МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 519.6
DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17

Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде

Н. К. Волосова[1], К. А. Волосов[2], А. К. Волосова[2], М. И. Карлов[3], Д. Ф. Пастухов[4, 5], Ю. Ф. Пастухов[4, 5]
[1]Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2]Московский Университет Транспорта (МИИТ), Москва, Россия
[3]Московский физико-технический университет МФТИ, Москва, Россия
[4]Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Белоруссия
[5]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. Предложен алгоритм численного решения уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром методом замены интеграла и матричным решением СЛАУ с квадратурной формулой двенадцатого порядка погрешности с числом интервалов интегрирования, кратным десяти. Новая формула, по сравнению с формулой Симпсона, дает 15 значащих цифр для узловых значений функции решения даже при небольшом числе интервалов 10,20 на отрезке за конечное число элементарных операций. Полученный алгоритм имеет двойную точность и минимальное время вычислений. В то время как формула Симпсона совместно с матричным методом решения СЛАУ дает только 6 значащих цифр с числом интервалов интегрирования равным двадцати. Более того, для формулы Симпсона двойная точность недоступна (15 нулей в бесконечной норме невязки решения), так как язык FORTRAN допускает максимальные массивы матриц 200×200. Получены оценки верхней границы допустимого параметра |λ| для матрицы уравнения Фредгольма со строгим диагональным преобладанием или с небольшой нормой интегрального ядра.

Ключевые слова: *уравнение Фредгольма; численные методы; уравнения математической физики; матрица; интегральные уравнения*

Для цитирования: *Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К., Карлов М. И., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф.* Решение интегральный уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 4(59). С. 9–17. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17.

Статья поступила в редакцию 26.08.2022; одобрена после рецензирования 20.10.2022; принята к публикации 31.10.2022.

MATHEMATICS

Research article

Solution of the Fredholm Integral Equations Method of Replacing the Integral by a Quadrature with the Twelveth Order of Error in Matrix Form

N.K. Volosova[1], K.A. Volosov[2], A. K. Volosova[2], M. I. Karlov[3], D. F. Pastuhov[4,5], Yu. F. Pastuhov[4,5]
[1]University of the Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

[2]Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia
[3]Moscow Physics and Technology University MIPT, Moscow, Russia
[4]Polotsk State University, Novopolotsk, Belrussia
[5]Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Moscow, Russia

Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract. An algorithm for the numerical solution of the Fredholm equation of the second kind with a continuous kernel by the method of integral replacement and the matrix solution of SLAE with a quadrature formula of the twelfth order of error with a number of integration intervals divisible by ten is proposed. The new formula, compared to Simpson's formula, gives 15 significant digits for the nodal values of the solution function, even with a small number of intervals of 10.20 on a segment in a finite number of elementary operations. The resulting algorithm has double precision and minimal computation time. While Simpson's formula, together with the matrix method for solving SLAE, gives only 6 significant digits with twenty integration intervals. Moreover, double precision is not available for Simpson's formula (15 zeros in the infinite norm of the solution residual), since the FORTRAN language allows maximum matrix arrays of 200×200. Estimates are obtained for the upper bound of the admissible parameter |λ| for the matrix of the Fredholm equation with strict diagonal dominance or with a small norm of the integral kernel.

Keywords: *Fredholm equation; numerical methods; equations of mathematical physics; matrix; integral equations*

For citation: *Volosova N. K., Volosov K. A., Volosova A. K., Karlov M. I., Pastuhov Yu. F.* Solution of the Fredholm Integral Equations Method of Replacing the Integral by a Quadrature With the Twelveth Order of Error in Matrix Form // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022;4(59):9–17. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2022-4-9-17.

The article was submitted 26.08.2022; approved after reviewing 20.10.2022; accepted for publication 31.10.2022

Введение

В работе [1] описан метод замены интеграла для численного решения уравнения Фредгольма второго рода. Для этого нужно составить систему алгебраических линейных уравнений (СЛАУ), в которой неизвестными являются узловые значения функции. Примеры из задачника [1] используют квадратурную формулу Симпсона в методе замены ядра.

В данной работе мы предлагаем матричный алгоритм численного решения СЛАУ, используя квадратурную интегральную формулу с 12-м порядком погрешности [2], [3].

В работе [2] использован метод последовательных итераций, метод прост, но ограничивает допустимую область по параметру λ, то есть применим при малых по модулю значениях λ. Поэтому в данной работе матричный алгоритм решения СЛАУ существенно расширит область допустимого параметра λ.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Фредгольма 2-го рода (1), которое нужно решить методом замены интеграла, т. е. таблично на дискретной сетке $x_i, i=\overline{0,n}$ найти узловые значения неизвестной функции $y_i, i=\overline{0,n},$.

Метод описан в работе [1]:

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x)\,, \qquad (1)$$

где: $K(x,s)\in C([a,b]\times[a,b])$ – непрерывная функция (кусочно-непрерывная на квадрате $(x,s)\in[a,b]\times[a,b]$ – ядро интегрального уравнения Фредгольма(1)), $f(x)\in C[a,b]$ – заданная непрерывная правая часть уравнения (1), λ – известный параметр. Заменяя интеграл квадратурной интегральной формулой [1], запишем дискретный аналог (1):

$$y_i-\lambda\sum_{j=0}^{n}c_jK(x_i,s_j)y_j = f(x_i) \Leftrightarrow y_i-\lambda\sum_{j=0}^{n}K_{i,j}c_jy_j = f_i\,,$$
$$x_i=a+ih, s_j=a+jh;\;\; i,j=\overline{0,n}\;. \qquad (2)$$

В формуле (2) – алгебраической системе линейных уравнений относительно y_i весовые коэффициенты $c_j, j=\overline{0,n}$ заданы, c_j определяют точность решения системы (2) и неявно содержат шаг интегрирования $h=\frac{b-a}{n}$, n – число интервалов интегрирования на отрезке [a,b].

В работе [2] мы использовали аналогичную формулу (3), которая содержит эффективный шаг интегрирования H_p в явном виде:

$$y_i-\lambda H_p\left(\sum_{j=1}^{n}y_jK_{i,j}C_j\right)=f_i\,, y_i=y(x_i),$$

$$K_{i,j} = K(x_i, s_j), i, j = \overline{0,n}, x_i = a + h \cdot i, h = \frac{b-a}{n}, f_i = f(x_i) \quad (3)$$

где: $H_p = \frac{ph}{2}, h = \frac{b-a}{n}$ – эквивалентный шаг интегрирования, индекс кратности p связан с целыми числами p, k $n = pk, p, k \in N$, число интервалов n нацело делится на p.

В работе [2] нами построена и использована в работе [3] квадратурная интегральная формула с двенадцатым порядком погрешности (p=10). Весовые коэффициенты в системе (3) определяются алгоритмом (4):

$$H_{p=10} = \frac{ph}{2} = \frac{10h}{2} = 5h, h = \frac{b-a}{n}:$$

$$C_j = \begin{cases} C_1 = \frac{16067}{299376}, j = 0 \vee j = n; \\ C_2 = \frac{26575}{74844}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 1 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 9; \\ C_3 = -\frac{16175}{99792}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 2 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 8; \\ C_4 = \frac{5675}{6237}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 3 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 7; \\ C_5 = -\frac{4825}{5544}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 4 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 6; \\ C_6 = \frac{17807}{12474}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 5; \\ C_7 = \frac{16067}{149688}, j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 0 \wedge 0 < j < n; \\ \sum_{j=0}^{10} C_j = 2 \end{cases} \quad . \quad (4)$$

Окончательно, с учетом (4) [3, стр. 197], $n = 10k, k \in N$ формула (3) переходит в формулу (5):

$$y_i - 5h\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} y_j K_{i,j} C_j\right) + O(h^{12}) = f_i, i, j = \overline{0,n}, \quad (5)$$

$$K_{i,j} = K(x_i, s_j), x_i = a + h \cdot i, s_j = a + h \cdot j, h = \frac{b-a}{n}, f_i = f(x_i).$$

В формуле (5) весовые коэффициенты C_j записаны в виде рациональных дробей согласно формуле (4) с двойной точностью. Определим квадратную диагональную матрицу:

$$D_{k,j} = \delta_{k,j} C_j = \begin{cases} C_j, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}, \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases},$$

$$\sum_{k=0}^{n} D_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k,j} C_j = C_j, D_{k,j} = D_{j,k}. \quad (6)$$

$$y_i - 5h\lambda\left(\sum_{j=0}^{n} K_{i,j} C_j y_j\right) = f_i \Leftrightarrow y_i - 5h\lambda\left(\sum_{j=0}^{n} K_{i,j} \sum_{k=0}^{n} D_{j,k} y_k\right) = f_i$$

$$\Leftrightarrow y_i - 5h\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} K_{i,j} D_{j,k}\right) y_k\right) = f_i, i = \overline{0,n}. \quad (7)$$

Формула (7) с учетом порядка аппроксимации интеграла $O(h^{12})$ (5) и весовых коэффициентов (4), эквивалентна матричной записи (8):

$$(I - 5h\lambda \cdot KD)y + O(h^{12}) = f \Leftrightarrow$$
$$y = (I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1} f + O(h^{12}). \quad (8)$$

Возьмем от обеих частей уравнения (8) функцию нормы:

$$y = (I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1} f \Rightarrow$$
$$\|y\|_\infty = \left\|(I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1} f\right\|_\infty \leq \left\|(I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1}\right\|_\infty \|f\|_\infty. \quad (9)$$

Определение. Назовем матрицу $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ матрицей уравнения Фредгольма 2-го рода с весами (4).

В формуле (9) выбраны бесконечные матричная и векторные нормы, так как они являются согласованными [1]. Матричная и векторная норма определяются формулами

$$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{0,n}} \sum_{j=0}^{n} |a_{i,j}|, \|y\|_\infty = \max_{j=\overline{0,n}} |y_j|. \quad (10)$$

Из формул (10) следует, что для непрерывных функций, которые дискретно проектируются на двухмерную сетку (квадрат) и одномерную сетку (отрезок), бесконечные матричная и векторная нормы всегда существуют и ограничены. Из неравенства (9) следует, что бесконечная норма вектора решения y ограничена в случае

$$\|f\|_\infty < +\infty \text{ и } \left\|(I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1}\right\|_\infty < +\infty \Rightarrow \|y\|_\infty < +\infty.$$

Поэтому вектор решения непрерывен и ограничен, если ограничена норма $\left\|(I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1}\right\|_\infty < +\infty$.

Обозначим

$$A = I - 5h\lambda \cdot KD, \; \underset{*}{r} = \min_{i=\overline{0,n}}\left(|a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|\right).$$

Теорема 1 (оценка верхней границы нормы обратной матрицы) [4].

Для матрицы А с диагональным преобладанием справедлива оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\underset{*}{r}} = \frac{1}{\min_{i=\overline{0,n}}\left(|a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|\right)}. \quad (11)$$

Теорема 2 (оценка верхней границы модуля параметра $|\lambda|$).

Пусть матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ имеет строгое диагональное преобладание и пусть

$$(b-a)\min_{x\in[a,b]}\left(\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| > 0,$$

тогда для допустимого параметра λ справедлива оценка

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\left(\min_{x\in[a,b]}\left(\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i|\right)}. \tag{12}$$

Доказательство. По Теореме 1 норма обратной матрицы $\left\|A^{-1}\right\| = \left\|(I - 5h\lambda\cdot KD)^{-1}\right\|_\infty$ ограничена сверху, тогда верно $r_* = \min_{i=\overline{0,n}}\left(|a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\ j\neq i}^{n}|a_{i,j}|\right) > 0$.

Таким образом, для каждой строки матрицы $A = I - 5h\lambda\cdot KD$ справедливо неравенство (учтем также (4) и $n = 10k, k\in N$)

$$|a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\ j\neq i}^{n}|a_{i,j}| \geq r_* = \min_{i=\overline{0,n}}\left(|a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\ j\neq i}^{n}|a_{i,j}|\right) > 0\ \forall i=\overline{0,n} \Leftrightarrow$$

$$|1 - 5h\lambda K_{i,i}C_i| - 5h|\lambda|\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n}|K_{i,j}||C_j| > 0 \Leftrightarrow$$

$$|1 - 5h\lambda K_{i,i}C_i| + 5h|\lambda||K_{i,i}||C_i| - 5h|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| > 0,$$

$$|1 - 5h\lambda K_{i,i}C_i| - 5h|\lambda|\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n}|K_{i,j}||C_j| = |a_{i,i}| - \sum_{j=\overline{0,n},\ j\neq i}^{n}|a_{i,j}| \geq r_* > 0\ \forall i=\overline{0,n}$$

$$1 + 10h|\lambda||K_{i,i}||C_i| - 5h|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| \geq$$

$$|1 - 5h\lambda K_{i,i}C_i| + 5h|\lambda||K_{i,i}||C_i| - 5h|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| > 0$$

$$5h|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| \leq 5\frac{(b-a)}{n}|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}|\sum_{j=0}^{n}|C_j| =$$

$$5\frac{(b-a)}{n}|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}|2k = \frac{10k}{10k}(b-a)|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}| = (b-a)|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}|.$$

Если $1 + 10h|\lambda||K_{i,i}||C_i| - (b-a)|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}| > 0 \Rightarrow$

$$1 + 10h|\lambda||K_{i,i}||C|_i - 5h|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| > 0\ \forall i=\overline{0,n} \tag{13}$$

Очевидно, что формула (13) будет выполнена при любых значениях $x\in[a,b], i=\overline{0,n}$, если она будет выполнена при условии

$$1 + 10h|\lambda|\min_{i=\overline{0,n}}|K_{i,i}|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| - (b-a)|\lambda|\max_{j=\overline{0,n}}|K_{i,j}| > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + 10h|\lambda|\min_{s\in[a,b]}|K(x,s=x)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| - (b-a)|\lambda|\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)| > 0.$$

Последнее неравенство написано также для непрерывного ядра $K(x, s)$.

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\left((b-a)\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)| - 10h\min_{s\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i|\right)},$$

$$\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| = \frac{16067}{299376} \approx 0{,}053668\ . \tag{14}$$

Далее, потребуем выполнимость (14) при любых значениях переменной x из отрезка [a,b], тогда в задаче всегда выполнено неравенство (13). Потребуем, чтобы знаменатель (14) был положительным при всех параметрах x, имеем, если

$$(b-a)\min_{x\in[a,b]}\left(\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| > 0 \Rightarrow$$

$$\forall x\in[a,b]: (b-a)\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)| - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i| > 0$$

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\left(\min_{x\in[a,b]}\left(\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=\overline{0,n}}|C_i|\right)}. \tag{15}$$

Теорема 2 доказана, так как формулы (15) и (12) совпадают.

Теорема 3. Пусть выполнено условие $5(b-a)|\lambda|\max_{i=\overline{0,n}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|\max_{i=\overline{0,n}}|C_i| < 1$, тогда обратная матрица к матрице $A = I - 5h\lambda\cdot KD$ существует, алгоритм (4), (5), (8) корректен и верно неравенство

$$|\lambda| \leq \frac{1}{5(b-a)\max_{i=\overline{0,n}}|C_i|\max_{i=\overline{0,n}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| \leq \frac{1}{5(b-a)\max_{i=\overline{0,n}}|C_i|\max_{x=[a,b]}\frac{1}{(b-a)}\int_a^b|K(x,s)|ds}\ . \tag{16}$$

Доказательство.

Известно, что если $\|B\| < 1$, то

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{I-B} = I + B + B^2 + \ldots = I + \sum_{k=1}^{\infty}B^k.$$

В качестве матричной нормы рассмотрим бесконечную норму

$$B = 5h\lambda\cdot KD, \|B\|_\infty \leq 5h|\lambda|\|K\|_\infty\|D\|_\infty < 1 \Leftrightarrow$$

$$5h|\lambda|\max_{i=\overline{0,n}}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|\max_{i=\overline{0,n}}|C_i| \leq 1 \Leftrightarrow 5\frac{(b-a)}{n}|\lambda|\max_{i=\overline{0,n}}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|\max_{i=\overline{0,n}}|C_i| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$5(b-a)|\lambda|\max_{i=\overline{0,n}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|\max_{i=\overline{0,n}}|C_i| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| \leq \frac{1}{5(b-a)\max_{i=\overline{0,n}}|C_i|\max_{i=\overline{0,n}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|} \Leftrightarrow |\lambda| \leq \frac{1}{5(b-a)\max_{i=\overline{0,n}}|C_i|\max_{x=[a,b]}\frac{1}{(b-a)}\int_a^b|K(x,s)|ds}\ ($$

В формуле (16) интеграл $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |K(x,s)|ds$ представляет собой среднее значение модуля интегрального ядра по переменной *s*. **Теорема 3** доказана.

Теорема 4. Пусть выполнено условие в котором все нормы матриц – нормы Фробениуса $\|B\|_F \le 5h|\lambda|\|K\|_F\|D\|_F < 1$, тогда обратная матрица к матрице $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ существует, алгоритм (4), (5), (8) корректен и верно неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{3{,}714493834\sqrt{(b-a)\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx}}\,. \qquad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим матричную норму Фробениуса $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=0,j=0}^{n} a_{i,j}^2}$.

$$B = 5h\lambda \cdot KD, (KD)_i = \sum_{j=0}^{n} K_{i,j}C_j \Rightarrow$$

$$|(KD)_i| \le \sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}||C_j| \le \sqrt{\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|^2}\sqrt{\sum_{j=0}^{n}C_j^{\,2}}, \|KD\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}|(KD)_i|^2}$$

$$\|B\|_F = 5h|\lambda|\cdot\|KD\|_F = 5\left(\frac{b-a}{n}\right)|\lambda|\|KD\|_F \le$$

$$5(b-a)|\lambda|\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}C_j^{\,2}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|^2} = 5(b-a)|\lambda|\sqrt{\frac{k}{n}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|^2\right)}.$$

Так как $n = 10k, k = n/10$

$$\sqrt{\frac{k}{n}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}}, \|B\|_F = 5h|\lambda|\cdot\|KD\|_F \le$$

$$(b-a)|\lambda|\cdot\sqrt{\frac{25}{10}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|^2\right)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)\sqrt{\frac{25}{10}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|K_{i,j}|^2\right)}} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)\sqrt{\frac{25}{10}\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}}\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{10}(b-a)\sum_{j=0}^{10}C_j^{\,2}\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx}} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < \frac{1}{3{,}714493834\sqrt{(b-a)\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx}}\,.$$

Теорема 4 доказана. В работе [4] рассматриваются монотонные матрицы А (матрицы, у которых элементы обратной матрицы положительны $A^{-1}>0$). Там же рассматриваются квадратные М-матрицы (матрицы у которых элементы главной диагонали положительные, а остальные элементы отрицательные).

Однако шесть примеров, приведенных ниже, решенных численно алгоритмом (4), (5), (8), не имеют диагонального преобладания и не являются монотонными или М-матрицами, а **Теорема 1** применима только для одного примера.

Рассмотрим примеры из замечательного задачника по численным методам [1].

1. Решить интегральное уравнение (№ 29.3) методом замены ядра [1, стр. 137]

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 xe^s y(s)ds = e^{-x} \Rightarrow$$

с $K(x,s) = xe^s, f(x) = e^{-x}, \lambda = \frac{1}{2}$ точным решением $y(x) = x + e^{-x}$.

Программа написана на языке Compaq Visual Fortran 6.6 по алгоритму (4), (5), (8) (код программы приведен в конце работы) с условием примера (№ 29.3 [4]), результаты программы представлены в таблице. Обратная матрица вызывается библиотекой msimsl.

Все переменные и функции в программе заданы с двойной точностью.

Значение узлов равномерной сетки, численные и точные узловые значения функции, модуль их разности с параметром n=20, для примера 1- № 29.3 [1]

x_i	y_i^{num}	y_i^{exact}	$\Delta_i = \lvert y_i^{num} - y_i^{exact}\rvert$
0.1000000	1.00483741803596	1.00483741803596	0.0000000E+00
0.2000000	1.01873075307798	1.01873075307798	2.2204460E-16
0.3000000	1.04081822068172	1.04081822068172	0.0000000E+00
0.4000000	1.07032004603564	1.07032004603564	2.2204460E-16
0.5000000	1.10653065971263	1.10653065971263	2.2204460E-16
0.6000000	1.14881163609403	1.14881163609403	8.8817842E-16
0.7000000	1.19658530379141	1.19658530379141	2.2204460E-16
0.7500000	1.22236655274102	1.22236655274101	1.1102230E-15
0.8000000	1.24932896411722	1.24932896411722	4.4408921E-16
0.9000000	1.30656965974060	1.30656965974060	6.6613381E-16
1.000000	1.36787944117144	1.36787944117144	8.8817842E-16
Norma C 1.110223024625157E-015, time resolving 4.687500000000000E-002 ms			

В примере 1 программа по алгоритму (4), (5), (8) дает значение невязки по норме Чебышева (Norma C):

$$\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 1.11022302\ 4625157 \cdot 10^{-15}.$$

Если в примере 1 использовать весовые коэффициенты из формулы Симпсона, то решение матричным методом (4), (5), (8) дает норму невязки

$$\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 2.73255722\ 0497256\text{E} \cdot 10^{-7},$$

что в 10^8 раз больше чем при использовании формулы (4). **Теорема 1** не применима, так как матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не имеет диагонального преобладания. С учетом **Теоремы 4** обоснуем применимость алгоритма (4), (5), (8).

$$1/2 = |\lambda| < \frac{1}{3{,}714493834\sqrt{(b-a)\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx}} =$$

$$\frac{1}{3{,}714493834\sqrt{(1-0)\int_0^1\int_0^1 x^2 e^{2s} dsdx}} = \frac{1}{3{,}714493834\sqrt{(e^2-1)/6}} \approx 0{,}639 \cdot$$

<u>Замечание 1.</u> Программа показывает, что диагональное преобладание в каждой строке матрицы $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не зависит от вида весовых коэффициентов в формуле (3), так как в каждой строке совпадают первые 6 цифр диагональных преобладаний как при вычислении с весовыми коэффициентами по формуле (4), так и при использовании формулы Симпсона с эффективным шагом:

$$H_{p=2} = \frac{ph}{2} = \frac{2h}{2} = h = \frac{b-a}{n}.$$

2. Решить интегральное уравнение (№29.12) [1, стр. 139], применим алгоритм (4), (5), (8).

$$y(x) - \int_0^1 (1+2xs)y(s)ds = -x/6 - 1/2 \Rightarrow$$

$$K(x,s) = 1 + 2xs,\ f(x) = -x/6 - 1/2,\ \lambda = 1$$

с точным решением $y(x) = x + 1/2$.

Программа дает норму невязки

$$\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 2.44249065\ 4175344 \cdot 10^{-15}$$

с числом интервалов интегрирования n=20. Матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ имеет диагональное преобладание, по **Теореме 1** получим

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \frac{\|x+1/2\|_\infty}{\|-x/6-1/2\|_\infty} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{9}{4} \le$$

$$\le \left\| A^{-1} \right\|_\infty = \left\| (I - 5h\lambda \cdot KD)^{-1} \right\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{r_*} = \frac{1}{\min\limits_{i=0,n}\left(|a_{i,i}| - \sum\limits_{j=0,n,\ j\ne i}^{n} |a_{i,j}| \right)} = \frac{1}{1/6} = 6 < +\infty.$$

Исследуем эту же задачу с помощью **Теоремы 2.**

$$\min_{i=0,n}|C_i| = 16067/2993\ 76 \approx 0{,}053668$$

$$(b-a)\min_{x\in[a,b]}\left(\max_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min_{i=0,n}|C_i| > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-0)\min_{x\in[0,1]}\left(\max_{s\in[0,1]}|1+2xs|\right) - 10\frac{1}{20}\min_{x\in[0,1]}|1+2x^2|\min_{i=0,n=20}|C_i| > 0$$

$$(1-0)\min_{x\in[0,1]}(1+2x) - 10\frac{1}{20}|1|\frac{16067}{299376} > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2}0{,}053668 > 0$$

условие выполнено, тогда верно

$$0 < |\lambda| = 1 < \frac{1}{\left(\min\limits_{x\in[a,b]}\left(\max\limits_{s\in[a,b]}|K(x,s)|\right) - 10h\min\limits_{x\in[a,b]}|K(x=s)|\min\limits_{i=0,n}|C_i|\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left((1-0)\min\limits_{x\in[0,1]}\max\limits_{s\in[0,1]}|1+2xs| - 10\frac{1-0}{20}\min\limits_{x\in[0,1]}|1+2x^2|\min\limits_{i=0,n=20}|C_i|\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}0{,}053668\right)} \approx 1.0276,$$

в задаче $\lambda = 1$, поэтому **Теорема 2** здесь также применима.

3. Решить интегральное уравнение (№30.1) [1, стр. 141], применим алгоритм (4), (5), (8).

$$y(x) + \int_0^1 x(e^{xs} - 1)y(s)ds = e^x - 1 \Rightarrow$$

$$K(x,s) = x(e^{xs} - 1),\ f(x) = e^x - 1,\ \lambda = -1$$

с точным решением $y(x) \equiv 1$.

Программа дает значение нормы невязки $\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 4.44089209\ 8500626 \cdot 10^{-16}$ с числом интервалов интегрирования *n*=20. **Теорема 1** не применима, так как матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не имеет диагонального преобладания.

4. Решить интегральное уравнение (№ 30.1) [1, стр. 141], применим алгоритм (4), (5), (8):

$$y(x) - \int_{-1}^1 xsy(s)ds = x \Rightarrow K(x,s) = xs,\ f(x) = x,\ \lambda = 1$$

с точным решением $y(x) = 3x$.

Программа дает значение нормы невязки $\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 8.88178419\ 7001252 \cdot 10^{-16}$ с числом интервалов интегрирования n=20. **Теорема 1** не применима, так как матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не имеет диагонального преобладания.

5. Решить интегральное уравнение (№30.2) [1, стр. 141], применим алгоритм (4), (5), (8).

$$y(x) - \int_{-1}^{1} \left(xs + x^2\right) y(s) ds = 1 \Rightarrow$$

$$K(x,s) = xs + x^2,\ f(x) \equiv 1, \lambda = 1$$

с точным решением $y(x) = 1 + 6x^2$.

Программа дает значение нормы невязки $\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 3.10862446\ 8950438 \cdot 10^{-15}$ с числом интервалов интегрирования n=20. **Теорема 1** не применима, так как матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не имеет диагонального преобладания.

6. Решить интегральное уравнение (№30.8) [1, стр. 143], применим алгоритм (4), (5), (8).

$$y(x) - \int_{-1}^{1} \left(xs^2 - x\right) y(s) ds = 1 + \left(4/3\right) x \Rightarrow$$

$$K(x,s) = xs^2 - x,\ f(x) = 1 + \left(4/3\right) x, \lambda = 1$$

с точным решением $y(x) \equiv 1$.

Программа дает значения нормы невязки $\left\| y^{num} - y^{exact} \right\|_C = 6.66133814\ 7750939 \cdot 10^{-16}$ с числом интервалов интегрирования n=20. **Теорема 1** не применима, так как матрица $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ не имеет диагонального преобладания.

Предположение: Если ослабить условия Теоремы 1, то есть попробовать доказать ее с условием

$$\left\| A^{-1} \right\|_\infty \le \frac{1}{\underset{**}{r}} = \frac{1}{\underline{\min}_{i=0,n} \left(\left| \sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j} \right| \right)}, \underset{**}{r} = \underline{\min}_{i=0,n} \left(\left| \sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j} \right| \right),$$

где $\left| \sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j} \right| > 0,\ \sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j} > 0 \forall i = \overline{0,n} \left(\sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j} < 0 \forall i = \overline{0,n} \right)$ – условное диагональное преобладание элементов i-й строки матрицы $A = I - 5h\lambda \cdot KD$, т.е. сумма $\sum_{\underline{j=0,n}}^{n} a_{i,j}$ сохраняет знак для всех строк матрицы А.

Именно условное диагональное преобладание показывает программа в численном эксперименте во всех 6 приведенных примерах матрицы Фредгольма $A = I - 5h\lambda \cdot KD$ и устойчивость численного алгоритма (4), (5), (8).

В работе получены основные результаты:

1). Предложен алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода матричным методом с двойной точностью (4), (5), (8) для небольшого числа интервалов интегрирования n=10,20,… Весовые коэффициенты (4) алгоритма имеют существенное преимущество по точности по сравнению с применением весовых коэффициентов из формулы Симпсона.

2). Численно показано, что матричный метод (4), (5), (8) решения СЛАУ для уравнения Фредгольма второго рода имеет большую область допустимого параметра λ, по сравнению с решением уравнения методом последовательных приближений.

3). Алгоритм (4), (5), (8) таблично дает ответы ко всем примерам для уравнений Фредгольма второго рода из задачника [4]. Что указывает на его практическую применимость в широкой области параметра $\lambda \in \left(0, \lambda_0\right) \subset R$ и класса непрерывных интегральных ядер $K(x,s) \in C\left([a,b] \times [a,b]\right)$. В теоремах 2–4 получены оценки верхней границы допустимого параметра |λ| для численного алгоритма (4), (5), (8).

Данная задача с алгоритмом решения (4), (5), (8), как и задача [5], решены численно с двойной точностью. Отметим также работу исследователей А.Д. Чернышева, В.В. Горяйнова, С.В. Кузнецова, О.Ю. Никифоровой [7].

Список источников

1. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
2. *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. [и др.].* Решение интегральных уравнений Фредгольма с невырожденными ядрами последовательными приближениями квадратурой с десятым порядком погрешности // Тенденции развития науки и образования. 2022. № 85-2. С. 21–25. DOI 10/18411/trnio-05-2022-55/-EDN:CKXBNI.
3. *Численные* методы. Лекции. Численный практикум: учеб. пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-400101 "Программное обеспечение информационных технологий", 1-980101 "Компьютерная безопасность" / Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Новополоцк. М., 2021.

4. *Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.* Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне отрицательным матрицам // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.
5. *Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К.* Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии // Мир транспорта. 2019. Т. 17, № 3(82). С. 16–39.
6. *Чернышев А.Д., Горяйнов В.В., Кузнецов С.В., Никифорова О.Ю.* Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127–142. DOI 10.17223/19988621/70/11.

References

1. *Bakhvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V.* Numerical methods in tasks and exercises: a tutorial. M.: BINOM. Knowledge Laboratory; 2010. 240 p. (In Russ.).
2. *N. K. Volosova, K. A. Volosov, A. K. Volosova, eds.* Solution of Fredholm integral equations with non-degenerate kernels by successive quadrature approximations with the tenth order of error // Trends in the development of science and education. 2022;(85-2):21–25. DOI 10/18411/trnio-05-2022-55/-EDN:CKXBNI. (In Russ.).
3. *Pastukhov D. F., Pastukhov Yu. F., Volosova N. K., Volosova K. A., Volosova A. K.* Numerical methods. Lectures. Numerical practice. Textbook for lectures and practical exercises for students of the specialty 1-400101 "Information technology software" 1-980101 "Computer security". Novopolotsk, M., 2021. (In Russ.).
4. *Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L.* Estimates of the norms of matrices inverse to monotone matrices and completely negative matrices. Siberian Mathematical Journal. 2009;(50:6):1248–1254. (In Russ.).
5. *Pastukhov D.F., Volosova N.K., Volosova A.K.* Some methods of transmitting a QR code in steganography. World of transport. 2019;(17: 3(82)):16–398. (In Russ.).
6. *Chernyshev A.D., Goryainov V.V., Kuznetsov S.V., Nikiforova O.Yu.* Application of fast expansions for constructing exact solutions to the problem of the deflection of a rectangular membrane under the action of a variable load. Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and mechanics. 2021;(70):127–142. DOI 10.17223/19988621/70/11. (In Russ.).

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Университета Транспорта России (127994, ГСП-4, Россия, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Университета Транспорта России (127994, ГСП-4, Россия, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), доцент Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238, AuthorID 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), доцент Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Moscow State Technical University. N. E. Bauman (2nd Baumanskaya street, 5-1, Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0538-2445;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova street, 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-7955-0587, AuthorID 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC Russian University of Transport (Obraztsova street, 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0538-2445, AuthorID 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (Institutskiy per., 9, Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin Street, 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), Moscow State University named after M.V. Lomonosov (Leninskiye Gory, 1, Moscow, Russia, 119991), dmitrij.pastuhov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1398-6238; AuthorID 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin Street, 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), Moscow State University named after M.V. Lomonosov (Leninskiye Gory, 1, Moscow, Russia, 119991), pulsar1900@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8548-6959, AuthorID 405109.