Математика

УДК 517.977.56

Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества

К. Б. Мансимов[1, 2; a], Ж. Б. Ахмедова[1, 2; b]

[1]Бакинский Государственный университет; Баку, Азербайджан

[2]Институт Систем управления НАН Азербайджана; Баку, Азербайджан

[a]e-mail: kamilbmansimov@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1518-2279, AuthorID: 247352

[b]e-mail: akja@rambler.ru; ORCID: 0000-0003-1328-0075

Рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Критерий качества является многоточечным нелинейным функционалом. Введя сопряженную систему в виде дробного интегрального уравнения, типа Вольтерра, построена формула приращения функционала качества. Исследуя построенную формулу с помощью игольчатой вариации Макшейна, доказано необходимое условие оптимальности в форме аналога принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: *допустимое управление; производная дробного порядка; сопряженная система; принцип максимума; условие оптимальности; многоточечный функционал.*

Поступила в редакцию 24.05.2022, принята к опубликованию 26.07.2022

A Pontryagin Maximum Principle Analogue in the Optimal Control Problem of a Differential Equations System with a Fractional Caputo Derivative and a Multipoint Quality Criterion

K. B. Mansimov[1, 2; a], Zh. B. Ahmedova[1, 2; b]

[1] Baku State University; Baku, Azerbaijan

[2] Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences; Baku, Azerbaijan

[a]e-mail: kamilbmansimov@gmail.com; ORCID: 0000-0002-1518-2279, AuthorID: 247352

[b]e-mail: akja@rambler.ru; ORCID: 0000-0003-1328-0075

The processes optimal control problem described by a ordinary differential equations system with fractional order is considered. The quality criterion is a multipoint nonlinear functional. A quality functional increment formula is constructed by introducing a conjugate system in the fractional integral equation form such as Volterra. The necessary optimality condition is proved in the Pontryagin maximum principle analogue form by the constructed formula investigating with using the McShane needle variation.

Keywords: *admissible control; fractional order derivative; adjoint system; maximum principle; optimality condition; multipoint functional*.

Received 24.05.2022, accepted 26.07.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10

Эта работа © 2022 Мансимов К. Б., Ахмедова Ж. Б. лицензируется под CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Введение

Начиная с фундаментальной работы [1] во многих работах были изучены задачи оптимального управления, описываемые различными обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., напр., [2–4], где имеются соответствующие ссылки и обзоры). В частности, при некоторых предположениях типа гладкости на правые части рассматриваемых уравнений и на области управления доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка, а в некоторых случаях исследованы случаи их вырождения (особый случай [4]) с помощью различных схем. В последние годы разными авторами большое внимание уделяется исследованию качественной теории задач оптимального управления, описываемых различными дифференциальными уравнениями с дробными производными (см., например, [5, 6]).

В предлагаемой работе также рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, но с дробной производной Капуто и с многоточечным функционалом качества.

Как известно, самым сильным необходимым условием оптимальности в теории оптимального управления является необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Исходя из этого в данной работе с помощью модифицированного метода приращений установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Допустим, что управляемый непрерывный процесс на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} d\tau,$$

$$n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+$$

левая дробная производная Капуто (см., например, [7]).

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' -$ состояние управляемого объекта, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)' -$ r-мерная управляющая функция, знак (') означает для векторов операцию скалярного произведения, а для матриц – операцию транспонирования, $x_0 -$ заданный постоянный начальный вектор, $f(t, x, u) -$ заданная r-мерная, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x вектор-функция, $u = u(t)$ – кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) r-мерная функция, со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r. \tag{3}$$

Каждую такую управляющую функцию назовем допустимым управлением.

Пусть $\varphi(a_1, \dots, a_k) -$ заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

На решениях задачи Коши (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим многоточечный функционал:

$$S(u) = \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big). \tag{4}$$

Здесь $T_i, i = \overline{1,k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \le t_1) -$ заданные точки.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (4), при ограничениях (1)–(3), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$ – *оптимальным процессом.*

Нашей целью является установление необходимого условия оптимальности в рассматриваемой задаче при сделанных предположениях.

2. Построение приращения функционала цели

Пусть $u(t)$, и $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ – некоторые допустимые управления.

Решение задачи Коши (1)–(2), соответствующее этим допустимым управлениям, обозначим через $x(t)$ и $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ соответственно, и вычислим приращение функционала (4). Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) =$$
$$= \varphi\big(\bar{x}(T_1), \bar{x}(T_2), \dots, \bar{x}(T_k)\big) -$$
$$-\varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) + + o_1\left(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\|\right). \quad (5)$$

Здесь, и в дальнейшем, $\|\alpha\|$ означает норму вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α, т.е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Из введенных обозначений ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) = f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - -f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad (6)$$

$$x(t_0) = 0. \quad (7)$$

Предположим, что $\psi(t)$ пока произвольная n-мерная вектор-функция. Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u).$$

Умножая обе стороны уравнения (6) слева скалярно на $\psi(t)$ и интегрируя обе стороны полученного соотношения по t от t_0 до t_1, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt = = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \big[f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - -f\big(t, x(t), u(t)\big)\big] dt. \quad (8)$$

Тогда, принимая во внимание тождество (8), приращение (5) функционала качества (4) можно записать в виде

$$\Delta S(u) = = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) + + o_1\left(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\|\right) + + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt - - \int_{t_0}^{t_1} \big[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big] dt\,. \quad (9)$$

Далее из формулы приращения (9) функционала (4) получаем, что

$$\Delta S(u) = = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) + + o_1\left(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\|\right) + + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt - - \int_{t_0}^{t_1} \big[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - -H\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) + +H\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) + + o_1\left(\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\|\right) + + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt - - \int_{t_0}^{t_1} \big[H\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big] dt - - \int_{t_0}^{t_1} H_x'\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big)\, \Delta x(t) dt - - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) + + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt - - \int_{t_0}^{t_1} \big[H\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big] dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\,\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H_x\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]'\,\Delta x(t)dt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (10)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле приращения (10).

Пусть $\alpha_i(t)$ – характеристические функции отрезков $[t_0,T_i]$, $i=\overline{1,k}$.

Так как

$${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\ \ \alpha\in R_+$$

есть левая производная Римана–Лиувилля, то в нашем случае получаем, что

$$\Delta x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau.$$

Поэтому

$$\Delta x(T_i)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{T_i}\frac{{}_{t_0}^{C}D_{T_i}^{\alpha}\Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\alpha_i(t)\,{}_{t_0}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\Delta x(t)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Далее

$$\int_{t_0}^{t_1} H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\,\Delta x(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{t_0}^{t}\frac{H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big){}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{t_1}\frac{H_x'\big(\tau,x(\tau),u(\tau),\psi(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right)\times$$
$$\times\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt.$$

Далее получим

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i}\Delta x(T_i)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i}\times$$
$$\times\,\alpha_i(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt.$$

Поэтому формула приращения критерия качества может быть представлена в виде

$$\Delta S(u)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(t-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i}\times$$
$$\times\,\alpha_i(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H_x\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]'\,\Delta x(t)dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\big[H\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{t_1}\frac{H_x'\big(\tau,x(\tau),u(\tau),\psi(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right)\times$$
$$\times\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt-$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (11)$$

Предположим, что $\psi(t)$ является решением дробного интегрального уравнения

$$\psi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\int_t^{t_1}\frac{H_x\big(\tau,x(\tau),u(\tau),\psi(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i}. \quad (12)$$

Тогда формула приращения (11) будет иметь следующий окончательный вид:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}[H\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)]dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}[H_x\big(t,x(t),\bar u(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)]'\,\Delta x(t)dt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \quad (13)$$

3. Оценка нормы приращения траектории

Полученная формула приращения (13) позволяет доказать необходимое условие оптимальности. Для этого нам понадобится норма приращения $\Delta x\,(t)$ траектории $x\,(t)$.

Из (6)–(7), используя определение производной Капуто, получаем, что

$$\Delta x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\frac{f\big(\tau,\bar x(\tau),\bar u(\tau)\big)-f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\big[f\big(\tau,\bar x(\tau),\bar u(\tau)\big)-$$
$$-f\big(\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)+f\big(\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)-$$
$$-f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\big]d\tau=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\big[f\big(\tau,\bar x(\tau),\bar u(\tau)\big)-$$
$$-f\big(\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)\big]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\,\Delta_{\bar u}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)d\tau. \quad (14)$$

Так как, в силу сделанных предположений, функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липщица по x, то переходя к норме, получаем, что

$$\|\Delta x(t)\|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left\|f\big(\tau,\bar x(\tau),\bar u(\tau)\big)-f\big(\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)\right\|d\tau+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\left\|\Delta_{\bar u}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right\|d\tau.$$

Используя аналог формулы Гроноулла–Беллмана [7], получим

$$\|\Delta x(t)\|\le$$
$$\le L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\big\|\|\Delta x(\tau)\|\big\|d\tau+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(x-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left\|\Delta_{\bar u}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right\|d\tau, \quad (15)$$

где $L_1=const>0$ – некоторая постоянная.

Отсюда получаем, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\|\le L_2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-\tau)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left\|\Delta_{\bar u}f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right\|d\tau, \quad (16)$$

где $L_2=const>0$ – некоторая постоянная.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число, $v\in U$ произвольный вектор. Специальное приращение управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\begin{cases}v-u(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon),\end{cases} \quad (17)$$

где $\theta\in[t_0,t_1)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u(t)$.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение $x(t)$, соответствующее специальному приращению (игольчатая вариация) (17) управления $u(t)$.

Из неравенства (16) следует, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\|\le L_3\varepsilon, \quad (18)$$

где $L_3=const$ некоторая положительная постоянная.

Принимая во внимание оценку (18) и формулу (17) из формулы приращения (13) на основании теоремы о среднем получаем справедливость разложения

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) =$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t, x(t), u(t) + \Delta u_\varepsilon(t), \psi(t)\big) -\right.$$
$$\left. -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right]dt =$$
$$= -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[H\big(t, x(t), v, \psi(t)\big) -\right.$$
$$\left. -H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right]dt + o(\varepsilon) =$$
$$= -\varepsilon\left[H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) -\right.$$
$$\left. -H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)\right] + o(\varepsilon). \quad (19)$$

Если предполагать, что $u(t)$ – оптимальное управление, то из разложения (19) следует, что

$$H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) -$$
$$-H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big) \geq 0,$$

т. е.

$$\max_{v \in U} H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) =$$
$$= H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big). \quad (20)$$

Следовательно, имеет место следующая

Теорема (принцип максимума Понтрягина). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы условие максимума (20) выполнялось для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Доказанное утверждение является аналогом принципа максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

Список литературы

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 384 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 812 с.
4. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
5. *Постнов С.С.* Исследование задач оптимального управления динамическими системами дробного порядка методом моментов: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 26 с.
6. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advances in Difference Equations. 2017. (1).
7. *Lin S.Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications, 2013. 549. № 1.

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko Ye.F.* Matematicheskaya teoriya optimal′nykh protsessov. M.: Nauka, 1961. 384 s.
2. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Printsip maksimuma v teorii optimal′nogo upravleniya. Minsk: Nauka i tekhnika, 1974. 272 s.
3. *Vasil'yev F.P.* Metody optimizatsii. M.: Faktorial, 2002. 812 s.
4. *Gabasov R.F., Kirillova F.M.* Osobyye optimal′nyye upravleniya. M.: Librokom, 2011. 272 s.
5. *Postnov S.S.* Issledovaniye zadach optimal′nogo upravleniya dinamicheskimi sistemami drobnogo poryadka metodom momentov: // avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk. M., 2015. 26 s.
6. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advances in Difference Equations. 2017. (1).
7. *Lin S.Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 2013. 549. № 1.

Просьба ссылаться на эту статью:

Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10.

Please cite this article as:

Mansimov K.B., Ahmedova ZH.B. A Pontryagin Maximum Principle Analogue in the Optimal Control Problem of a Differential Equations System with a Fractional Caputo Derivative and a Multipoint Quality Criterion // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 3(58). P. 5–10. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10.