+C_{12}(t,s)v_2(s)+\\ \int\limits_s^t\left(C_{11}(t,\theta)g_1(\theta,s)+C_{12}(t,\theta)g_2(\theta,s)\right)d\theta,\\ v_2(t)=C_{21}(t,s)v_1(s)+C_{22}(t,s)v_2(s)+\\ \int\limits_s^t\left(C_{21}(t,\theta)g_1(\theta,s)+C_{22}(t,\theta)g_2(\theta,s)\right)d\theta.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}C_{11}(t,s)=\frac{1}{d(s)}(d_{11}(t,s)-\\ \int\limits_s^t(C_{11}(t,\theta)\varphi_1(s,\theta)+C_{12}(t,\theta)\psi_1(s,\theta))\,d\theta),\\ C_{12}(t,s)=\frac{1}{d(s)}(d_{12}(t,s)-\\ \int\limits_s^t(C_{11}(t,\theta)\varphi_2(s,\theta)+C_{12}(t,\theta)\psi(s,\theta))\,d\theta),\\ C_{21}(t,s)=\frac{1}{d(s)}(d_{21}(t,s)-\\ \int\limits_s^t(C_{21}(t,\theta)\varphi_1(s,\theta)+C_{22}(t,\theta)\psi_1(s,\theta))\,d\theta),\\ C_{22}(t,s)=\frac{1}{d(s)}(d_{22}(t,s)-\\ \int\limits_s^t(C_{21}(t,\theta)\varphi_2(s,\theta)+C_{22}(t,\theta)\psi_2(s,\theta))\,d\theta),\end{gathered}$$

где

$$d_{11}(t,s)=\begin{vmatrix}u_1(t) & u_2(s)\\ v_1(t) & v_2(s)\end{vmatrix},\quad d_{12}(t,s)=\begin{vmatrix}u_1(s) & u_1(t)\\ v_1(s) & v_1(t)\end{vmatrix},$$

$$d_{21}(t,s)=\begin{vmatrix}u_2(t) & u_2(s)\\ v_2(t) & v_2(s)\end{vmatrix},\quad d_{22}(t,s)=\begin{vmatrix}u_1(s) & u_2(t)\\ v_1(s) & v_2(t)\end{vmatrix},$$

$$\varphi_1(s,\theta)=\begin{vmatrix}f_1(\theta,s) & u_2(s)\\ g_1(\theta,s) & v_2(s)\end{vmatrix},\psi_1(s,\theta)=\begin{vmatrix}f_2(\theta,s) & u_2(s)\\ g_2(\theta,s) & v_2(s)\end{vmatrix},$$

$$\varphi_2(s,\theta)=\begin{vmatrix}u_1(s) & f_1(\theta,s)\\ v_1(s) & g_1(\theta,s)\end{vmatrix},\psi_2(s,\theta)=\begin{vmatrix}u_1(s) & f_2(\theta,s)\\ v_1(s) & g_2(\theta,s)\end{vmatrix}.$$

Так как

$$\sup_{t\ge a}\int_a^t \frac{ds}{d(s)}\int_s^t C_{ij}(t,\theta)h(\theta,s)\,d\theta=$$

$$\sup_{t\ge a}\int_a^t C_{ij}(t,\theta)\int_a^\theta \frac{h(\theta,s)}{d(s)}\,ds\,d\theta\quad ,$$

то, оценивая эти соотношения, получаем систему неравенств:

$$\sigma_{11}\le U_1+\sigma_{11}F_1+\sigma_{12}F_2,$$
$$\sigma_{21}\le U_2+\sigma_{21}F_1+\sigma_{22}F_2,$$
$$\sigma_{12}\le V_1+\sigma_{11}G_1+\sigma_{12}G_2,$$
$$\sigma_{22}\le V_2+\sigma_{21}G_1+\sigma_{22}G_2,$$

где

$$U_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{d_{11}(t,s)}{d(s)}\right|ds,\quad U_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{d_{21}(t,s)}{d(s)}\right|ds,$$

$$V_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{d_{12}(t,s)}{d(s)}\right|ds,\quad V_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{d_{22}(t,s)}{d(s)}\right|ds,$$

$$F_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{\varphi_1(t,s)}{d(s)}\right|ds,\quad F_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{\psi_1(t,s)}{d(s)}\right|ds,$$

$$G_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{\varphi_2(t,s)}{d(s)}ds\right|,\quad G_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{\psi_2(t,s)}{d(s)}\right|ds.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 6. Система (1) устойчива тогда и только тогда, когда существуют такие $u_i, v_i\in \mathrm{W}$, что спектральный радиус матрицы $\begin{pmatrix}F_1 & F_2\\ G_1 & G_2\end{pmatrix}$ меньше единицы. При этом компоненты матрицы Γ оцениваются неравенствами

$$\sigma_{11}\le\frac{(1-G_2)U_1+F_2V_1}{(1-G_2)(1-F_1)-G_1F_2},$$

$$\sigma_{12}\le\frac{G_1U_1+(1-F_1)V_1}{(1-G_2)(1-F_1)-G_1F_2},$$

$$\sigma_{21}\le\frac{(1-G_2)U_2+F_2V_2}{(1-G_2)(1-F_1)-G_1F_2},$$

$$\sigma_{22}\le\frac{G_1U_2+(1-F_1)V_2}{(1-G_2)(1-F_1)-G_1F_2}.$$

Положим в условиях теоремы 6 $v_1=0$ и $u_2=0$.

Обозначим

$$\Phi_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{f_1(t,s)}{u(s)}\right|ds,\quad \Phi_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{f_2(t,s)}{u(s)}\right|ds,$$

$$\Theta_1=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{g_1(t,s)}{v(s)}ds\right|,\quad \Theta_2=\sup_{t\ge a}\int_a^t\left|\frac{g_2(t,s)}{v(s)}\right|ds,$$

где

$$f_1(t,s)=\begin{cases}\dot u(t)+p_{11}(t)u(h_{11}(t)), \text{если}\quad h_{11}(t)\ge s,\\ \qquad\dot u(t),\qquad\qquad \text{если}\; h_{11}(t)<s\le t,\\ \qquad 0,\qquad\qquad\quad \text{если}\quad t<s,\end{cases}$$

$$f_2(t,s)=\begin{cases}p_{21}(t)u(h_{21}(t)), \text{если}\; h_{12}(t)\ge s,\\ \qquad 0,\qquad\quad \text{если}\; h_{12}(t)<s,\end{cases}$$

$$g_1(t,s)=\begin{cases}p_{12}(t)v(h_{12}(t)), \text{если}\; h_{12}(t)\ge s,\\ \qquad 0,\qquad\quad \text{если}\; h_{12}(t)<s,\end{cases}$$

$$g_2(t,s)=\begin{cases}\dot v(t)+p_{22}(t)v(h_{22}(t)), \text{если}\quad h_{22}(t)\ge s,\\ \qquad\dot v(t),\qquad\qquad \text{если}\; h_{22}(t)<s\le t,\\ \qquad 0,\qquad\qquad\quad \text{если}\quad t<s.\end{cases}$$

Следствие. Если существуют такие функции $u,v\in\mathrm{W}$, что $u(t)v(t)\ne 0$ при всех $t\ge a$ и спектральный радиус матрицы $\begin{pmatrix}\Phi_1 & \Phi_2\\ \Theta_1 & \Theta_2\end{pmatrix}$ меньше единицы, то система (1) устойчива.

Пример. Полагая, например,

$$u(t)=e^{-\int_a^t p_{11}(s)ds},\; v(t)=e^{-\int_a^t p_{22}(s)ds},$$

где $p_{11}(t)\ge\delta>0$, $p_{22}(t)\ge\delta>0$, получим, что система (1) устойчива, если

$$\theta_1=\operatorname*{vraisup}_{h_{11}(t)\ge a}\int_{h_{11}(t)}^t p_{11}(s)\,ds<\ln 2,$$

$$\theta_2=\operatorname*{vraisup}_{h_{22}(t)\ge a}\int_{h_{22}(t)}^t p_{22}(s)\,ds<\ln 2$$

и $$\left\|\frac{p_{12}}{p_{22}}\right\|\left\|\frac{p_{21}}{p_{11}}\right\|<(2e^{-\theta_1}-1)(2e^{-\theta_2}-1).$$

Отметим в заключение, что часть изложенных выше результатов была опубликована ранее без доказательств в работе [5].

Список источников

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
3. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 745–754.
4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Изд-во "Наука", 1981. 800 с.
5. *Гусаренко С.А.* Об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь. 1989.С. 3– 9.

References

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Elementy sovremennoj teorii funkcional'no-differencial'nyh uravnenij. Metody i prilozheniya. M.: Institut komp'yuternyh issledovanij; 2002. 384 s. (In Russ.).
2. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Ustojchivost' reshenij uravnenij s obyknovennymi proizvodnymi. Perm': Izd-vo Perm. un-ta; 2001. 230 s. (In Russ.).
3. *Azbelev N.V., Berezanskij L.M., Simonov P.M., CHistyakov A.V.* Ustojchivost' linejnyh sistem s posledejstviem I. Differenc. Uravneniya. 1987;23(5):745–754. (In Russ.).
4. *Prudnikov A.P., Brychkov YU.A., Marichev O.I.* Integraly i ryady. M.: Izd-vo "Nauka"; 1981. 800 s. (In Russ.).
5. *Gusarenko S.A.* Ob ustojchivosti sistemy dvuh linejnyh differencial'nyh uravnenij s zapazdyvayushchim argumentum. Kraevye zadachi: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm. politekhn. in-t. Perm'. 1989:3-9. (In Russ.).

Информация об авторе:

С. А. Гусаренко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID 5480.

Information about the author:

S. A. Gusarenko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Perm State University (15, Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), AuthorID 5480.