ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 • Математика. Механика. Информатика• Вып. 3(58)

УДК 517.956

Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линией

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет; Душанбе, Таджикистан
e-mail: boitura@mail.ru; ORCID: 0000-0003-4995-5716, AuthorID: 827392

Рассматривается переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линии. Найдено многообразие решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линией в явном виде при выполнении условии совместности с использованием трех произвольных постоянных. Введя в рассмотрение новую функцию из двух первых уравнений данной системы, получается переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной точкой. Общее решение этой системы находится в явном виде с использованием одной произвольной постоянной. Далее, подставляя общее решение в третье уравнение данной системы, получаем условие, эквивалентное условиям совместности данной системы. При его выполнении решение сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сверхсингулярной линией. Решая полученную систему, находим общее решение переопределяемой системы в явном виде с использованием трех произвольных постоянных.

Ключевые слова: *системы дифференциальных уравнений; условия совместности; частные производные; переопределенная; граничные; сингулярные; сингулярная точка; сверхсингулярная линия.*

Поступила в редакцию 24.05.2022, принята к опубликованию 25.07.2022

Redetermined System of Second-Order Partial Differential Equations with One Singular Point and One Boundary Supersingular Line

B. M. Shoimkulov
Tajik National University Dushanbe; Tajikistan
e-mail: boitura@mail.ru; ORCID: 0000-0003-4995-5716, AuthorID: 827392

Redetermined system of second-order partial differential equations with one singular point and one boundary supersingular is considered in the paper. A solutions variety of redetermined systems of second-order partial differential equations with one singular point and one boundary supersingular line is found in explicit form with compatibility conditions accomplishment and three arbitrary constants using. An redetermined system of first order partial differential equations with one singular point is obtained by introducing a new function from the first two equations of this system into consideration. The general solution of this system is found in explicit form with one arbitrary constant using.

Then a condition equivalent to the compatibility conditions of this system is obtained by substituting the general solution into the third equation of this system. If condition is performed, then a solution is reduced to a system of second-order ordinary differential equations with one supersingular line solving. A general solution of the redetermined system is found by resulting system solving in explicit form with three arbitrary constants using.

Keywords: *differential equations systems; compatibility conditions; partial derivatives; redetermined; boundary; singular; singular point; supersingular line.*

Received 24.05.2022, accepted 25.07.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-18-24

Введение

Переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных могут быть использованы при решении конкретных задач гидродинамики, газовой динамики, теории упругости и других разделов механики и физики. Например, переопределенные системы применяются в механике деформируемого твердого тела при исследовании вопроса о реализуемости в теле простых процессов деформации. Оказывается, они крайне важны для обеспечения физической достоверности широкого класса математических моделей и решений соответствующих задач, а именно классов задач пластичности и вязкой упругости и т.п. Исследование переопределенных систем выявляет достаточно общие классы их решений, что существенно расширяет принципиальные возможности реализации процессов простой деформации и обеспечивает тем самым более широкую область применимости указанных математических моделей пластичности и вязкой упругости и т.д. и поэтому является актуальным.

Переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярными коэффициентами известны еще с прошлого века и связаны с именами Якоби, Фробениуса и др. К настоящему времени хорошо изучены переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярными коэффициентами, т. е. системы в полных дифференциалах.

Работа [1] посвящена проективной дифференциальной геометрии кривых и линейчатых поверхностей.

В работе [2] исследована фонтоны гипергеометрии гиперсферических полиномов Эрмита. Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков исследована в работе [3, с. 46–64].

Переопределенные системы уравнений в частных производных второго порядка с одной искомой функцией изучены в [4, с. 71–79]. Преобразования, трансмутации и функции ядра рассмотрены в работе [5].

В монографии академика НАН РТ Раджабова Н. (1992 г.) "Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами" [6, с. 126], исследованы краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка и некоторых линейных переопределенных систем первого и второго порядка с одной и с двумя сверхсингулярными линиями и сверхсингулярными точками.

Найдены интегральные представления и поставлены некоторые граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [7, с. 170].

Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости с регулярными коэффициентами рассмотрено в работе [8, с. 313–320].

Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации рассматриваются в [9, с. 701–710].

О неоднородно-простых процессах изложено в работе [10, с. 100–103].

Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка с регулярными коэффициентами рассматривается в [11, с. 15].

В работе [12, с. 96–106] исследованы некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости.

Найдены интегральные представления линейных переопределенных систем второго порядка с одной сингулярной точкой [13, с. 3–10].

Найдены интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями [14, с. 3–7].

Теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями посвящено исследование [15, с. 32–43].

В работе [16, с. 4–12] рассматривается переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве.

В работе [17, с. 79–82] найдены интегральные представления переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками.

Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой исследована в [18, с. 17–23].

В настоящей работе рассмотрена переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$u_x = P(x,y), u_y = Q(x,y)$$

совместно, когда имеет место $P_y = Q_x$. При его выполнении

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

является полным дифференциалом и функцию $u(x,y)$ можно восстановить интегрированием. Восстановление функции $u(x,y)$ аналогично в трехмерных и n-мерных случаях.

Академиком НАН РТ Л.Г. Михайловым впервые рассмотрены некоторые системы в полных дифференциалах с сингулярными точками первого порядка (1989–1992 гг.), а в 1986 г. им опубликована монография "Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями". В нем имеется обзор литературы и излагаются разработанные ранее теории двух классов: систем в полных дифференциалах и общих линейных систем первого порядка с одной вещественной искомой функцией.

Но кроме того, в монографии Л.Г. Михайлова впервые введены в рассмотрение и достаточно полно изучены такие новые классы переопределенных систем, как: линейные системы уравнений в частных производных второго порядка регулярными коэффициентами, некоторые простейшие линейные и квазилинейные системы уравнений первого порядка.

Через D обозначена прямоугольная область $D = \{(x,y): 0 < x < a_0, 0 < y < b_0\}$.

Соответственно обозначим:

$$\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\},\ \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < b_0\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{x a_1(x,y)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_1(x,y)}{r} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{y a_2(x,y)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_2(x,y)}{r}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{a_3(x,y)}{y^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_3(x,y)}{y^\gamma} \end{cases} \qquad (1)$$

где $\gamma > 2$, $a_j(x,y)$, $f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$ – заданные функции класса, $C^1(D) \cap C(\overline{D})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u(x,y) \in C^2(D)$ – искомая функция.

Пусть в системе (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{aligned} &a_1(x,y),\ f_1(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), \\ &a_2(x,y),\ f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), \\ &a_3(x,y),\ f_3(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{y a_2(x,y)}{r}\Big] = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{x a_1(x,y)}{r}\Big], \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} &r^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_2(x,y)}{r}\Big] + y a_2(x,y) f_1(x,y) = \\ &= r^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_1(x,y)}{r}\Big] + x a_1(x,y) f_2(x,y) \end{aligned}, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{a_3(x,y)}{y^\gamma}\Big] + \frac{x a_1(x,y) a_3(x,y)}{y^\gamma r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{y a_2(x,y)}{r}\Big] + \Big(\frac{y a_2(x,y)}{r}\Big)^2 \end{aligned}, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_3(x,y)}{y^\gamma}\Big] + \frac{a_3(x,y) f_1(x,y)}{y^\gamma r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_2(x,y)}{r}\Big] + \frac{y a_2(x,y) f_2(x,y)}{r^2} \end{aligned}. \qquad (6)$$

Тогда, вводя новую функцию $\dfrac{\partial u}{\partial x} = W(x,y)$, из первых двух уравнений системы (1) получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{x a_1(x,y)}{r} W + \dfrac{f_1(x,y)}{r} \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = \dfrac{y a_2(x,y)}{r} W + \dfrac{f_2(x,y)}{r} \end{cases}. \qquad (7)$$

Пусть функции $a_1(x,y), f_1(x,y)$ в окрестности сингулярной точки $r=0$ удовлетворяют условиям

$$|a_1(x,y)-a_1(0,0)|\le H_1 r^{\gamma_1},\quad H_1=const>0, \gamma_1>0, \tag{8}$$

$$f_1(x,y)=o(r^{\gamma_2}), \gamma_2>0. \tag{9}$$

Тогда общее решение системы (7) имеет вид

$$W(x,y)=\exp(\omega_1(x,y)+a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2})\cdot \cdot[\exp(\omega_2(0,y)-ya_1(0,0))(c_1+ +\int_0^y \frac{f_2(0,\tau)}{\tau}\exp(-\omega_2(0,\tau))d\tau)+ +\int_0^x \frac{f_1(t,0)}{\sqrt{t^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t,y)- -a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2})dt], \tag{10}$$

где

$$\omega_1(x,y)=\int_0^x \frac{t(a_1(t,y)-a_1(0,0))}{\sqrt{t^2+y^2}}dt,\quad \omega_2(0,y)=\int_0^y a_2(0,\tau)d\tau,$$

c_1 – произвольная постоянная.

Далее, учитывая $\frac{\partial u}{\partial x}=W(x,y)$ для нахождение $u(x,y)$, имеем

$$u(x,y)=\int_0^x W(t,y)dt+\varphi(y), \tag{11}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция переменного y.

Дважды дифференцируя (11) по переменному y, подставляя в третье уравнение системы (1), получим условие вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(\frac{ya_2(x,y)}{r}-\frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial y}-\frac{ya_1(0,0)}{r})(\varphi(y)+ +\int_0^y \frac{f_2(t,y)}{\sqrt{t^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t,y)-a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2})dt)+ +\frac{f_2(x,y)}{r}\exp(-\omega_1(x,y)-a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2}\} =\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_1(x,y)}{r}\exp(-\omega_1(x,y)-a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2}). \tag{12}$$

Используя условие (12), учитывая (10) для нахождения произвольной функции $\varphi(y)$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}=\frac{a_3(0,y)}{y^\gamma}\exp(\omega_2(0,y))[c_1+ +\int_0^y \frac{f_2(0,\tau)}{\tau}\exp(-\omega_2(0,\tau)d\tau]+\frac{f_3(0,y)}{y^\gamma}. \tag{13}$$

Дважды интегрируя (13), имеем

$$\varphi(y)=c_1\int_0^y \frac{(y-\tau)(a_3(0,\tau)e^{\omega_2(0,\tau)}-a_3(0,0))}{\tau^\gamma}d\tau+ +\int_0^y \frac{(y-\tau)^2 a_3(0,\tau)f_2(0,\tau)}{2\tau^{\gamma+1}}e^{\omega_2(0,y)-\omega_2(0,\tau)}d\tau+ +\int_0^y \frac{(y-\tau)(f_3(0,\tau)-f_3(0,0))}{\tau^\gamma}d\tau+ +\frac{c_1a_3(0,0)+f_3(0,0)}{(\gamma-1)(\gamma-2)y^{\gamma-2}}+c_2y+c_3. \tag{14}$$

Подставляя значение произвольной функции $\varphi(y)$ из (14) в (11), учитывая (10), получим:

$$u(x,y)=\int_0^x \frac{f_1(t_1,y)}{\sqrt{t_1^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t_1,y)- -a_1(0,0)\sqrt{t_1^2+y^2})W(t_1,y)dt_1+ +c_1[\int_0^x \exp(\omega_1(t,y)+a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2}+ +\omega_2(0,y)-ya_1(0,0))dt+ +\int_0^y \frac{(y-\tau)(a_3(0,\tau)\exp(\omega_2(0,\tau))-a_3(0,0))}{\tau^\gamma}d\tau]+ +\int_0^y K(x,y,\tau)f_2(0,\tau)d\tau+ +\int_0^y \frac{(y-\tau)(f_3(0,\tau)-f_3(0,0))}{\tau^\gamma}d\tau+ +\frac{c_1a_3(0,0)+f_3(0,0)}{(\gamma-1)(\gamma-2)y^{\gamma-2}}+c_2y+c_3, \tag{15}$$

где

$$W(t_1,y)=\int_{t_1}^x \exp(\omega_1(t_1,y)+a_1(0,0)\sqrt{t_1^2+y^2})dt_1,$$

$$K(x,y,\tau)=[\frac{1}{\tau}\int_0^x \exp(\omega_1(t,y)+ +a_1(0,0)(\sqrt{t^2+y^2}-y)dt+ +\frac{(y-\tau)^2a_3(0,\tau)}{2\tau^{\gamma+1}}]\exp(\omega_2(0,y)-\omega_2(0,\tau)).$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть коэффициенты и правые части системы (1), удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9), (12) в области* D. *Кроме того, функции* $a_3(0,y)$, $f_2(0,y), f_3(0,y)$ *в окрестности точек контура* Γ_2 *удовлетворяют условиям*

$$|a_3(0,y)\exp(\omega_2(0,y))-a_3(0,0)|\le H_2 y^{\gamma_3},$$

$$H_2=const>0, \gamma_3>\gamma-1,$$

$$f_2(0,y)=o(y^{\gamma_4}), \gamma_4>1,$$

$$f_3(0,y)=o[y^{\gamma_5}],\ \gamma_5>\gamma-1.$$

Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$ *представимо в виде (15), где* c_1, c_2, c_3 *– произвольные постоянные числа.*

Замечание. Решение вида (15) в окрестности сингулярной точки $r=0$ и сингулярной линии $y=x$ при выполнении всех условий теоремы имеет полюс порядка $(\gamma-2)$.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E.J. Wilczynski. Leipzig:B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами: учеб. пособие по спецкурсу. Душанбе, 1992. 236 с.
7. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе, изд. ТГУ, ч. № I, 1980. 126 с., ч. № II, 1981. 170 с., ч. № III. 1982. 170 с.
8. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
9. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
10. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1988. № 1. С. 100–103.
11. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. Душанбе, 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22 (622).
12. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сб. науч. ст.). Душанбе: ТГПУ, 1998. Вып. 6. С. 96–106.
13. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального Университета (серия естественных наук). Душанбе: ТГНУ, "Сино", 2005. № 3 (26). С. 3–10.
14. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Душанбе, 2017. № 1–2. С. 3–7.
15. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Душанбе, 2018. № 3. С. 32–43.
16. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журн. науч. тр. Бугульма, 2019. № 6. С. 4–12.
17. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Материалы междунар. науч. конф. "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвященной 10-летию Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе, 2019. С. 79–82.

18. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 17–23.

References

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E.J. Wilczynski. Leipzig: B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Arhutik G.M.* Regular singular point of linear equations in complete differentials of higher orders // Izv. AN BSSR. Ser. phys.-mat. sciences. 1979. № 3. P. 46–54.
4. *Mikhailov L.G.* Some redefined systems of partial equations derivatives with two unknown functions. Dushanbe: Donish, 1986. 116 p.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions [Текст] / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Rajabov N.* Introduction to the theory of differential partial differential equations with supersingular coefficients. (Textbook on a special course). Dushanbe, 1992. 236 p.
7. *Rajabov N.* Integral representations and boundary value problems for some differential equations with a singular line or singular surfaces // Dushanbe, ed. TSU, part no. I, 1980. 126 p., part no. II, 1981. 170 p., part no. III. 1982. 170 p.
8. *Pirov R.* Investigation of some nonlinear systems of second-order partial differential equations with one unknown function on a plane // Extreme problems for differential equations. Chernivtsi: Prut, 2006. Vol. 14. P. 313–320.
9. *Brovko G.L.* Necessary and sufficient conditions of homogeneous-simple deformation // Prikl. matem. and mechanics. 1978. Vol. 42. P. 701–710.
10. *Lenskaya S.E.* On inhomogeneous-simple processes // Vestnik Moscow. un-ta. Ser. Math., mechanics. 1988. № 1. P. 100–103.
11. *Pirov R.* On one over determined system of partial differential equations of the second order. Dushanbe, 1989. 15 p. Dep. in the Taj. NIINTI 19.06.89. № 22(622).
12. *Shoimkulov B.M., Ruzmetov E.* To the theory of some over determined systems of second-order partial differential equations with singular points on the plane // Differential and integral equations and their applications (collection of scientific articles), TSPU. Dushanbe-1998. Issue 6. P. 96–106.
13. *Shoimkulov B.M., Rajabov N.* A second-order linear undefined system with one singular point // Bulletin of the National University (Series of Natural Sciences). Dushanbe: TGNU – "Sino". 2005. № 3(26). P. 3–10.
14. *Shoimkulov B.M., Rajabov N., Komilov A.O.* Integral representations of a variety of solutions for one class of partial differential equations of the third order-a row with three supersingular regions // Bulletin of the Tajik national university. Series of natural sciences. Dushanbe, 2017. № ½. P. 3–7.
15. *Shoimkulov B.M.* To the theory over determined systems of partial differential equations of the second order with one singular line and two super singular lines // Bulletin of the Tajik national university. Series of natural sciences. Dushanbe, 2018. № 3. P. 32–43.
16. *Shoimkulov B.M.* Over determined system of first-order partial differential equations with one super-singular and one singular plane in three-dimensional space // Electronic innovation bulletin: international periodical journal of scientific works. Bugulma, 2019. № 6. P. 4–12.
17. *Shoimkulov B.M.* Over determined system of first-order partial differential equations with one singular and two supersingular points // Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of natural and humanitarian sciences and their role in strengthening scientific ties between countries", dedicated to the 10th anniversary of the Branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov in Dushanbe (October 10–11). Dushanbe, 2019. P. 79–82.
18. *Shoimkulov B.M.* Over determined system of partial differential equations of the first order with one singular and one supersingular point // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2020. Issue 3(50). P. 17–23.

Просьба ссылаться на эту статью:

Шоймкулов Б.М. Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 18–24. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-18-24.

Please cite this article as:

Shojmkulov B.M. Redetermined System of Second-Order Partial Differential Equations with One Singular Point and One Boundary Supersingular Line // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 3(58). P. 18–24. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-18-24.