

## Механика

УДК 519.7

### Построение базового закона движения материальной точки и реализующего его программного управления при наличии фазовых ограничений

**С. В. Лутманов**

Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия

**e-mail:** mpu@psu.ru; **AuthorID:** 13337

Решена задача построения базового кинематического закона управляемого движения материальной точки в однородном поле тяжести с учетом сопротивления среды, пропорционального квадрату величины скорости. В соответствии с этим законом точка обходит заданные запретные зоны и не покидает в процессе полета заданную вертикальную полосу над поверхностью земли. Построено программное управление, реализующее базовый закон движения точки. Составлены дифференциальные уравнения, описывающие динамику возмущений базового движения.

**Ключевые слова:** кинематический закон движения; базовая траектория; фазовые ограничения; программное управление; задача Коши; динамика возмущений.

*Поступила в редакцию 02.07.2022, принята к опубликованию 25.07.2022*

### Construction of a Material Point Motion Basic Law and the Program Control Implementing With Phase Constraints

**S. V. Lutmanov**

Perm State University; Perm, Russia

**e-mail:** mpu@psu.ru; **AuthorID:** 13337

The article presents a solved problem about a material point motion basic kinematic law in a homogeneous gravity field, taking into account the resistance of the medium, which proportional to the velocity in the second degree. A point bypasses the specified restricted zones and does not leave the specified vertical strip above the earth's surface during the flight according to proposed law. A program control has been developed that implements a point motion proposed law. Differential equations describing the dynamics of the basic motion perturbations are compiled in the article.

**Keywords:** kinematic law of motion; basic trajectory; phase constraints; program control; Cauchy problem; perturbation dynamics.

*Received 02.07.2022, accepted 25.07.2022*

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-25-37



Эта работа © 2022 Лутманов С. В. лицензируется под CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Введение

Данная работа является продолжением цикла статей автора [1–4], посвященных решению задач управления материальной точкой, движущейся в среде с сопротивлением при наличии ограничений на ее фазовые координаты. При решении ряда задач управления движением летательного аппарата, таких как построение пространственных траекторий, определение дальности и высоты полета, попадание в заданную область пространства, перевод из заданной начальной точки фазового пространства в заданную конечную, выбор времени полета, если оно неизвестно, и др. летательный аппарат моделируют как управляемую материальную точку, отождествляя его с центром масс аппарата [5–7]. Особую сложность представляют задачи управления летательным аппаратом при наличии фазовых ограничений на его траекторию: наличие запретных областей, необходимость движения вдоль заданного коридора и др. [8–11], [12, 13].

Решение таких задач основывается на концепции обратных задач динамики, которая включает в себя два этапа: задание кинематического закона движения точки, удовлетворяющего основным требованиям, предъявляемым к полету аппарата и построение программного управления, реализующего этот закон движения. Кинематический закон движения ищется обычно в виде полиномов подходящей степени [14]. Движение материальных тел в среде с сопротивлением рассматривались в работах [15–18].

### 1. Постановка задачи и общая схема исследования

Полет управляемой точки происходит в однородном поле тяжести при сопротивлении воздуха пропорциональном квадрату скорости точки в течении заданного промежутка времени. Движение точки начинается из начального положения с поверхности земли путем "почти вертикального" подбрасывания ее на определенную высоту, где она приобретает некоторую начальную скорость. Дальнейшее движение точки осуществляется под действием управляющей силы и заканчивается в заданном конечном положении (цели полета).

Полет будем рассматривать в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ . Начало координат поместим на поверхность земли в исходное положение точки.

Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, оси  $Ox$  и  $Oy$  – горизонтальны. При этом плоскость  $Oxz$  проведем через точку-цель.

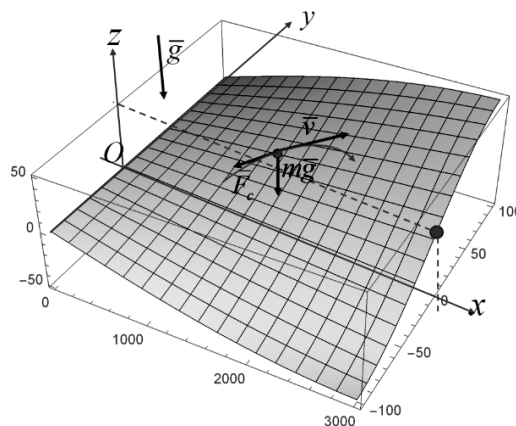


Рис. 1. 3D график рельефа местности

"Почти вертикальное" подбрасывание точки в данной работе не моделируется. Отсчет текущего времени начинается с момента  $t_0$  – выхода точки на высоту подбрасывания и заканчивается в момент времени  $T$  – попадания в цель. Величины  $t_0$  и  $T$  считаются заданными.

Динамика полета описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} = -k \cdot \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \right|^2 \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} + \vec{v} + m\vec{g} \Leftrightarrow,$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m} \cdot \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \right| \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} + \frac{1}{m} \vec{v} + \vec{g}, \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

где  $t$  – текущее время,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$  – ради-

ус-вектор точки относительно начала координат,

$m$  – масса точки,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in R^3$  – вектор

управляющих параметров, компонентами которого являются проекции вектора управляющей силы на соответствующие оси,  $\vec{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,  $k$  – коэффициент пропорциональности.

В координатной форме векторное уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{x} + \frac{1}{m} v_x, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y} + \frac{1}{m} v_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} + \frac{1}{m} v_z - g, \\ t &\in [t_0, T].\end{aligned}\quad (2)$$

Рельеф местности задается функцией  $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ ,  $\varphi(0,0) = 0$ .

Тогда для точек поверхности земли  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

справедливо равенство

$$z = \varphi(x, y), \quad z(0,0) = 0.$$

На рис. 1 показана введенная система координат, приложенные к точке силы и положение цели. На плоскости  $Oxy$  имеются открытые области:

$$G_j \subset Oxy, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Относительно цели  $\bar{r}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$  потребуем,

чтобы она находилась на поверхности земли, а ее горизонтальная проекция вне областей  $G_j \subset Oxy$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , т. е.

$$z_T = \varphi(x_T, y_T), \quad \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \notin G_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

В силу выбора системы координат выполняется  $y_T = 0$ . Задана величина  $0 < x^* < x_T$ . Сформулируем требования к закону движения управляемой точки. В процессе полета для горизонтальной проекции управляемой точки запрещено попадание внутрь множеств  $G_j \subset Oxy$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Сама точка должна находиться в полосе:

$$S_\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \varphi(x, y) + \varepsilon \leq z \leq \varphi(x, y) + 2\varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}$$

над поверхностью земли вплоть до достижения ею координаты  $x = x^*$ .

В дальнейшем точка начинает снижение и попадает в цель в конечный момент времени  $T$ .

**Определение 1.** Интегрируемую вектор функцию  $\bar{v}: [t_0, T] \rightarrow R^3$  будем называть программным управлением материальной точкой на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Пусть  $\bar{v}(\cdot)$  – программное управление. Символом

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t, t_0, \bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_0, \bar{v}(\cdot)), \quad t \in [t_0, T]$$

обозначим кинематический закон движения материальной точки, порожденный программным управлением  $\bar{v}(\cdot)$  и выходящим из начального положения  $\bar{r}_0$  с начальной скоростью  $\dot{\bar{r}}_0$ . Этот закон  $\bar{r}(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  определяется как решение задачи Коши для обыкновенного векторного дифференциального уравнения

$$\ddot{\bar{r}} = -\frac{k}{m} \cdot |\dot{\bar{r}}| \cdot \dot{\bar{r}} + \frac{1}{m} \bar{v}(t) + \bar{g},$$

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_{0*}, \quad \dot{\bar{r}}(t_0) = \dot{\bar{r}}_{0*}, \quad t \in [t_0, T].$$

Задача состоит в построении такого программного управления  $\bar{v}^0(\cdot)$ , для которого кинематический закон движения точки

$$\bar{r}^0(t) = \bar{r}(t, t_0, \bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_0, \bar{v}^0(\cdot)), \quad t \in [t_0, T],$$

им порожденный, удовлетворял бы всем вышесформулированным требованиям к полету точки.

Решение этой задачи предлагается осуществить по следующей схеме. Подбирается закон движения точки  $\bar{r} = \bar{r}_{baz}(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , удовлетворяющий всем требованиям к полету. Строится программное управление  $\bar{v}_{baz}(\cdot)$  по формуле

$$\ddot{\bar{r}}_{baz} = -\frac{k}{m} \cdot |\dot{\bar{r}}_{baz}| \cdot \dot{\bar{r}}_{baz} + \frac{1}{m} \bar{v}_{baz}(t) + \bar{g} \Rightarrow$$

$$\bar{v}_{baz}(t) = m \ddot{\bar{r}}_{baz}(t) + k \cdot |\dot{\bar{r}}_{baz}| \dot{\bar{r}}_{baz} - \bar{g}, \quad t \in [t_0, T].$$

**Определение 2.** Закон движения точки  $\bar{r}_{baz}(\cdot)$  и программное управление  $\bar{v}_{baz}(\cdot)$  будем называть базовым законом движения и базовым программным управлением точки.

Пусть  $\bar{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  – начальное положение и

$\dot{\bar{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix}$  – начальная скорость точки, кото-

рые она приобрела после этапа "почти вертикального подбрасывания".

**Определение 3.** Закон движения точки

$$\bar{r}_{voz}(t) = \bar{r}(t, t_0, \bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_0, \bar{v}_{baz}(\cdot)), \quad t \in [t_0, T]$$

будем называть возмущенным движением, а разность

$$\delta \bar{r}(t) = \bar{r}_{voz}(t) - \bar{r}_{baz}(t), \quad t \in [t_0, T]$$

– возмущением базового движения.

В общем случае в силу  $\bar{r}_{baz}(t_0) \neq \bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_{baz}(t_0) \neq \dot{\bar{r}}_0$  возмущенный закон движения не совпадает с базовым законом движения и поэтому он не обязан удовлетворять требованиям, предъявляемым к полету точки. Идея предлагаемого подхода состоит в введении дополнительного управления  $\bar{u}(\cdot)$ , входящего в дифференциальные уравнения движения аддитивно основному управлению  $\bar{v}(\cdot)$ , и которое совмещает возмущенное движение с базовым в некоторый момент времени  $\hat{T} < T$ . После чего дополнительное управление отключается. В силу теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения, дальнейшее движение точки на промежутке времени  $[\hat{T}, T]$

будет происходить в соответствии с базовым законом движения. В предположении, что до момента времени  $\hat{T}$  нарушения фазовых ограничений не происходит, реализованное описанным образом программное управление  $\bar{v}^0(\cdot) = \bar{v}_{baz}(\cdot) + \bar{u}(\cdot)$  порождает закон движения точки, удовлетворяющий всем сформулированным требованиям.

Задача совмещения возмущенного и базового движения эквивалентна задаче обнуления возмущения. Динамику возмущения можно приближенно описать уравнениями управляемого движения точки, линеаризованными в окрестности пары "базовое управление–базовое движение".

В данной работе решается задача построения базового закона движения точки и

базового программного управления, реализующего этот закон. Задача совмещения возмущенного и базового движения в момент времени  $\hat{T}$  в данной работе не решается. Она служит предметом дальнейших исследований.

## 2. Алгоритм построения базового закона движения точки

Дадим формальную постановку задачи по построению базового закона движения точки.

**Дано:**

дифференциальные уравнения динамики точки (1);

$[t_0, T]$  – промежуток времени, в течение которого происходит полет;

$z = \varphi(x, y), (x, y) \in R^2$  – функция,

описывающая рельеф местности;

$G_j \subset Oxy, j = 1, 2, \dots, s$  – открытые области, внутрь которых запрещено попадать горизонтальной проекции управляемой точки;

$\bar{r}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$  – радиус-вектор цели, координаты которого удовлетворяют условиям

$$z_T = \varphi(x_T, y_T), y_T = 0, \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^s G_j ;$$

$x^*$  – координата управляемой точки на оси  $Ox$ , по достижении которой точка начинает снижаться;

$\varepsilon > 0$  – число, определяющее высоту вертикальной полосы над поверхностью земли, внутри которой должна лежать траектория точки до достижения ею координаты  $x^*$  по оси  $Ox$ .

**Задача.** Требуется определить

$$\bar{r}_{baz0} = \begin{pmatrix} x_{baz0} \\ y_{baz0} \\ z_{baz0} \end{pmatrix} \text{ – вектор начального по-}$$

ложения точки;

$$\dot{\bar{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_{baz0} \\ \dot{y}_{baz0} \\ \dot{z}_{baz0} \end{pmatrix} \text{ – вектор начальной скоро-}$$

сти точки;

$\bar{v}_{baz}(\cdot)$  – программное управление точкой на промежутке времени  $[t_0, T]$  такие, что для кинематического закона движения точки

$$\begin{pmatrix} x_{baz}(t) \\ y_{baz}(t) \\ z_{baz}(t) \end{pmatrix} = \bar{r}_{baz}(t) = \bar{r}(t, t_0, \bar{r}_{baz0}, \dot{\bar{r}}_{baz0}, \bar{v}_{baz}(\cdot)), \quad t \in [t_0, T]$$

величина  $\|\bar{r}_{baz}(T) - \bar{r}_T\|$  мала и

$$\begin{pmatrix} x_{baz}(t) \\ y_{baz}(t) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^s G_j, \quad t \in [t_0, T],$$

$$\varphi(x_{baz}(t), y_{baz}(t)) + \varepsilon \leq z_{baz}(t) \leq \varphi(x_{baz}(t), y_{baz}(t)) + 2\varepsilon, \quad t \in [t_0, T^*],$$

где момент времени  $T^*$  определяется из условия  $x_{baz}(T^*) = x^*$ .

Приведем решение поставленной задачи. Полагаем

$$\dot{x}_{baz0} = \frac{x_T - x_0}{T} = \frac{x_T}{T}, \quad T^* = \frac{x^*}{\dot{x}_{baz0}}.$$

Задаемся натуральным  $n$  и разбиваем отрезок времени  $[t_0, T]$  точками:

$$\tau_0 = t_0, \tau_1 = \tau_0 + \delta, \dots, \tau_n = \tau_{n-1} + \delta = T,$$

$$\delta = \frac{T - t_0}{n} \Rightarrow \tau_i = \tau_0 + i \cdot \delta, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

на  $n$  промежутков:

$$[\tau_0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_{n-1}, \tau_n].$$

Не теряя общности, считаем, что

$$T^* = \tau_{i^*} = \tau_0 + i^* \cdot \delta$$

для некоторого натурального  $i^* < n$ .

Строим последовательности:

$$x(\tau_0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_{i^*}), \dots, x(\tau_{n-1}), x(\tau_n),$$

$$y(\tau_0), y(\tau_1), \dots, y(\tau_{i^*}), \dots, y(\tau_{n-1}), y(\tau_n),$$

$$z(\tau_0), z(\tau_1), \dots, z(\tau_{i^*}), \dots, z(\tau_{n-1}), z(\tau_n).$$

В момент времени  $\tau_0$  полагаем:

$$x(\tau_0) = 0.$$

Величины  $y(\tau_0), z(\tau_0)$  находим как решение задачи математического программирования:

$$(y(\tau_0) - y_T)^2 + (z(\tau_0) - z_T)^2 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\varphi(x(\tau_0), y(\tau_0)) + \varepsilon \leq z(\tau_0) \leq \varphi(x(\tau_0), y(\tau_0)) + 2\varepsilon,$$

$$\begin{pmatrix} x(\tau_0) \\ y(\tau_0) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^s G_j.$$

В момент времени  $\tau_1$  полагаем

$$x(\tau_1) = x(\tau_0) + \dot{x}_0 \delta.$$

Величины  $y(\tau_1), z(\tau_1)$  находим как решение задачи математического программирования:

$$(y(\tau_1) - y_T)^2 + (z(\tau_1) - z_T)^2 \rightarrow \min.$$

При ограничениях

$$\varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)) + \varepsilon \leq z(\tau_1) \leq \varphi(x(\tau_1), y(\tau_1)) + 2\varepsilon,$$

$$\begin{pmatrix} x(\tau_1) \\ y(\tau_1) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^s G_j.$$

Приведенные построения производятся вплоть до момента времени  $\tau_{i^*} = T^*$  включительно.

В момент времени

$$\tau_{i^*+1} = \tau_{i^*} + \delta = \tau_0 + (i^* + 1) \delta \tau = T^* + \delta$$

полагаем  $x(\tau_{i^*+1}) = x(\tau_{i^*}) + \dot{x}_{baz0} \delta$ .

Величины  $y(\tau_{i^*+1}), z(\tau_{i^*+1})$  находим как решение задачи математического программирования:

$$(y(\tau_{i^*+1}) - y_T)^2 + (z(\tau_{i^*+1}) - z_T)^2 \rightarrow \min.$$

При ограничениях

$$\varphi(x(\tau_{i^*+1}), y(\tau_{i^*+1})) + \varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{i^*+1}}{T - \tau_{i^*}} \leq z(\tau_{i^*+1}) \leq \varphi(x(\tau_{i^*+1}), y(\tau_{i^*+1})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{i^*+1}}{T - \tau_{i^*}},$$

$$\begin{pmatrix} x(\tau_{i^*+1}) \\ y(\tau_{i^*+1}) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^s G_j.$$

Приведенные построения производятся вплоть до момента времени  $\tau_{n-2}$  включительно.

В момент времени

$$\tau_{n-1} = \tau_{n-2} + \delta = \tau_0 + (n-1) \delta \tau$$

$$x(\tau_{n-1}) = x(\tau_{n-2}) + \dot{x}_{baz0} \delta.$$

Величины  $y(\tau_{n-1}), z(\tau_{n-1})$  находим как решение задачи математического программирования:

$$(y(\tau_{n-1}) - y_T)^2 + (z(\tau_{n-1}) - z_T)^2 \rightarrow \min.$$

При ограничениях

$$\begin{aligned} \varphi(x(\tau_{n-1}), y(\tau_{n-1})) + \varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{n-1}}{T - \tau_{i^*}} &\leq z(\tau_{n-1}) \leq \\ &\leq \varphi(x(\tau_{n-1}), y(\tau_{n-1})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{n-1}}{T - \tau_{i^*}}, \\ \begin{pmatrix} x(\tau_{n-1}) \\ y(\tau_{n-1}) \end{pmatrix} &\notin \bigcup_{j=1}^s G_j. \end{aligned}$$

В момент времени  $\tau_n = T$  полагаем

$$x(\tau_n) = x_T, y(\tau_n) = y_T, z(\tau_n) = z_T.$$

Массивы данных

$$\begin{aligned} &x(\tau_0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_{i^*}), \dots, x(\tau_{n-1}), x(\tau_n), \\ &y(\tau_0), y(\tau_1), \dots, y(\tau_{i^*}), \dots, y(\tau_{n-1}), y(\tau_n), \\ &z(\tau_0), z(\tau_1), \dots, z(\tau_{i^*}), \dots, z(\tau_{n-1}), z(\tau_n) \end{aligned}$$

аппроксимируются полиномами

$$\begin{aligned} x = x_{baz}(t), y = y_{baz}(t), z = z_{baz}(t), \\ t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

достаточно высокой степени. Построенные полиномы могут претендовать на то, чтобы составить базовый кинематический закон полета точки. В случае, если не все фазовые ограничения полета будут выполнены, следует увеличить  $n$  – число полуинтервалов разбиения отрезка времени  $[t_0, T]$ .

Начальное базовое положение и начальная базовая скорость точки находятся из условия

$$\begin{aligned} \bar{r}_{baz0} = \begin{pmatrix} x_{baz0} \\ y_{baz0} \\ z_{baz0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ y_{baz}(t_0) \\ z_{baz}(t_0) \end{pmatrix}, \\ \dot{\bar{r}}_{baz0} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{baz0} \\ \dot{y}_{baz0} \\ \dot{z}_{baz0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{baz}(t_0) \\ \dot{y}_{baz}(t_0) \\ \dot{z}_{baz}(t_0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Базовое программное управление  $\bar{v}_{baz}(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{v}_{baz}(t) = m \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_{baz}}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_{baz}}{dt^2} \\ \frac{d^2 z_{baz}}{dt^2} \end{pmatrix} + \\ + k \cdot \sqrt{\left(\frac{dx_{baz}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_{baz}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_{baz}}{dt}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_{baz}}{dt} \\ \frac{dy_{baz}}{dt} \\ \frac{dz_{baz}}{dt} \end{pmatrix} + \\ + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Алгоритм решения задачи 1 включает в себя также проверку равенства

$$\begin{aligned} \bar{r}(t, t_0, \bar{r}_{baz0}, \dot{\bar{r}}_{baz0}, \bar{v}_{baz}(\cdot)) = \begin{pmatrix} x_{baz}(t) \\ y_{baz}(t) \\ z_{baz}(t) \end{pmatrix}, \\ t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. Численный эксперимент

Проиллюстрируем алгоритм построения базового закона движения и базового программного управления на конкретных числовых данных. Принимаем, что

$$m = 100 \text{ кг}, t_0 = 0 \text{ с}, T = 10 \text{ с},$$

$$k = 0.45 \frac{\text{кг}^2}{\text{м}}, g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$x^* = 2400 \text{ м}, x_T = 3000 \text{ м},$$

$$\varepsilon = 100 \text{ м}, \varphi(x, y) =$$

$$= 50 \cdot \sin(0.000005 \cdot x \cdot y) \text{ м}, \varphi(0, 0) = 0.$$

**3D** график функции  $\varphi$  приведен на рис. 1. Число запрещенных областей полагается равным двум, т. е. что  $s = 2$ . Сами запрещенные области имеют вид

$$\begin{aligned} G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y > g_1(x) = \right. \\ \left. = 0.001(x - 1000)(x - 500) \text{ м} \right\}, \end{aligned}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y < g_1(x) \right\} \\ = -0.001(x - 2500)(x - 2000) \text{ м} \}.$$

Расположение областей  $G_1$  и  $G_2$  на плоскости  $Oxy$  показано на рис. 2.

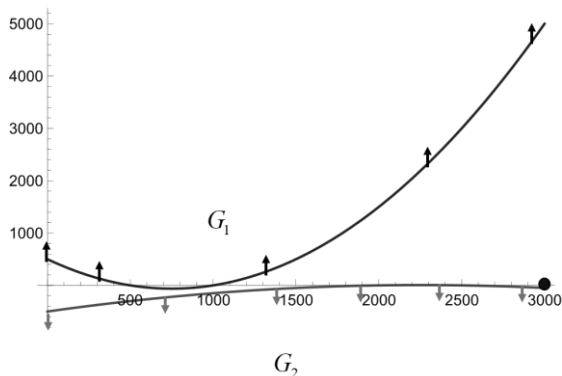


Рис. 2. Запретные области на плоскости  $Oxy$

Заметим, что цель

$$\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T \\ 0 \\ \varphi(x_T, y_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

лежит вне областей  $G_1$  и  $G_2$ , т. к.  $g_1(x_T) < 0$ , а  $g_2(x_T) > 0$ .

Принимаем  $n = 200$ .

Вычисляем

$$\delta = \frac{T}{n} = \frac{10}{200} = 0.05(c),$$

$$\dot{x}_{baz0} = \frac{x_T}{T} = \frac{3000}{10} = 300 \left( \frac{\text{м}}{c} \right),$$

$$T^* = \frac{x^*}{\dot{x}_{baz0}} = \frac{2400}{300} = 8(c),$$

$$i^* = \frac{T^*}{\delta} = \frac{8}{0.05} = 160.$$

В процессе решения задачи математического программирования условие

$$\begin{pmatrix} x(\tau_{i+1}) \\ y(\tau_{i+1}) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^2 G_j \quad \text{усиливается условием}$$

$$\begin{pmatrix} x(\tau_{i+1}) \\ y(\tau_{i+1}) \end{pmatrix} \notin \bigcup_{j=1}^2 (G_j)^\beta, \quad \text{где символом } (G_j)^\beta$$

обозначена  $\beta$  – окрестность множества  $G_j$ ,  $j = 1, 2$ . В расчетах полагается  $\beta = 10 \text{ м}$ .

Аппроксимация наработанных массивов производится полиномами 25-й степени.

В пакете Mathematica это команда

```
Fit[dataY, {t^0, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8,
t^9, t^10, t^11, t^12, t^13, t^14,
t^15, t^16, t^17, t^18, t^19, t^20, t^21, t^22,
t^23, t^24, t^25}, t].
```

На рис. 3 приведен график базового закона движения точки по координате  $x$ .

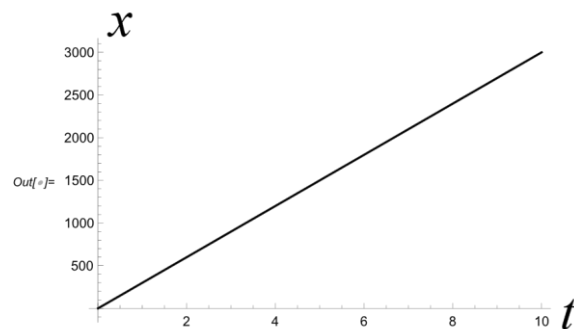


Рис. 3. График базового закона движения точки по координате  $x$

Из графика видно, что этот закон является линейным.

На рис. 4 приведен график базового закона движения точки по координате  $y$ .

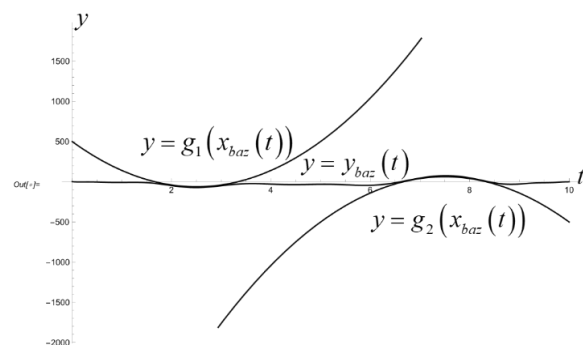
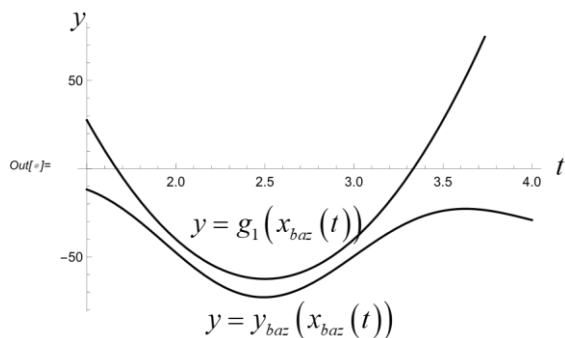


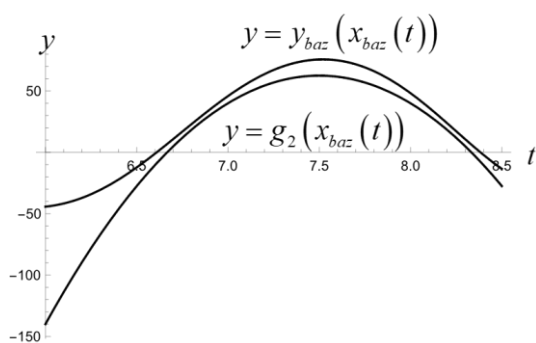
Рис. 4. График базового закона движения точки по координате  $y$

Из графика видно, что в процессе полета точка не заходит в запрещенные зоны.

На рис. 5, 6 производится уточнение графиков на тех промежутках времени, на которых проекция точки на ось  $y$ , близко подходит к запрещенным областям и в них не заходит.

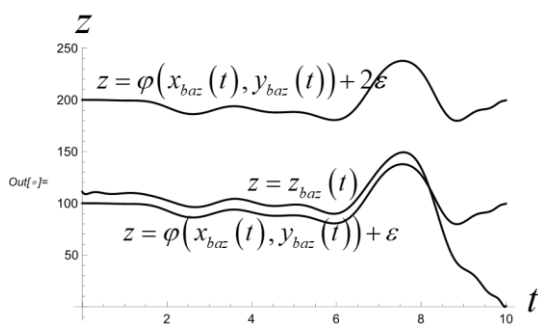


**Рис. 5.** Уточненный график базового закона движения точки по координате  $y$  в окрестности первой запрещенной области



**Рис. 6.** Уточненный график базового закона движения точки по координате  $y$  в окрестности первой запрещенной области

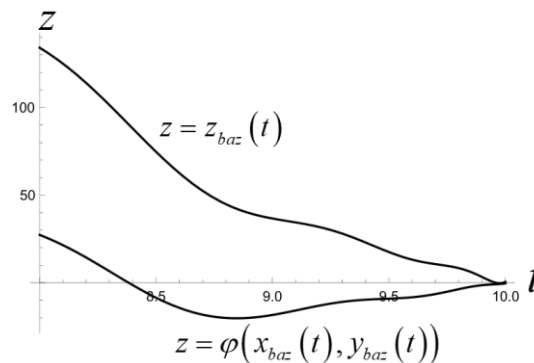
На рис. 7 приведен график базового закона движения точки по координате  $z$ .



**Рис. 7.** График базового закона движения точки по координате  $z$

Из рис. 7 видно, что полет точки происходит в требуемой вертикальной полосе вплоть до момента времени  $T^* = 8c$ . Потом точка начинает снижаться.

На рис. 8 показано, что в дальнейшем точка летит строго над землей, и в конечный момент времени  $T = 10c$  она достигает ее поверхности.



**Рис. 8.** График базового закона движения точки по координате  $z$ , на этапе снижения

Промач по цели для базового закона движения составляет величину

$$\gamma_{baz} = \left[ (x_{baz}(T) - x_T)^2 + (y_{baz}(T) - y_T)^2 + (z_{baz}(T) - z_T)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0.75 \text{ м}$$

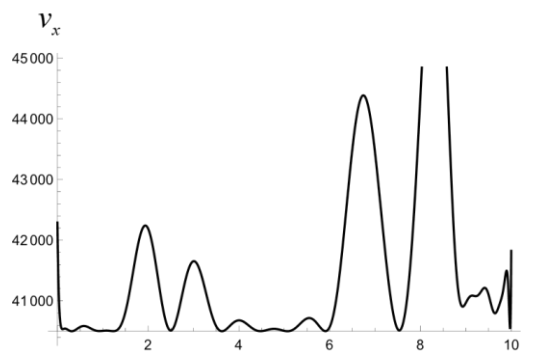
Вычисляем начальные условия для точки, определяющие базовый закон движения:

$$\begin{pmatrix} x_{baz0} \\ y_{baz0} \\ z_{baz0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{baz}(0) \\ y_{baz}(0) \\ z_{baz}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.17 \\ 111.12 \end{pmatrix} (\text{м}),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{baz0} \\ \dot{y}_{baz0} \\ \dot{z}_{baz0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{baz}(0) \\ \dot{y}_{baz}(0) \\ \dot{z}_{baz}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ -58.82 \\ 70. \end{pmatrix} \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Базовое программное управление вычисляется по формуле (3).

На рис. 9–11 приведены по координатные графики базового управления.



**Рис. 9.** График координаты  $v_x$  базового программного управления



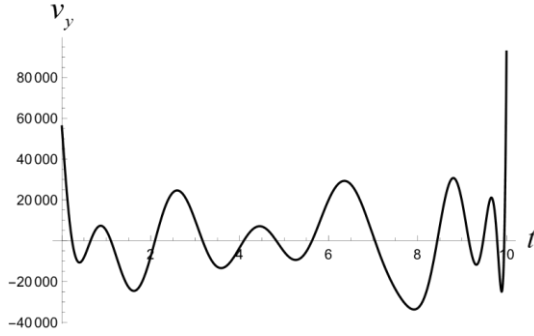


Рис. 10. График координаты  $v_y$  базового программного управления

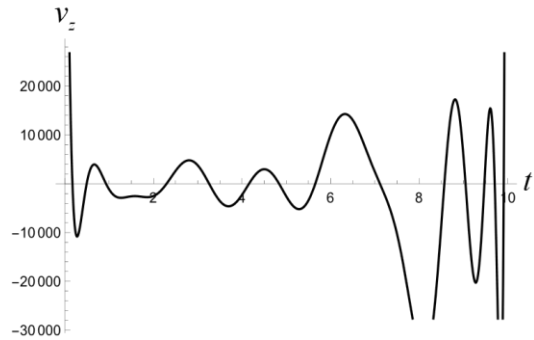


Рис. 11. График координаты  $v_z$  базового программного управления

Проверка выполнения условия (4) производится непосредственно, и оно выполняется.

#### 4. Дифференциальные уравнения динамики возмущений

Следуя схеме, описанной в первом пункте, введем в рассмотрение дополнительное управление  $u(\cdot) = \begin{pmatrix} u_x(\cdot) \\ u_y(\cdot) \\ u_z(\cdot) \end{pmatrix}$ , входящее в

дифференциальные уравнения движения точки аддитивно основному управлению.

Тогда уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{x} + \frac{1}{m} (v_x + u_x), \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y} + \frac{1}{m} (v_y + u_y), \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} + \frac{1}{m} (v_z + u_z) - g, \\ t &\in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (5)$$

Заменой

$$\begin{aligned} p_1 &= x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = \dot{x}, p_5 = \dot{y}, p_6 = \dot{z}, \\ v_1 &= v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z, u_1 = u_x, u_2 = u_y, u_3 = u_z \end{aligned}$$

нормализуем систему (5).

В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_4 \\ \dot{p}_2 &= p_5 \\ \dot{p}_3 &= p_6 \\ \dot{p}_4 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_4 + \\ &+ \frac{1}{m} (v_1 + u_1), \\ \dot{p}_5 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_5 + \\ &+ \frac{1}{m} (v_2 + u_2), \\ \dot{p}_6 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_6 - g + \\ &+ \frac{1}{m} (v_3 + u_3) \end{aligned} \quad (6)$$

В новых переменных базовый закон движения и базовое программное управление будут иметь вид

$$p_{baz}(t) = \begin{pmatrix} p_{baz1}(t) \\ p_{baz2}(t) \\ p_{baz3}(t) \\ p_{baz4}(t) \\ p_{baz5}(t) \\ p_{baz6}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{baz}(t) \\ y_{baz}(t) \\ z_{baz}(t) \\ \dot{x}_{baz}(t) \\ \dot{y}_{baz}(t) \\ \dot{z}_{baz}(t) \end{pmatrix},$$

$$v_{baz}(t) = \begin{pmatrix} v_{baz1}(t) \\ v_{baz2}(t) \\ v_{baz3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{bazx}(t) \\ v_{bazy}(t) \\ v_{bazz}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T].$$

Линеаризуем систему (6) в окрестности пары "базовое программное управление–базовое движение".

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in [t_0, T], \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad A(t) \div 6 \times 6, \quad B \div 6 \times 3 \quad (7)$$

относительно шестимерного фазового вектора  $x \in R^6$ , для которого

$$x(t) \approx \delta p(t) = p_{voz}(t) - p_{baz}(t), \quad t \in [t_0, T_1].$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_4) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_4) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_4) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_5) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_5) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_5) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_6) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_6) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_6) \end{pmatrix}_{p=p_{baz}}$$

$$P = -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2},$$

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T_1],$$

$T_1 < T^*$  – момент совмещения возмущенного движения с базовым законом.

На рис. 12–17 продемонстрировано, что в рамках численного эксперимента, описанного в пункте 3, динамика фазового вектора линейного динамического объекта (7) на промежутке времени  $[t_0, T_1]$ ,  $T_1 = 1$ с практически тождественна динамике возмущений

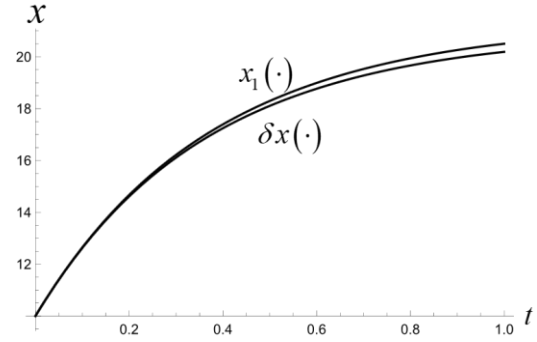


Рис. 12. Совместные графики координаты  $x_1$  линейного объекта и возмущения  $\delta x$

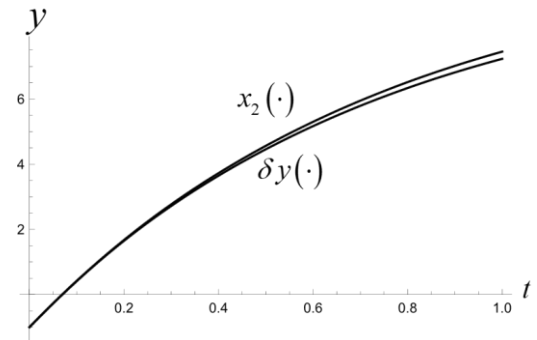


Рис. 13. Совместные графики координаты  $x_2$  линейного объекта и возмущения  $\delta y$

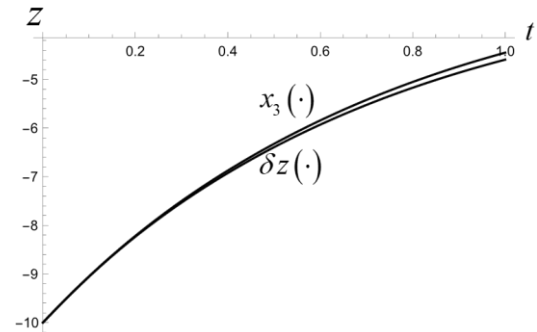


Рис. 14. Совместные графики координаты  $x_3$  линейного объекта и возмущения  $\delta z$

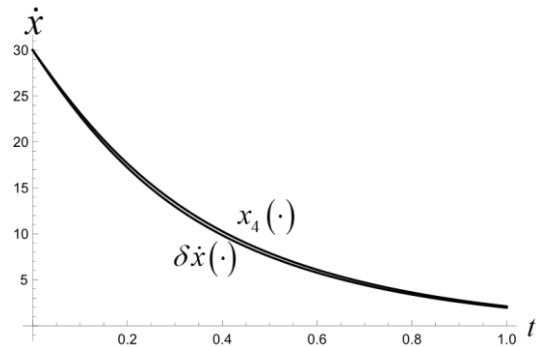


Рис. 15. Совместные графики координаты  $x_4$  линейного объекта и возмущения  $\delta \dot{x}$

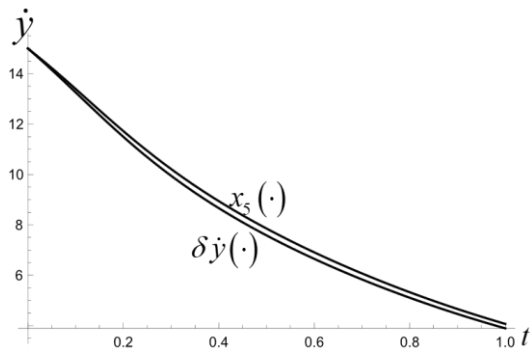


Рис. 16. Совместные графики координаты  $x_5$  линейного объекта и возмущения  $\delta \dot{y}$

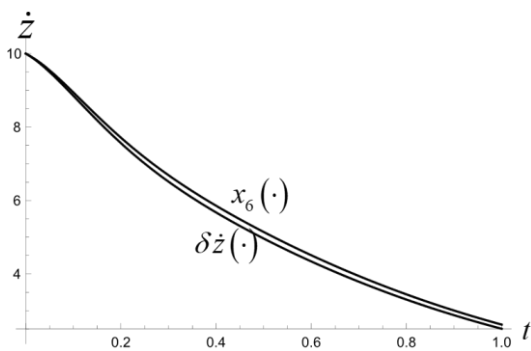


Рис. 17. Совместные графики координаты  $x_6$  линейного объекта и возмущения  $\delta \dot{z}$

### Заключение

В статье решена задача построения базового кинематического закона движения управляемой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Построенное базовое движение удовлетворяет фазовым ограничениям, наложенным на полет точки: горизонтальная проекция точки не может заходить внутрь заданных областей, а сама точка должна находиться в заданной вертикальной полосе над поверхностью земли.

Построено базовое программное управление точкой, реализующее ее базовый закон движения. В численном эксперименте показано, что динамика возмущения базового закона движения адекватно описывается дифференциальными уравнениями, являющимися линеаризацией исходных дифференциальных уравнений движения точки в окрестности пары "базовый закон движения–базовое программное управление".

Таким образом, задача о совмещении возмущенного движения с базовым законом

сводится к задаче наведения фазового вектора управляемого линейного динамического объекта (7) на начало координат в момент времени  $T_1 < T^*$ . Решение этой задачи зависит от различных факторов: характера информации, на основании которой производится назначение дополнительного управления, ограничений, налагаемых на вектор дополнительных управляющих параметров и др.

В данной работе задача наведения не решается. Ее решение, в том числе и в игровой постановке, будет служить предметом дальнейших исследований.

### Список литературы

1. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.
2. Лутманов С.В., Хотько О.А. Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 69–75.
3. Лутманов С.В., Хотько О.А. Оптимальная коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 33–45.
4. Лутманов С.В., Хотько О.А. Коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 56–64.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51–64.
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Планирование пространственного разворота беспилотного пространственного аппарата // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011 (спец. вып.) "Энергетическое и транспортное машиностроение". С. 151–163.
7. Канатников А.Н., Шмагина Е.А. Задача терминального управления летательным

- аппаратом // *Нелинейная динамика и управление: сб. ст. под ред. С.В. Емильнова, С.К. Коровина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. Вып. 7. С. 79–94.*
8. *Баландин Д.В., Федюков А.А. Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2021. № 5. С. 5–17.*
  9. *Велицанский М.А. Движение летательного аппарата в вертикальной плоскости при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 70–81.*
  10. *Горбачева А.В., Карамзин Д.Ю. Уточнение условий оптимальности в задачах управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 40–55.*
  11. *Горбачева А.В., Карамзин Д.Ю. О некоторых классах задач управления с фазовыми ограничениями // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2016. № 1. С. 11–18.*
  12. *Федюков А.А. Синтез робастного управления с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные // Информатика и системы управления. 2015. № 2(44). С. 121–130.*
  13. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Григорьев А.М. Об одной задаче маршрутизации, моделирующей перемещения в радиационных полях // Вестник УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 540–557.*
  14. *Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.*
  15. *Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 3–22.*
  16. *Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51–54.*
  17. *Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 2. С. 116–125. 28.*
  18. *Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996, № 4. С. 57–69.*
- ### References
1. *Lutmanov S.V. Ob odnoj metodike issledovaniya upravlyaej dinamicheskoj sistemy // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017. Vyp. 1(36). S. 13–20.*
  2. *Lutmanov S.V., Hot'ko O.A. Ob odnoj zadache upravleniya tyazhelej tochkoj, dvizhushchejsya v srede s soprotivleniem, proporcional'nyim kvadratu skorosti // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. Vyp. 3(42). S. 69–75.*
  3. *Lutmanov S.V., Hot'ko O.A. Optimal'naya korrekciya poleta tyazhelej material'noj tochki v srede s soprotivleniem, proporcional'nyim kvadratu skorosti // Problemy mekhaniki i upravleniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm'. 2018. Vyp. 50. S. 33–45.*
  4. *Lutmanov S.V., Hot'ko O.A. Korrekciya poleta tyazhelej material'noj tochki v srede s soprotivleniem pri nalichii geometricheskix ograničenij na dopolnitel'nye upravleniya // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019. Vyp. 3(46). S. 56–64.*
  5. *Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Terminal'noe upravlenie prostranstvennym dvizheniem letatel'nyh apparatov // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. 2008. № 5. S. 51–64.*
  6. *Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Planirovanie prostranstvennogo razvorota bespilotnogo prostranstvennogo apparata // Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Mashinostroenie (spec. vyp.). "Energeticheskoe i transportnoe mashinostroenie". 2011. S. 151–163.*
  7. *Kanatnikov A.N., Shmagina E.A. Zadacha terminal'nogo upravleniya letatel'nym apparatom // Nelinejnaya dinamika i upravlenie: sb. st. pod red. S.V. Emil'yanova, S.K. Korovina. M.: FIZMATLIT, 2010. Vyp. 7. S. 79–94.*
  8. *Balandin D.V., Fedyukov A.A. Stabilizaciya linejnyh dinamicheskix ob'ektov po izmeryaemomu s oshibkoj sostoyaniyu pri ograničenijah na fazovye i upravlyayushchie*

- peremennye // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2021. № 5. S. 5–17.
9. *Velishchanskij M.A.* Dvizhenie letatel'nogo apparata v vertikal'noj ploskosti pri nalichii ogranichenij na sostoyaniya // *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki*. 2016. № 3. С. 70–81.
  10. *Gorbacheva A.V., Karamzin D.Yu.* Utochnenie uslovij optimal'nosti v zadachah upravleniya s fazovymi ogranicheniyami tipa ravenstv i neravenstv // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*. 2016. T. 21. Vyp. 1. S. 40–55.
  11. *Gorbacheva A.V., Karamzin D.Yu.* O nekotoryh klassah zadach upravleniya s fazovymi ogranicheniyami // *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika*. 2016. № 1. S. 11–18.
  12. *Fedyukov A.A.* Sintez robstnogo upravleniya s uchetom ogranichenij na fazovye i upravlyayushchie peremennye // *Informatika i sistemy upravleniya*. 2015. № 2(44). С. 121–130.
  13. *Chencov A.G., Chencov A.A., Grigor'ev A.M.* Ob odnoj zadache marshrutizacii, modeliruyushchej peremeshcheniya v radiacionnyh polyah // *Vestnik UdGU. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 2017. T. 27, № 4. S. 540–557.
  14. *Krut'ko P.D.* Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemyh sistem: nelinejnye modeli. M.: Nauka, 1988. 328 s.
  15. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L.* Optimal'noe upravlenie pryamolinejnym dvizheniem sistemy dvuh tel v soprotivlyayushchejsya srede // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2012. T. 76, №1. S. 3–22.
  16. *Samsonov V.A., Shamolin M.V.* K zadache o dvizhenii tela v soprotivlyayushchejsya srede // *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*. 1989. № 3. S. 51–54.
  17. *Chernous'ko F.L.* Optimal'nye periodicheskie dvizheniya dvuhmassovoj sistemy v soprotivlyayushchejsya srede // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2008. T. 72, № 2. S. 116–125. 28.
  18. *Shamolin M.V.* Vvedenie v zadachu o tormozhenii tela v soprotivlyayushchejsya srede i novoe dvuhparametricheskoe semejstvo fazovyh portretov // *Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*. 1996. № 4. S. 57–69.

**Просьба ссылаться на эту статью:**

*Лутманов С.В.* Построение базового закона движения материальной точки и реализующего его программного управления при наличии фазовых ограничений // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2022. Вып 3(58). С. 25–37. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-25-37.

**Please cite this article as:**

*Lutmanov S.V.* Construction of a Material Point Motion Basic Law and the Program Control Implementing With Phase Constraints // *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2022. Issue 3(58). P. 25–37. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-25-37.