Научная статья
УДК 531.381; 531.395
DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-29-35

Квазиперманентное движение сложной механической системы

Николай Николаевич Макеев
Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru, https://orcid.org/ 0000-0003-2807-977X

Аннотация. Исследуется движение механической системы с переменным составом массы и изменяемой геометрической конфигурацией, непрерывно изменяющимися во времени согласно заданной детерминированной программе. Свободная механическая система движется относительно центра масс под воздействием реактивных, вариационных, кориолисовых и линейных диссипативных сил так, что ее центр масс не перемещается относительно неизменяемой основы системы (тела-носителя). Движение частиц изменяемой части системы (присоединенных масс − рабочего тела) относительно носителя совершается непрерывно во времени и имеет безударный характер, определяющийся заданной управляющей программой. Рассматривается задача о нахождении необходимых условий существования системы, при которых одна из компонент абсолютной угловой скорости неизменяемой части системы постоянна (квазиперманентное движение). Эти условия интерпретируются как управляющие связи, наложенные на механическую систему, реализующие квазиперманентное движение. Данная задача решается с применением метода интегрального многообразия системы уравнений движения исследуемого объекта.

Ключевые слова: *сложная механическая система; квазиперманентное движение; управляющая связь; интегральное многообразие*

Для цитирования: *Макеев Н. Н.* Квазиперманентное движение сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 4(59). С. 29–35. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-29-35.

Статья поступила в редакцию 01.11.2022; одобрена после рецензирования 08.11.2022; принята к публикации 10.11.2022.

Research article

Quasi-permanent Motion of a Complex Mechanical System

Nikolay N. Makeev
Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru, https://orcid.org/ 0000-0003-2807-977X

Abstract. The motion of a mechanical system with a variable mass composition and variable geometric configuration is studied, continuously changing in time according to a given deterministic program. A free mechanical system moves relative to the center of mass under the influence of reactive, variational, coriolis and linear dissipative forces so that its center of mass does not move relative to the unchanging basis of the system (the carrier body). The motion of the particles of the changeable part of the system (attached masses – the working body) relative to the carrier is continuous in time and has a shock-free character determined by a given control program. We consider the problem of finding the necessary conditions for the existence of the system under which one of the components of the absolute angular velocity of the unchanging part of the system is constant (quasipermanent motion). These conditions are interpreted as control relations imposed on the mechanical system, realizing quasipermanent motion. This problem is solved using the integral manifold method of the system of equations of motion of the object under study.

Keywords: *complex mechanical system; quasi-permanent motion; control connection; integral manifold*

For citation: *Makeev N. N.* Quasi-permanent Motion of a Complex Mechanical System // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022;4(59):29–35. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-29-35.

The article was submitted 01.11.2022; approved after reviewing 08.11.2022; accepted for publication 10.11.2022.

1. Основные предпосылки

Объектом исследования является механическая система, структурная модель которой предполагает непрерывное изменение во времени состава массы и ее геометрической конфигурации [1], задаваемое априорно построенной для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ управляющей программой. Эта программа определяет совокупность структурно-динамических параметров механической системы (в том числе и управляющих параметров) так, что система ее динамических уравнений является аналитически замкнутой относительно основных переменных − компонент вектора угловой скорости. При этом возможные ограничения, налагаемые на управляющие параметры системы, интерпретируются как *управляющие связи,* устанавливающие определенный режим состояния данной системы. Такого рода объекты, идентифицированные с описанной структурной моделью, названы *сложными механическими системами* (СМС).

Таким образом, механическая система с переменным составом массы, а также система с изменяемой геометрической конфигурацией являются частными видами СМС.

2. Предварительные положения

Введем правые координатные ортобазисы Γ_1, Γ_2 с общим началом в точке *C*, совпадающей с центром масс СМС: базис Γ_1, неизменно связанный с носителем системы (структурно неизменяемым абсолютно твердым телом), и базис Γ_2 $(Cx_1x_2x_3)$, оси Cx_j которого для каждого $t \in T$ направлены по главным в полюсе *C* осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = diag[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$.

В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_2 в общем случае вращается относительно базиса Γ_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r(\omega_j^r)$, зависимость которой от времени t, величин $A_j(t)$ и компонент $\mathrm{v}_j^r(t)$ $(j = 1,2,3)$ относительной скорости частиц рабочего тела $\mathbf{v}^r(t)$ известна и приведена в работе [2].

Таким образом, непрерывные зависимости вида $\mathbf{v}^r(t)$, $\boldsymbol{\omega}^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесенные к базису Γ_2, считаются программно заданными и, следовательно, известными в любой момент времени. При этом предполагается, что центр масс *C* СМС для $t \in T$ не перемещается относительно базиса Γ_1 в силу выполнения достаточных условий его стабилизации.

В дальнейшем рассматривается движение относительно центра масс свободной от связей СМС под воздействием внешних сил. Это воздействие определяется результирующими моментами относительно полюса *C* следующих сил [1]:

− реактивных $\mathbf{L}^r(L_j^r)$, обусловленных переносом рабочего тела за границы области *D;*

− вариационных $\mathbf{L}^v(L_j^v)$, возникающих при переменной скорости этого переноса $\mathbf{v}^r(t)$;

− кориолисовых сил инерции $\mathbf{L}^K(L_j^K)$;

− линейных диссипативных сил с результирующим моментом

$$\mathbf{L}^D(t, \boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\Lambda}(t)\boldsymbol{\omega}, \qquad (1)$$

где обозначено: $\boldsymbol{\omega}$ − абсолютная угловая скорость носителя СМС,

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \mathrm{diag}\,[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)],$$

$\lambda_j(t)$ − заданные нестационарные диссипативные коэффициенты;

$$\mathbf{L}^K = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где элементы матрицы **A** есть [3]

$$a_{11}(t) = 2\int_D \rho(x_2\,\mathrm{v}_2^r + x_3\,\mathrm{v}_3^r)\,dV \quad (1, 2, 3), \qquad (3)$$

$$a_{ij}(t) = 2\int_D \rho x_j \, \mathrm{v}_i^r \, dV \quad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j).$$

В равенствах (3) D − ограниченная односвязная область, занимаемая рабочим телом СМС; $\rho(t, \mathbf{r})$ − локальная плотность рабочего тела (функция класса C^0); $\mathbf{r}(x_j)$ − радиус-вектор текущей точки области *D*. Символ (1, 2, 3) здесь и всюду далее обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3, каждый из которых относится к проекции вектора на соответствующую ось координат базиса Γ_2.

В дальнейшем предполагается, что на СМС не воздействуют другие внешние силы (через контактное воздействие или путем влияния силовых полей), помимо указанных выше.

Динамические уравнения, определяющие состояние СМС при условиях, содержащихся в принятых предпосылках, в проекциях на оси координат базиса Γ_2 имеют вид [4]

$$\begin{aligned} A_1(\dot{\omega}_1 + \omega_2^r \omega_3 - \omega_3^r \omega_2) + (A_3 - A_2)\omega_2 \omega_3 = \\ = L^r + L^v + L^K + L^D \qquad (1, 2, 3). \end{aligned} \tag{4}$$

В силу соотношений (1)–(4) уравнения движения свободной СМС в проекциях на оси базиса Γ_2 имеют вид [3]

$$\dot{\omega}_1 + a_1 \omega_2 \omega_3 + (\mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) = F_1 \qquad (1, 2, 3), \tag{5}$$

где $\mathbf{b}_n = [b_{ni}]^T$ (n – фиксировано, $i = 1, 2, 3$). В уравнениях (5) обозначено [3]:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= A_1^{-1}(A_3 - A_2), \\ b_{11}(t) &= A_1^{-1}(a_{11} + \lambda_1), \\ b_{12}(t) &= -(\omega_3^r + A_1^{-1} a_{12}), \\ b_{13}(t) &= \omega_2^r - A_1^{-1} a_{13}, \\ F_1(t) &= A_1^{-1}(L_1^r + L_1^v) \qquad (1, 2, 3). \end{aligned} \tag{6}$$

В равенствах (6) обозначено: $A_j(t)$ – главные центральные осевые моменты инерции СМС (собственные значения оператора инерции); $\lambda_j(t)$ – диссипативные параметры системы. При этом циклической перестановке индексов в величинах a_i, b_{ij}, определяемых равенствами (6), подлежат значения всех индексов i , j. В определяющих соотношениях (4), (5) величины a_j, a_{ij}, b_{ij}, F_j $(i, j = 1, 2, 3)$ полагаются программно заданными для $t \in T$ явными функциями *t*, обладающими необходимой степенью аналитической гладкости. В силу этого основная ДС (5) аналитически замкнута по величинам ω_j.

Система уравнений (5) определяет динамику СМС с реактивным приводом относительно центра масс в режиме авторегулирования, соответствующую модельной схеме Р. Граммеля для неизменяемого твердого тела постоянного состава массы [5]. В соответствии с принятыми предпосылками эта система уравнений соответствует эволюционной детерминированной *динамической модели* данного объекта [3].

3. Постановка задачи

Из множества возможных движений СМС, определяемых системой уравнений (5), выделим класс движений механической системы, для которого при $t \in T$ существует первый интеграл вида

$$\omega_3(t) = \text{const} = p. \tag{7}$$

Предполагая, что выделенное подмножество значений заведомо не является пустым, определим аналитические условия, при которых интеграл (7) существует. Эти условия будут являться необходимыми условиями его существования и будут выражаться ограничениями, наложенными на структурно-динамические параметры данной СМС. Данные ограничения будут являться *управляющими связями* [6], если они будут содержать параметры, управляющие текущим состоянием механической системы (*управляющими параметрами*). Указанные связи будут определять характер относительного (по отношению к базису Γ_2) движения рабочего тела системы при заданных управлениях $F_j(t)$ (*j* = 1, 2, 3).

По классификации П.В. Харламова [7] динамическая система, для которой имеет место интеграл вида (7), является системой с одним линейным интегралом. Вместе с тем, этот интеграл, если он существует, можно интерпретировать как дополнительный по Е. Уиттекеру [8] первый интеграл динамической системы (5).

При данных предпосылках следует ожидать, что для системы (5) первый интеграл вида (7) может существовать на некоторых программных управляющих связях или, по крайней мере, для отдельных значений начальных условий [9]. Аналогичная задача для случая движения СМС в пассивном режиме внешнего управления рассмотрена в работе [10] и в простейшем случае − при определенном движении, происходящем под воздействием системы реактивных сил и специальном заданном относительном движении рабочего тела СМС − в монографии [11, с. 272].

4. Необходимые условия

Получим требуемые условия, полагая, что для $t \in T$ выполняется $a_3 \neq 0 \quad (A_1 \neq A_2)$.

Если интеграл (7) существует, то [12]

$$\dot{\omega}_3(t) = \ddot{\omega}_3(t) = 0 \quad (t \in T),$$

откуда в силу третьего уравнения системы (5) следует

$$a_3\omega_1\omega_2 + \sum_{j=1}^{3} b_{3j}\omega_j = F_3 \quad (\omega_3 = p), \tag{8}$$

$$\dot{a}_3\omega_1\omega_2 + \sum_{j=1}^{3}[\dot{b}_{3j}\omega_j + (a_3\omega_{3-j} + b_{3j})\dot{\omega}_j] = \dot{F}_3 \quad (\omega_0 = 0). \tag{9}$$

Обозначим

$$k(t) = a_3^{-1}\dot{a}_3 - \mathrm{tr}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{3} b_{jj}, \tag{10}$$

и введем ненулевые антисимметрические векторы $\mathbf{b}_3(b_{31}, b_{32}, b_{33})$, $\mathbf{b}_3^*(b_{13}, b_{23}, b_{33})$.

Пусть

$$m_0(t) = (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{F}) - \dot{F}_3,$$

$$m_1(t) = \dot{b}_{31} - (b_{11} + b_{33})b_{31} - b_{21}b_{32} + a_3F_2 \quad (1, 2),$$

$$m_3(t) = \dot{b}_{33} - (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3^*),$$

$$k_1(t) = a_2b_{32} + a_3b_{23} \quad (1, 2).$$

Из равенства (9) в силу уравнений (5) и соотношений (10) следует

$$a_3(k\omega_1\omega_2 - C_1\omega_1^2 - C_2\omega_2^2) + D_1\omega_1 + D_2\omega_2 + m_3p + m_0 = 0, \tag{11}$$

где обозначено

$$C_1 = a_2p + b_{21}, \quad D_1 = m_1 - k_1p \quad (1, 2).$$

Выделим класс движений СМС, при котором для $t \in T$ выполняется условие

$$a_3\omega_1 + b_{32} \neq 0. \tag{12}$$

Исключая из соотношения (11) величину ω_2 в силу равенства (8) и условия (12), в результате получаем

$$Q_4(\omega_1) \equiv \sum_{k=0}^{4} \lambda_k(t)\omega_1^k = 0, \tag{13}$$

где обозначено:

$$\lambda_0(t) = \sum_{s=0}^{3} c_{s0}p^s, \quad \lambda_1(t) = \sum_{s=0}^{2} c_{s1}p^s,$$

$$\lambda_2(t) = c_{12}p + c_{02},$$

$$\lambda_s(t) = c_{1s}p + c_{0s} \quad (s = 3, 4),$$

$$c_{30}(t) = a_1a_3b_{33}^2,$$

$$c_{20}(t) = [a_3(b_{12}b_{33} - 2a_1F_3) - k_2b_{32}]b_{33},$$

$$c_{21}(t) = (2a_1b_{31} - k_2)a_3b_{33},$$

$$c_{10}(t) = a_1a_3F_3^2 + (k_2b_{32} - 2a_3b_{12}b_{33})F_3 + (m_2b_{33} - m_3b_{32})b_{32},$$

$$c_{00}(t) = a_3b_{12}F_3^2 - m_2b_{32}F_3 - m_0b_{32}^2,$$

$$c_{01}(t) = (m_2b_{31} - m_1b_{32} - 2a_3m_0)b_{32} - (2b_{12}b_{31} + kb_{32})a_3F_3,$$

$$c_{02}(t) = [(b_{12}b_{31} + m_2)b_{31} + (b_{21}b_{32} - 2m_1)b_{32} + (b_{31}b_{32} - a_3F_3)k - a_3m_0]a_3,$$

$$c_{03}(t) = (2b_{21}b_{32} + kb_{31} - m_1)a_3^2,$$

$$c_{04}(t) = a_3^3b_{21},$$

$$c_{11}(t) = (kb_{32} + 2b_{12}b_{31})a_3b_{33} - (2a_3m_3 + k_2b_{31} - k_1b_{32})b_{32} + (k_2 - 2a_1b_{31})a_3F_3,$$

$$c_{12}(t) = [(a_2b_{32} + 2k_1)b_{32} + (kb_{33} - b_{13}b_{31} - m_3)a_3]a_3,$$

$$c_{13}(t) = (2a_2b_{32} + k_1)a_3^2,$$

$$c_{14}(t) = a_2a_3^3.$$

Равенство (13) представляет собой полином, вид которого соответствует виду определяющего полинома, содержащегося в аналогичной модельной задаче [13]. Это равенство является тождеством по переменной ω_1, в силу чего полагаем

$$\lambda_r(t) = 0 \quad (r = 0, \ldots, 4). \tag{14}$$

Условия (14) приводят к следующим структурным ограничениям:

$$a_2p + b_{21} = 0, \tag{15}$$

$$a_3F_2(t) = \sigma_1p + \sigma_2b_{31} + 3b_{21}b_{32} - \dot{b}_{31}, \tag{16}$$

$$F_3(t) = \mu[F_3^0 - \int_0^t f_1(\tau)\mu^{-1}(\tau)d\tau], \tag{17}$$

$$a_3b_{31}b_{32}F_1(t) = f_2(t), \tag{18}$$

$$b_{32}\Phi(t) + P_3(F_3) + Q_3(p) = 0. \tag{19}$$

В равенствах (16)–(19) обозначено:

$$\sigma_1(t) = k_1 + 2a_2b_{32}, \quad \sigma_2(t) = k + b_{11} + b_{33},$$

$$\mu(t) = \exp \int_0^t (k + b_{33})\, d\tau,$$

$$\Phi(t) = (c_0 - a_3 F_3) F_1 + b_{32} (\dot{F}_3 - b_{32} F_2),$$

$$P_3(F_3) = \sum_{n=0}^{3} b_n(t) (F_3)^n,$$

$$Q_3(p) = \sum_{n=0}^{3} c_n(t)\, p^n,$$

$$b_0(t) = \dot{b}_{32} - b_{12} b_{31} - b_{22} b_{32},$$

$$b_1(t) = -[2 a_1 a_3 b_{33} p^2 + (2 a_3 b_{12} b_{33} -$$
$$- k_2 b_{32}) p + b_0 b_{32}],$$

$$b_2(t) = a_3 b_{12}, \qquad b_3(t) = a_1 a_3\, p,$$

$$c_0(t) = a_3 b_{33} p - b_{31} b_{32},$$

$$c_1(t) = (\beta_1 b_{33} + \beta_2 b_{32}) b_{32},$$

$$c_2(t) = (a_3 b_{12} b_{33} - k_2 b_{32}) b_{33},$$

$$c_3(t) = a_1 a_3 (b_{33})^2,$$

$$\beta_1(t) = (b_{33}^{-1} b_{32})^{\bullet} b_{33} - b_{12} b_{31},$$

$$\beta_2(t) = b_{13} b_{31} + b_{23} b_{32} - b_{22} b_{33}.$$

Величины $f_1(t),\ f_2(t)$, содержащиеся в равенствах (17), (18), в силу выражения (16) определяются соотношениями

$$f_1(t) = a_3^{-1} [(a_3^{-1} c_{12} - 3 b_{32} \sigma_1)\, p + m b_{32}],$$

$$f_2(t) = g_1 p^2 + g_2 p + g_3 F_2 + g_4 F_3 + \qquad (20)$$
$$+ g_5 \dot{F}_3 + g_6,$$

где зависимости F_2, F_3 выражаются равенствами (16), (17). В соотношениях (20) обозначено:

$$m(t) = a_3^{-1} (a_3 b_{31})^{\bullet} - (3k + b_{33}) b_{31} - 6 b_{21} b_{32},$$

$$g_1(t) = a_3 (a_1 b_{31} - a_3 b_{13}) b_{33},$$

$$g_2(t) = a_3 b_{33} (2 b_{12} b_{31} + k b_{32}) +$$
$$+ b_{32} (k_1 b_{32} - k_2 b_{31} - 2 a_3 m_3),$$

$$g_3(t) = -3 a_3 (b_{32})^2,$$

$$g_4(t) = a_3 [(k_2 - 2 a_1 b_{31})\, p -$$
$$- 2 (b_{12} b_{31} + b_{32} b_{33}) + k b_{32}],$$

$$g_5(t) = 2 a_3 b_{32},$$

$$g_6(t) = b_{32} [\beta_3 (b_{31})^2 + \beta_4 b_{32}],$$

$$\beta_3(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{b_{32}}{b_{31}} \right) - b_{12},$$

$$\beta_4(t) = b_{11} b_{31} + b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}.$$

Равенство (15) является управляющей связью и при $A_1 \neq A_3$ может быть соотношением, определяющим величину p при остальных заданных параметрах, содержащихся в этом равенстве. Величину параметра p можно также выразить через известные структурные параметры СМС из равенства (16), если $\sigma_1 \neq 0$.

Соотношения (16)−(18) определяют выражения для активных управлений F_j (j = 1, 2, 3), соответственно, которые имеют место в случае, при котором для системы (5) существует первый интеграл (7). Здесь управления F_2, F_3 определяются при $A_1 \neq A_2$, а F_1 − при структурно-кинематическом условии

$$(A_1 - A_2)(A_3 \omega_1^r - a_{32})(A_3 \omega_2^r + a_{31}) \neq 0.$$

Равенство (19) является программным кинетическим условием, налагающем в силу соотношений связи (15)−(18) ограничение на характер относительного движения рабочего тела СМС, происходящего в области D.

Таким образом, в данной задаче на изначально заданное число независимых параметров системы (5) из программного множества $F_i(t),\quad A_i(t),\ \lambda_i(t),\ a_{ij}(t)\ (i, j = 1, 2, 3)$ наложено меньшее или равное число ограничений. Следовательно, остальные параметры этой системы являются свободными от связей. Это обстоятельство открывает дополнительные возможности для программного управления состоянием данной СМС.

Ограничения (15)−(19) составляют искомое необходимое условие существования первого интеграла (7) системы уравнений (5).

5. Отдельные случаи квазиперманентного движения

Рассмотрим частные виды квазиперманентных движений, возможных при определенных ограничениях, наложенных на структурно-динамические параметры СМС.

Случай 1

В отличие от общего случая положим

$$A_1(t) = A_2(t) \qquad (t \in T) \qquad (21)$$

и, кроме того, пусть $b_{32} \neq 0$. Последнее условие эквивалентно следующему:

$$\omega_1^r(t) \neq A_3^{-1} a_{32}(t) \qquad (t \in T). \qquad (22)$$

Условие (21) определяет кинетическую симметрию СМС относительно оси Ox_3 базиса Γ_2, совпадающей с главной центральной осью инерции системы, а ограничение (22) устанавливает определенный характер относительного движения рабочего тела системы; при этом в силу равенства (21) выполняется условие $\omega_3^r(t) \equiv 0$ [2].

Принимая $a_3(t) = 0$ в силу ограничения (21), из соотношений (8), (11) получаем

$$\Phi_1(p)\omega_1 + \Phi_2(p) = 0, \tag{23}$$

где обозначено:

$$\Phi_1(p) = (k_2 b_{31} - k_1 b_{32})\, p + Y,$$
$$\Phi_2(p) = k_2 b_{33} p^2 + Z p + X,$$
$$X = m_0 b_{32} + m_2 F_3,$$
$$Y = m_1 b_{32} - m_2 b_{31},$$
$$Z = m_3 b_{32} - m_2 b_{33} - k_2 F_3.$$

Поскольку равенство (23) является тождеством по переменной ω_1, то должны выполняться условия

$$\Phi_1(p) = 0, \quad \Phi_2(p) = 0. \tag{24}$$

Исключая из системы равенств (24) параметр *p*, в результате получаем необходимое условие существования квазиперманентного движения СМС, обладающей осевой кинетической симметрией вида (21). При этом достаточное условие существования действительных значений параметра *p* определяется дискриминантным условием

$$Z^2 - k_2 b_{33} X \geq 0, \tag{25}$$

выполняющемся при $a_1 b_{31} b_{33} \neq 0$.

В случае равенства в соотношении (25) значение параметра *p* является единственным; в остальных случаях для этого параметра существует пара различных значений.

Случай 2

Пусть выполняется условие (21) и кинетические ограничения:

$$\begin{aligned} &A_3\omega_2^r + a_{31} = 0, \quad A_3\omega_1^r - a_{32} = 0, \\ &a_{33} + \lambda_3 = 0, \quad F_3(t) = 0 \quad (t \in T). \end{aligned} \tag{26}$$

В силу третьего уравнения динамической системы (5) получаем $b_{3j}(t) = 0$ (j = 1, 2, 3), $\dot{\omega}_3 = 0$, что при $F_3 \equiv 0$ и определяет существование первого интеграла (7).

Таким образом, ограничения (21), (26) выражают достаточное условие существования данного интеграла для динамической системы (5) в случае осесимметричности СМС.

В частности, если в условиях (26) для $t \in T$ положить

$$\mathbf{v}^r(t) = \boldsymbol{\omega}^r(t) \equiv 0, \;\; \boldsymbol{\Lambda}(t) \equiv 0,$$

то получаем случай, приведенной в работе [1].

Случай 3

Если усилить структурно-кинетические ограничения (21), (26), присоединив к ним дополнительные условия для $t \in T$:

$$b_{12}(t) = b_{13}(t) = F_1(t) = 0,$$
$$b_{21}(t) = b_{23}(t) = F_2(t) = 0,$$

то вид динамической системы (5) будет идентичен виду соответствующей системы, построенной в задаче о реактивном демпфировании [11, с. 272], имеющей прикладное значение. В этом случае для системы уравнений (5) также имеет место первый интеграл (7).

Список источников

1. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости тела переменной массы // Труды Казанского авиационного института. Казань, 1959. Вып. 48. 118 с.
2. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация процессов управления. Пермь, 1978. Вып. 10. С. 126−131.
3. *Макеев Н.Н.* Асимптотика вращений сложной механической системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2004. Вып. 36. С. 52−73.
4. *Карагодин В.М.* Некоторые вопросы механики тела переменной массы // Труды Московского авиационного института. М.: Оборонгиз, 1956. Вып. 63. 32 с.
5. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: Периодический сб. переводов иностранных статей. 1958. № 6. С. 145−151.
6. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политехн. ин-т. Саратов, 1989. Депониров. в ВИНИТИ 14.03.89, № 1656 − В 89. 123 с.
7. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 567−572.
8. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.

9. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. *Макеев Н.Н.* О некоторых движениях гиростата переменной массы в случае типа Эйлера // Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1974. Вып. 6. С. 71−78.
11. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
12. *Харламов П.В.* О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 4. С. 805−807.
13. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 26−34.

References

1. *Aminov M.Sh.* Nekotorye voprosy dvizheniya i ustoychivosti tela peremennoy massy. Trudy Kazanskogo aviatsionnogo instituta. Kazan, 1959;(48):118. (In Russ.).
2. *Makeev N.N.* O nekotorykh svoystvakh glavnykh osey inertsii tela peremennoy massy. Problemy mekhaniki upravlyaemogo dvizhe-niya. Optimizatsiya protsessov upravleniya. 1978;(10):126−131. (In Russ.).
3. *Makeev N.N.* Asimptotika vrashcheniy slozhnoy mehanicheskoy sistemy. Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy. Perm, 2004;(36):52−73. (In Russ.).
4. *Karagodin V.M.* Nekotorye voprosy mekhaniki tela peremennoy massy. Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta. M.: Oborongiz. 1956;(63):32. (In Russ.).
5. *Grammel R.* Teoriya nesimmetrichnogo giroskopa s reaktivnym privodom. Mekhanika: Periodicheskiy sbornik perevodov inostrannykh statey. 1958;(6):145−151. (In Russ.).
6. *Makeev N.N.* Integraly slozhnykh system na upravlyayushch svyazyakh. Saratovskiy politekhnicheskiy institut. Saratov, 1989. Deponirovano v VINITI 14.03.89, № 1656−V89. 123 p. (In Russ.).
7. *Kharlamov P.V.* O resheniyakh uravneniy dinamiki tvyerdogo tela. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1965;(29:3):567−572. (In Russ.).
8. *Uitteker E.T.* Analiticheskaya dinamika. M., L.: ONTI; 1937. 500 p. (In Russ.).
9. *Dzhakalya G.E.O.* Metody teorii vozmushcheniy dlya nelineynykh system. M.: Nauka; 1979. 320 p. (In Russ.).
10. *Makeev N.N.* O nekotorykh dvizheniyakh giroctata peremennoy massy v sluchae tipa Eylera. Problemy mekhaniki upravlyaemogo dbizheniya. Perm, 1974;(6):71−78. (In Russ.).
11. *Magnus K.* Giroskop. Teoriya i primenenie. M.: Mir; 1974. 526 s. (In Russ.).
12. *Kharlamov P.V.* O lineynykh integralakh uravneniy dvizheniya tyazhyelogo tvyerdogo tela vokrug nepodvizhnoy tochki. Dokl. AN SSSR. 1962. (143:4):805−807. (In Russ.).
13. *Kharlamov P.V.* Polinomialnye resheniya uravneniy dvizheniya tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1965;(29:1):26−34. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID 374535, WoS AAW-4380-2020.

Information about the author:

N. N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID 374535, WoS: AAW-4380-2020.