УДК_51(09)

Из истории комбинаторного анализа: от идеи до научных школ

В. Г. Алябьева
Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: alyabieva@rambler.ru; **ORCID: 0000-0002-2282-2457, AuthorID: 259011**

Исследовано развитие комбинаторного анализа от идеи до научных школ. В XVII в. стимулом для комбинаторных исследований явились идеи Г.В. Лейбница о комбинаторном искусстве и об особом геометрическом анализе – Analysis Situs. В XVIII в. разнообразные комбинаторные задачи решал Л. Эйлер. Во второй половине XVIII в. в Германии возникла первая научная школа комбинаторного анализа К.Ф. Гинденбурга. В XIX в. исследовались комбинаторно-геометрические конфигурации. Кэли А. и Сильвестр Дж. ввели термин "тактика" для специального раздела математики, изучающего расположение элементов. В XX в. в Перми возникла комбинаторная школа Е.Г. Гонина, в Москве – комбинаторная школа К.А. Рыбникова.

Ключевые слова: *комбинаторика; анализ положения; магические квадраты; латинские квадраты; Г.В. Лейбниц; Л. Эйлер; К. Гинденбург; А. Кэли; Дж. Сильвестр; Е.Г. Гонин; К.А. Рыбников.*

Поступила в редакцию 30.04.2022, принята к опубликованию 24.05.2022

From the History of Combinatorial Analysis: From Idea to Research Schools

V. G. Alyabieva
Perm State University; Perm, Russia
e-mail: alyabieva@rambler.ru; **ORCID: 0000-0002-2282-2457, AuthorID: 259011**

The article explores the development of combinatorial analysis from the idea to scientific schools. Combinatorial research was stimulated by G.W. Leibniz's ideas about combinatorial art and special geometric analysis – Analysis Situs in the 17th century. Various combinatorial problems were solved by L. Euler in the XVIII century. The first scientific school of combinatorial analysis arose by K.F. Hindenburg in the second half of the 18th century in Germany. Combinatorial-geometric configurations were studied in the 19th century. A. Cayley and J. Sylvester coined the term tactics for a special branch of mathematics, of wich order is proper sphere. The modern combinatorial schools are Gonin's school in Perm and the combinatorial Rybnikov's school in Moscow.

Keywords: *combinatorics: analysis situs; magic squares; Latin squares; G.W. Leibniz; L. Euler; K. Hindenburg; A. Cayley; J. Sylvester; E.G. Gonin; K.A. Rybnikov.*

Received 30.04.2022, accepted 24.05.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-14-25

Комбинаторная составляющая присутствует во всех математических науках. Выделению комбинаторики в самостоятельную науку способствовали идеи Г.В. Лейбница о комбинаторном методе *(ars combinatoria*) и об особом геометрическом исчислении – геометрии положения (*analysis situs*). Вилимо, Лейбниц был первым, кто употребил термин "комбинаторика" в смысле, близком современному пониманию [1, с.1].

Ars combinatoria

Г.В. Лейбниц понимал комбинаторику очень широко, он возвел комбинаторику в ранг универсального метода исследования.

Г.В. Лейбниц,
1646–1716 [2, с. 50]

В своем стремлении изобрести универсальный язык Всеобщей науки он предлагал выявить простейшие элементы, создать алфавит языка науки, создать правила комбинирования символов такого алфавита, позволяющие получать из известных истин новые истины. Если создать систему знаков, подобную системе цифр в науке о числах (в арифметике), и использовать формулы, определяющие истинность или ложность высказываний аналогично алгебраическим уравнениям, то можно разработать ***формальную комбинаторику***, дающую возможность определять истинность или ложность любых высказываний, получать ***приращение знания комбинаторным методом***.

Первый опыт комбинирования посылок для построения силлогизмов Лейбниц продемонстрировал в 1666 г. в расширенном варианте магистерской диссертации "Рассуждение об искусстве комбинаторики" (Disserttatio de arte Combinatoria) [3, с. 45–118].

В продолжении заглавия работы говорится, что в ней на основе арифметики излагается новая доктрина построения универсальной науки, искусство медитации, логика открытия, доказательство существования бога.

Первые главы своих "Рассуждений о комбинаторном искусстве" он опубликовал отдельным изданием как "Арифметическое исследование комплексий" [4, 5] в качестве тезисов к диспуту для хабилитации на философском факультете в университете Лейпцига. Основное философское содержание диссертации содержится в главе "Применение Задач I и II". Лейбниц утверждает, что "... подобно тому, как геометрия Евклида начинается с аксиом, так и во всех прочих науках должны быть установлены первопринципы, из которых путем комбинирования по определенным правилам выводились бы все прочие утверждения.

Например, юриспруденция во всем похожа на геометрию, разве что в одном случае имеются элементы, в другом – казусы.

Простыми элементами в геометрии являются фигуры: треугольники, круги и пр. В юриспруденции – действия, обязательства, право продажи и пр. Казусами являются их комплексии. Аналогичным образом комбинаторный метод применим в медицине, натурфилософии, музыке, военном деле и стихосложении".

В математике "комбинаторная наука", по мысли Лейбница, включает в себя не только алгебру и теорию чисел, но и затрагивает все области математики, известные в его время. Что касается силлогистики, то "можно составить своего рода алфавит человеческих мыслей и обо всем можно открыть и судить путем сравнения букв алфавита и анализа составленных из них слов".

Такой алфавит может быть использован для суждений и открытий. Он не только служил бы для демонстрации утверждений, которые уже считались истинными – логика обоснования, – его также можно было бы использовать для изобретения или открытия новых истин – логика открытия. Как будет выглядеть логика открытия? Лейбниц отвечал, что искусство открытия (*ars inveniendi)* должно иметь две части: одну комбинаторную, чтобы генерировать вопросы, другую – аналитическую, чтобы на них отвечать.

Тему комбинаторного приращения знаний Лейбниц выбрал под влиянием идей Рамона Луллия (Ramon Llull, 1232–1315), философа, теолога, поэта, миссионера и христианского апологета из Королевства Майорка.

Луллий был первым европейским философом, который пытался создать универсальную науку о всех существующих вещах. Луллий рассматривал мир как совокупность различных понятных комбинаций, образованных по законам логики.

Для того чтобы найти эти законы, то есть выявить истинную природу взаимосвязей между вещами, Луллий разработал метод, который он называл *ars generalis* или *ars universalis* или *ars magna* (великое искусство). Суть метода заключался в том, чтобы свести все возможные человеческие знания к определенному набору первичных истин, к "азбуке человеческих мыслей". О влиянии Луллия Лейбниц говорит в своем "Рассуждении о комбинаторном искусстве".

Позднее, в июле 1714 г., в письме Ремону Лейбниц так оценивает свою публикацию по комбинаторике и влияние Луллия; "В юности я увлекался искусством Луллия; но затем заметил, что его труд грешит многими недостатками и указал в моем ученическом опыте под названием "De arte combinatoria", который вышел в 1666 г., а позднее переиздавался вопреки моему желанию. Но так как я ничего не отвергаю с порога ..., я нашел нечто заслуживающее внимания и в искусстве Луллия .... Однако г-н Декарт, как мне кажется, отличается совсем иным глубокомыслием" [6, т. 1 с. 537].

Математические результаты в диссертации Лейбница весьма скромные. Акцент сделан на приложения. "Dissertatio de Arte Combinatoria" была единственной книгой Лейбница, опубликованной им самим при жизни.

Второе издание работы вышло в 1690 г. во Франкфурте-на-Майне без участия и без согласия автора. В 1691 г. Лейбниц поместил заметку в "Acta Eruditorium", где выражал сожаление по поводу того, что его юношеское сочинение было опубликовано без необходимых исправлений, поскольку книга эта "хотя и содержит множество новых достойных внимания размышлений, из которых берет начало искусство изобретения, и среди прочего знаменитое открытие о разложении человеческих познаний на своего рода алфавит первичных понятий, однако эта книга недостаточно тщательная и не соответствует его нынешним мыслям и личности" [3, с. 103].

Действительно, за двадцать с лишним лет, прошедших со времени публикации "Dissertatio", Лейбниц существенно пересмотрел математический аппарат комбинаторного анализа и продолжал работать над этой проблематикой до конца своей жизни (последняя известная публикация Лейбница по комбинаторике датируется 1708 г. [5, с. 152]).

К середине 90-х гг. XVII в. относится заметка Лейбница, озаглавленная переводчиками "История универсальной характеристики", в которой он вспоминает, как еще в школьные годы заинтересовался идеей, которая будет его волновать всю жизнь: "... я натолкнулся на ту замечательную идею, что можно придумать некий алфавит человеческих мыслей и с помощью комбинации букв этого алфавита и анализа слов, из них составленных, все может быть открыто и разрешено. Когда я это понял, я возликовал; я радовался какой-то детской радостью, ибо тогда я еще не осознавал всего величия этого дела, но впоследствии, чем большего прогресса я достигал в познании вещей, тем больше утверждался в своем решении посвятить себя столь великому делу. Между тем, возмужав и будучи уже двадцати лет от роду, я собрался посвятить себя академическим занятиям. Поэтому я написал диссертацию о "комбинаторном искусстве", которая в виде книжки была опубликована в 1666 г. и в которой я публично объявил об этом удивительном открытии. Правда, это была диссертация, какая могла быть написана юношей, только что сошедшим со школьной скамьи и еще не посвященным в реальные науки (ибо в наших местах математические науки не были в почете, и, если бы я, как Паскаль, провел свое детство в Париже, я, может быть, раньше содействовал бы развитию этих наук. Однако я не жалею о том, что написал эту диссертацию, по двум причинам: во-первых, потому что она чрезвычайно понравилась многим одареннейшим людям, во-вторых, потому что уже тогда я сообщил в ней миру некоторые наметки своего открытия" [7, т. 3, с. 415].

По прошествии более 30 лет с момента публикации "Диссертации о комбинаторном искусстве" Лейбниц все еще увлечен комбинаторными идеями и в апреле 1679 г. в письме Иоганну Фридриху, герцогу Ганноверскому, излагает возможности применения искусства комбинирования: "Мое изобретение содержит в себе применение всего разума, суждение в каждом споре, анализ всех понятий, оценку вероятности, компас для навигации по океану наших переживаний, инвентаризацию всех вещей, таблицу всех мыслей, микроскоп, с помощью которого можно доказать явления настоящего, и телескоп, с помощью которого можно предвидеть явления будущего, общая возможность вычислить все" [8].

Большую работу по исследованию комбинаторного наследия Лейбница выполнил профессор Эберхард Кноблох, который обнаружил сотни рукописей среди более чем 7300 страниц неопубликованного математического материала Лейбница, свидетельствующих о многочисленных исследованиях в этой области. Соответствующие заметки можно сгруппировать по пяти разделам:

1. Комбинаторная теория в более узком смысле (основные комбинаторные операции).

2. Симметричные функции (вместе с теорией уравнений).

3. Разбиения (часть аддитивной теории чисел).

4. Детерминанты (исключение неизвестных в системах уравнений высшей степени).

5. Теория вероятностей и смежные области (теория игр, расчет ренты и процентов).

Выясняется, что Лейбниц знал многие результаты, которые другие математики опубликовали лишь много десятилетий спустя. Среди них рекурсивная формула для числа разбиений натурального числа n на k слагаемых (впервые опубликована Эйлером в 1751 г. [9]), числа Стирлинга второго рода (впервые опубликована в 1730 г. [10]) и несколько частных случаев общей формулы для разбиений, опубликованной только в 1840 г. Штерном [11].)

Э. Кноблох опубликовал результаты своих исследований неопубликованных рукописей Лейбница по комбинаторике в следующих монографиях:

– *Кноблох Е.* Математические исследования Г.В. Лейбница по комбинаторике, объясненные и прокомментированные почти исключительно по рукописным заметкам. 1973 г. [12].

– *Кноблох Э.* Математические исследования Г.В. Лейбница по комбинаторике. Том текстов, изданный впервые по оригинальным рукописям вслед за томом одноименных трактатов. 1976 г. [13].

– *Кноблох Э.* Начало детерминантной теории. Посмертные исследования Лейбница по детерминантному исчислению. Том текстов, связанный с одноименным томом сочинений, впервые основанных почти исключительно на оригинальных рукописях. 1980 г. [14].

– *Кноблох Э.* Математические штудии Лейбница по комбинаторике. 1974 г. [15].

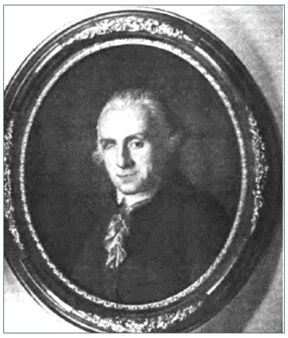
В XIX в. взгляды Лейбница на комбинаторику разделял Сильвестр Дж. Дж., который многократно обращался к комбинаторным исследованиям. В своей статье 1844 г. "Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов" (Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation) утверждал, что число, место и комбинация являются тремя пересекающимися, но различными сферами, к которым имеют отношение все математические идеи. К обсуждению комбинаторной составляющей математики Сильвестр вернулся в 60-х гг. XIX в. в серии статей. В статье 1861 г. он пишет: "Я дал общее название *Тактика* разделу чистой математики, в котором порядок является основной сферой подобно тому, как число и пространство – сферой двух других" [16, с. 269]. Артур Кэли также занимался комбинаторными исследованиями. Он поддерживал Сильвестра в высокой оценке значимости комбинаторики и в именовании *тактикой* раздела математики, изучающего расположение элементов друг относительно друга. В статье 1864 г "Понятие и границы алгебры" [17] предлагал различать в алгебре два вида операций: тактические и логистические. *Тактическая* операция связана с *расположением* множества вещей некоторым образом, логистическая (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа [17, с. 383–384].

Analysis Situs

Идею об *analysis situs* Лейбниц сформулировал в письме к Гюйгенсу от 8 сентября 1679 г.: "...я еще не доволен алгеброй, так как она не дает для геометрии ни кратчайших путей, ни наиболее изящных конструкций. Вот почему по поводу этого я думаю, что нам необходимо иметь еще другой анализ – собственно геометрический или линейный, который непосредственно давал бы нам **выражения по месту** (situm) так же, как алгебра дает выражения по величине (magnitudinem). И я полагаю, что вижу средство для этого и что можно было бы представить фигуры и даже машины и движения буквами, как алгебра представляет числа и величины".

В заключительной части письма Лейбниц отмечает, что эта точка зрения открывает новый тип исчисления, которое сильно отличается от алгебраического. "Мне нравится называть его *analisys situs*, так как это объясняет ситуацию прямо и непосредственно, т. е., если фигура не нарисована, ее можно изобразить с помощью символов. ... Следовательно, это исчисление ситуации, как я предполагаю, будет дополнением к чувственному воображению и усовершенствует его. Оно будет иметь применение не только в геометрии, но и к изобретению машин" [18, с. 254; 257].

Леонард Эйлер был первым, кто решал и решил первую задачу, относящуюся к анализу положения, – задачу о кенигсбергских мостах.



Леонард Эйлер,
1707–1783 [17, с. 7]

В задаче требовалось найти маршрут по 7 мостам Кенигсберга, связывающих 4 участка суши. Маршрут начинается с любого участка суши, проходит по каждому мосту точно один раз и заканчивается в исходной точке. Задачу знали многие жители Кенигсберга. Было поверье, что если таким образом пройти по мостам, то это принесет удачу. Многие годы эту задачу решали любители математики, но не смогли решить. Эйлер взялся за решение этой задачи, так как ему сказали, что она относится к задачам о геометрии положения, о которых упоминал Лейбниц.

Эйлеру 28 лет. Уже 8 лет он работает в Петербургской академии наук. Статью "Решение проблемы, относящейся к геометрии положения" [20] Эйлер представил Петербургской академии наук 26 августа 1735 г., статья принята для публикации в трудах Академии наук ("Комментарии Академии наук") за 1736 г., но "Комментарии" со статьей Эйлера появились лишь в 1741 г.

Статья была перепечатана в 1759 г. в Берлине. Статья начинается словами: " В дополнение к той части геометрии, которая имеет дело с количествами, и которая всегда возбуждала особый интерес, существует другая – фактически еще неизвестная – часть, которую впервые упомянул Лейбниц и которую он назвал геометрией положения.

Эта часть геометрии занимается именно тем, что может быть определено только положением, а также исследованием свойств положения; в этом смысле она не будет касаться ни количеств, ни их вычисления. Однако виды задач, относящиеся к этой геометрии положения, и методы, используемые для их решения, были недостаточно точно определены. Из-за этого в последнее время, когда возникала задача, которая казалась в основе своей геометрической, но по своей природе не требовала определения количеств и не допускала решения с помощью вычисления количеств, я был убежден, что она принадлежит геометрии положения главным образом из-за того, что только положение можно использовать для ее решения, в то время как вычисления были совсем бесполезны. Поэтому я решил объяснить здесь метод, который разработал для решения задач подобного вида, как пример геометрии положения" [19, с. 26].

Эйлер доказал, что задача о кенигсбергских мостах неразрешима. Он исследовал условия ее разрешимости и утверждал:

– "Если существует более двух областей, к которым ведет нечетное число мостов, то искомый маршрут не существует.

– Если существует ровно две таких области, то существует незамкнутый маршрут.

– Если нет областей, к которым ведет нечетное число мостов, то маршрут можно начинать с любой области" [19, с. 31–32].

Эйлер представил строгое доказательство только для первого из трех выводов. Первое удовлетворительное доказательство двух других результатов дал Карл Хирхольцер в 1871 г. [21].

Задачу Эйлера о кенигсбергских мостах считают задачей, определившей начало теории графов и топологии. Идея *analysis situs* и *geometia situs* осваивалась медленно. Так, К. Гаусс в 1833 г. писал, что о *geometria situs*, о которой говорил Лейбниц, и на которую лишь пара геометров (Эйлер и Вандермонд) бросили беглый взгляд, через полторы сотни лет мы знаем не больше, чем ничего. В XIX в. этим термином некоторое время называли проективную геометрию. Во Франции Лазарь Карно (1803) опубликовал книгу "Геометрия положения" (*Géométrie de position)*, в Германии – К. Г. Штаудт, опубликовал в 1847 г. книгу

"Геометрия положения" (Geometry der Lage). Листинг И.Б. ввел термин "топология" (в книге 1847 г. "Предварительные заметки о топологии"), сопровождая его следующими комментариями: "Да будет позволено употреблять для такого рода исследований пространственных образов название "топология" вместо предложенного Лейбницем названия "geometria situs", напоминающего о понятиях "мера", "мерить" играющих здесь совершенно подчиненную роль, и совпадающего с названием "geometrie de position", уже принятым для другого рода геометрических исследований.

Следовательно, под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин" [22, с. 34–35]. Анри Пуанкаре, который выделил топологические структуры, разработал язык для их описания и, собственно, создал топологию как самостоятельную науку, в своих работах (1895, 1899–1904) использовал оба термина "топология" и "analyais situs", остановился в итоге на термине "топология" (H. Poincar´e, *Papers on Topology. Analysis Situs and its Five Supplements.* Translated and with an introduction by John Stillwell. History of Mathematics, 37. American Mathematical Society, Providence, RI;London Mathematical Society, London, 2010).

Эйлер решал разнообразные комбинаторные задачи: задачи на шахматной доске [23], задачи на разбиение чисел, исследовал пятиугольные числа, получил соотношение для числа вершин, сторон и граней многогранника.

Магические и латинские квадраты

У Эйлера есть одна работа, посвященная магическим квадратам (1781), и одна работа, посвященная латинским квадратам (1779) – задача о 36 офицерах.

Таблица размера $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n, называется *магическим квадратом*, если суммы чисел во всех ее строках, во всех столбцах и в двух диагоналях одинаковы.

Таблица размера $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n, называется *латинским квадратом*, если в каждой строке и в каждом столбце находится перестановка чисел от 1 до n. В качестве элементов квадрата Эйлер использовал буквы латинского алфавита, поэтому квадраты стали называть латинскими. Латинские квадраты существуют для любого n.

Впервые латинские квадраты 4-го порядка были рассмотрены в книге *"Шамс аль Маариф"* ("Книга о Солнце Гнозиса"), написанной Ахмадом аль-Буни в Египте приблизительно в 1200 г. Но определяющей вехой в истории исследований латинских квадратов стала работа Леонарда Эйлера "Исследование, посвященное новым видам магических квадратов" (1782) [24], написанная им в последние годы жизни.

Свой мемуар Эйлер представил Петербургской академии наук 8 марта 1779 г. Мемуар начинался словами: "Весьма любопытный вопрос, который привлекал в течение некоторого времени внимание лучших умов мира, заставил меня выполнить исследования, которые, кажется, открыли новое направление в анализе, в частности, в комбинаторике. Этот вопрос касается 36 офицеров, 6 различных званий, взятых из шести разных полков, которых выстраивают в каре таким образом, чтобы в каждом ряду как по горизонтали, так и по вертикали, находились шесть офицеров различных званий из различных полков. Однако после всех трудов, затраченных на решение этой задачи, я был вынужден признать, что такое решение абсолютно невозможно, хотя и не удалось дать строгого доказательство этому" [24, с. 291]. Впоследствии данная занимательная задача стала называться задачей Эйлера о 36 офицерах.

Эйлер обозначает шесть различных полков **латинскими** буквами, шесть различных офицерских званий **греческими** $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Тогда каждый офицер определяется двумя буквами: латинской и греческой, т. е. при помощи 36 упорядоченных пар или. греколатинским квадратом:

Для решения задачи нужно разместить эти пары букв в 36 ячейках квадрата так, чтобы выполнялись условия:

1. В каждой строке квадрата встречаются 6 латинских и 6 греческих букв.

2. В каждом столбце квадрата встречаются те же 12 букв.

3. В полный квадрат должны быть вписаны все пары букв, или, что равносильно:

$3'$. Никакая из 36 пар букв не должна повторяться.

Эйлер исследовал общую проблему n^2 офицеров, доказал существование решений для $n = 2, 3, 4, 5$.

1^1	2^5	3^4	4^3	5^2
2^2	3^1	4^5	5^4	1^3
3^3	4^2	5^1	1^5	2^4
4^4	5^3	1^2	2^1	3^5
5^5	1^4	2^3	3^2	4^1

Решение проблемы 36 офицеров для $n = 5$ [25, с. 109]

Эйлер доказал существование решений для чисел n, кратных 4. Для четных чисел, не кратных 4, задача не поддавалась решению. "У меня нет сомнений в том, что невозможно построить квадрат с 36 ячейками. То же верно и для $n = 10$, $n = 14$ и вообще для всех чисел, не кратных 4", – утверждал Эйлер.

Гипотезу: "*Ни для какого четного числа n, не делящегося на 4, не существует полного квадрата со стороной n*" – стали называть гипотезой Эйлера о 36 офицерах.

В завершение статьи Эйлер пишет: "На этом я заканчиваю свои исследования вопроса, который, хотя сам по себе *полезен мало,* приводит нас к довольно важным результатам комбинаторики и общей теории магических квадратов".

Несмотря на многочисленные попытки доказательства, гипотеза Эйлера оставалась открытой в течение 177 лет.

В 1901 г. французский математик Гастон Тарри доказал, что гипотеза Эйлера верна для квадратов порядка 6 [26]. Тарри со своим братом проделал огромную работу. Он составил каталог всех возможных вариантов построения латинского квадрата порядка 6, а затем показал, что никакие пары не образуют греко-латинский квадрат. Однако гипотеза в общем виде оставалась открытой. Дело в том, что с увеличением порядка квадрата объем работы по нахождению решения путем полного перебора возможных вариантов быстро растет. Так, уже для следующего числа $n = 10$ построение греко-латинского квадрата до 1959 г. было за пределами возможностей компьютеров.

В Калифорнийском университете математики из Лос-Анджелеса решали задачу прямым перебором на компьютере. Более 100 часов работы компьютера не принесли успеха в построении даже одного квадрата.

Таким образом, прямой перебор для доказательства гипотезы Эйлера оказался не применим.

Трое ученых: Е.Т. Паркер, Р.С. Боуз, С.С. Шрикхаде, начиная с 1958 г., разрабатывали методы решения этой задачи и, используя эти методы, в 1959 г. построили греко-латинский квадрат порядка 10 [27].

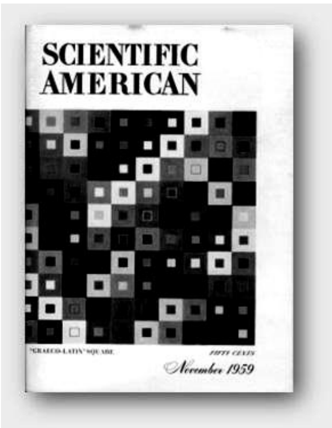
A PAIR OF 10 × 10 ORTHOGONAL SQUARES

00	67	58	49	91	83	75	12	24	36
76	11	07	68	59	92	84	23	35	40
85	70	22	17	08	69	93	34	46	51
94	86	71	33	27	18	09	45	50	62
19	95	80	72	44	37	28	56	61	03
38	29	96	81	73	55	47	60	02	14
57	48	39	90	82	74	66	01	13	25
21	32	43	54	65	06	10	77	88	99
42	53	64	05	16	20	31	89	97	78
63	04	15	26	30	41	52	98	79	87

Пара ортогональных латинских квадратов порядка 10 [27, p. 200]

Это была *настоящая математическая сенсация*. Они конструктивно доказали, что *гипотеза Эйлера ошибочна* для всех значений $n = 4k + 2$, где n больше 6. Результат Эйлера был верен только для $n = 6$. Математическая общественность отреагировала на эту сенсацию. На обложке журнала *Scientific American* за ноябрь 1959 г. расположена фотография картины художницы журнала Эми Казаи.

На картине изображен греко-латинский квадрат 10-го порядка. Десять цифр квадрата были заменены десятью различными красками, так что каждая ячейка окрашена соответствующей парой красок. Краски наружной области каждой ячейки образуют один латинский квадрат, краски внутренней области – другой. Каждый цвет появляется только один раз внутри ячейки и один раз снаружи. Оригинал картины госпожи Казаи был куплен Ремингтоном Рэндом и подарен Паркеру.



Греко-латинский квадрат порядка 10 в цвете [28]

В Перми, практически в то же время, вручную был построен греко-латинский квадрат 10-го порядка, неизоморфный квадрату Паркера–Шрикханде–Боуза. Выполнил эту работу Лямзин Александр Иванович. Он использовал квадраты более низких квадратов. Исследование А.И. Лямзина, содержащее практически новый метод построения греко-латинских квадратов, не было оценено по достоинству. Александр Иванович сдал свою работу в печать в год публикации статьи Паркера–Шрикханде–Боуза. Однако публикация появилась только через два года в 1963 г. в журнале "Успехи математических наук" [29].

00	12	23	34	45	56	67	78	89	91
11	05	58	83	32	27	79	96	64	40
22	50	06	69	94	43	38	81	17	75
33	86	60	07	71	15	54	49	92	28
44	39	97	70	08	82	26	65	51	13
55	24	41	18	80	09	93	37	76	62
66	73	35	52	29	90	01	14	48	87
77	98	84	46	63	31	10	02	25	59
88	61	19	95	57	74	42	20	03	36
99	47	72	21	16	68	85	53	30	04

Пара ортогональных латинских квадратов порядка 10 А.И. Лямзина [29, с. 173]

Заметим, что греко-латинский квадрат можно назвать парой ортогональных латинских квадратов. В последующие 1960-е гг. возможности компьютеров были таковы, что удалось построить для заданного латинского квадрата порядка 10 все пары ортогональных ему квадратов в течение 28–45 минут машинного времени. Паркер писал: "Таким образом, Эйлер ошибался в сильной степени, и полученные ранее факты свидетельствуют только о том, что это исследование требует большого объема вычислений".

Однако до сих пор не найдено ни одной **тройки** взаимно ортогональных латинских квадратов 10-го порядка.

Латинские квадраты существуют для любого порядка n, наибольшее возможное число взаимно ортогональных латинских квадратов равно $n - 1$. Набор $n - 1$ таких квадратов известен как "полный набор". Этот вопрос приобретает дополнительный интерес в связи с возможностью построения "конечной проективной плоскости". Доказано, что если существует полный набор взаимно-ортогональных латинских квадратов для данного порядка n, то это дает возможность построить конечную проективную плоскость n-го порядка. И наоборот, если известна конечная проективная плоскость для порядка n, можно построить полный набор взаимно-ортогональных латинских квадратов n-го порядка. Поскольку Тарри доказал невозможность существования даже двух ортогональных латинских квадрата 6-го порядка, то невозможны и конечные проективные плоскости 6-го порядка. Полные наборы и конечные проективные плоскости существуют для порядков 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Не было ни доказано, ни опровергнуто существования конечных проективных плоскостей 10-го порядка. Построение полного набора девяти латинских квадратов порядка 10 доказало бы существование проективной плоскости порядка 10.

Что касается утверждения Эйлера о бесполезности построения греко-латинских квадратов, то оно также оказалось ошибочным. Сэр Рональд Фишер (sir Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962), профессор генетики Калифорнийского университета и один из ведущих мировых статистиков и биологов своего времени, был первым, кто еще в начале 1920-х гг. показал, как использовать латинские квадраты в аграрных исследованиях. Предположим, что необходимо испытать при минимальных затратах времени и средств влияние на рост пшеницы семи сельскохозяйственных химикатов. Одной из существенных трудностей при испытаниях такого рода является то, что плодородие различных участков почвы обычно зависит от случайных факторов. Каким образом можно спланировать эксперимент, который позволит испытать одновременно все семь химикатов и в то же самое время ограничить любые посторонние влияния, обусловленные случайными факторами? Р. Фишер отвечает на этот вопрос так: "Разделите пшеничное поле на делянки, которые будут представлять ячейки квадрата со стороной в семь ячеек, затем примените семь "обработок" по модели случайно выбранного латинского квадрата.

При необходимости исследования влияния большего количества факторов можно использовать наложение дополнительных латинских квадратов" [30].

В работах Фишера и его сотрудников по планированию эксперимента не только использовались готовые комбинаторные инструменты, но и создавались новые. Именно в их работах 1935–1940 гг. появился термин *block design* [31], который на русский язык перевели как *блок-схема.* Блок-схемы явились новым видом комбинаторных конфигураций, которые активно исследовались в конце XIX–XX в.

Научные школы комбинаторного анализа

С конца XVIII в. до конца первой четверти XIX в. около десятка людей объединили свои усилия в области исследований комбинаторных задач, впоследствии их назвали школой Гинденбурга. Карл Фридрих Гинденбург (1741–1808) был в числе основателей первых математических журналов в Германии в 1786, 1789, 1794–1800 гг., и автором статей в них. Он задался целью создать универсальный язык для математических наук. И этот язык – язык комбинаторики. По его замыслу, комбинаторные операции будут иметь такое же применение, как операции арифметики, алгебры и анализа. Его исследования были сосредоточены вокруг полиномиальной теоремы. Особенно серьезного влияния на развитие комбинаторики школа не оказала. Символика, которую настойчиво развивали участники этой школы, была громоздкой и не прижилась. Но некоторые положительные последствия этой школы все-таки были. Так К. Гудерман, известный как учитель К. Вейерштрасса, работал над разложением функций в степенной ряд и признавал, что основное влияние на эту работу оказал комбинаторный анализ Гиндербурга.

Исследованию комбинаторных достижений гинденбургской школы посвящена кандидатская диссертация О.Д. Угольниковой "Формирование и развитие комбинаторного анализа в XVIII веке" [32].

Во второй половине XX в. в Пермском государственном педагогическом институте возникла одна из первых в Советском Союзе школ комбинаторного анализа. Возглавил ее Евгений Григорьевич Гонин (1910–1983), который в 1954 г. стал заведующим кафедрой алгебры и геометрии и одновременно руководителем аспирантуры при кафедре.

Исследования Е.Г. Гонина и его учеников относились к конечным комбинаторно-геометрическим структурам.

Е.Г. Гонин,
1810–1983 [33. с. 108]

В известных проективных плоскостях порядка 9: дезарговой плоскости, плоскости Хьюза, плоскости трансляций, плоскости сдвигов изучалась структура подплоскостей, группы коллинеаций, *k*-дуги, овалы, описание плоскостей латинскими квадратами и др. Пятнадцать учеников Е.Г. Гонина защитили кандидатские диссертации.

А.Е. Малых,
1839–2019 [34, с. 62]

Алла Ефимовна Малых (1939–2019) – самая успешная ученица Е.Г. Гонина, защитила докторскую диссертацию "Комбинаторный анализ в его историческом развитии" (1992). Алла Ефимовна с 1995 г. руководила аспирантурой по специальности "Теория и методика обучения и воспитания", с 1996 г. руководила также аспирантурой по специальности "История науки и техники". Семь аспирантов Аллы Ефимовны защитили кандидатские диссертации.

К.А. Рыбников,
1913–2004 [35, с. 93]

Константин Алексеевич Рыбников, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, создал школу комбинаторного анализа на механико-математическом факультете МГУ.

С 1969 г. он стал активно заниматься комбинаторным анализом: читал учебные курсы, организовал учебные и научные семинары по комбинаторному анализу, в 1972 г. издал учебник "Введение в комбинаторный анализ", организовал научно-исследовательский семинар по комбинаторному анализу, в течение 1971–1989 гг. выпустил 8 номеров трудов семинара. Более 10 учеников Константина Алексеевича защитили диссертации по комбинаторному анализу и его истории.

Заключение

Таким образом, в статье обозначены ключевые фигуры, повлиявшие на становление и развитие комбинаторного анализа в период с XVII в. до XX в. Благодаря усилиям этих исследователей комбинаторика не только выделилась в самостоятельную ветвь математики, но расширила свой предмет исследования, обрела мощь, нашла многочисленные приложения, к середине XX столетия накопила потенциал такого уровня, который обеспечил потребности вычислительной техники и развитие дискретной математики.

Список литературы

1. *Netto E.* Lehrbuch der Combinatorik - Leipzig: Verlag von B.G. Teubner. 1901. 260 s.
2. *Knobloch E.* Die Kunst, Leibniz herauszugeben // Spektrum der Wissenschaft. 2011. no. 9. S. 48–57.
3. *Leibniz G.W.* Philosophische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Hrsg. von C.E. Gerhardt, VI Band, Berlin (Weidmann). 1875–1890.
4. *Leibniz G.W.* Disputatio Arithmetica de complexionibus, quam in illustri Academia Lipsiensi indultu amplissimae Facultatis Philosophicae pro loco in ea obtinendo prima vice habebit M. Gottfredus Guilielmus Leibnüzius, Lipsiensis. I.U. Baccat. d. 7. Martii Anno 1666. H.L.Q.C.
5. *Арифметическое* исследование комплексий, осуществленное в знаменитой Лейпцигской Академии с разрешения прославленного философского факультета в соискание должности М. Готфридом Вильгельмом Лейбницем / пер. с лат. и комм. Н.А. Осминской // Вопросы философии. 2011. № 2.
6. *Лейбниц Г.В.* Сочинения: в 4 т. М.: Изд-во "Мысль". 1982. Т.1.
7. *Лейбниц Г.В.* Сочинения: в 4 т. М.: Изд-во "Мысль". 1984. Т. 3.
8. *The history* of Cottfried Leibniz // History Computer Staff. 2021.
9. *Euler L.* Observationes analyticae variae de combinationibus // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 13. 1751. P. 64–93.
10. *Stirling J.* Methodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum. London, 1730.
11. *Stern M.* Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen // Journal für die reine und angewandte mathematic. Vol. 1. 1840. S. 91–97.
12. *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Auf Grund fast ausschließlich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert. Wiesbaden. 1973. 277 s. (Studia Leibnitiana Supplementa. Bd. 11).
13. *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschriften herausgegeben. Wiesbaden 1976. 339 s.
14. *Knobloch E.* Der Beginn der Determinantentheorie: Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkul. Textband. 1980. 332 S. (Arbor Scientiarum Beiträge zur Wissenschaftgeschichte. Series B: Texts 2). Hildesheim: Gerstenberg, 1980.
15. *Knobloch E.* The mathematical studies of G.W. Leibniz on combinatorics // Historia Mathematica. № 1. 1974. C. 409–430.
16. *Sylvester J.J.* Note on the historical origin of the unsymmetrical Six-valued Function of six Letters // Philosophical magazine. Ser. 4. 1861. Vol. 21. P. 264–271.
17. *Cayley A.* On the notion and boudaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. 1864. Vol. 6. P. 382–384.
18. *Leibniz G.W.* Mathematische Schriften (1). Bd 2. Berlin. 1850.
19. *Фляйшнер Г.* Эйлеровы графы и смежные вопросы. М.: Мир, 2002. 335 с.
20. *Euler E.* Solutio problematis ad geometriarn situs pertinentis // Commentarii Academiae

Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1736. Vol. 8. С. 128–140.
21. *Hierholzer C.* Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren // Mathematische Annalen. 1873. Bd. 6. S. 30–32.
22. *Листинг И.Б.* Предварительные исследования по топологии / пер. с нем. М.: ГТТИ, 1932.
23. *Euler L.* Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise ò aucune analyse // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. 1766 (1759). 15. P. 310–337.
24. *Euler E.* Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques // Opera Omnia.Series 1, Vol. 7. P. 291–392.
25. *Малых А.Е.* О создании Эйлером комбинаторной теории латинских квадратов // Историко-математические исследования. 1983. Вып. 27. С. 102–123.
26. *Tarry G.* Le Problbme de 36 Officiers // Comptes Rendu de l'Association Franqaise pour l'-Avancement de Science Naturel. 1900. Vol. 1. P. 122–123 (1900); 1901. Vol. 2. P. 170–203.
27. *Bose R.C., Shrikhande S.S., Parker E.T.* Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture // Canadian journal of Mathematics. 1960. Vol. 12. P. 189–203.
28. https://www.scientificamerican.com/magazine/sa/. /11-01/ обложка журнала "Scientific American" за ноябрь 1959 г.
29. *Лямзин А.И.* Пример пары ортогональных латинских квадратов десятого порядка // Успехи математических наук. 1963. Т. 18, вып. 5 (113). С. 173–174.
30. *Fisher R.A.* Statistical methods for research workers. Oliver & Boyd. Edinburgh; London, 1925.
31. *Fisher R.A.*The design on experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd. 3 ed. 1942. 236 p.
32. *Угольникова О.Д.* Формирование и развитие комбинаторного анализа в XVIII веке: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 07.00.10. М., 2004. 151 с.
33. *Малых А.Е., Данилова В.И.* О научной школе Е.Г. Гонина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 3(3). С. 108–116.
34. *Яковлев В.И., Малых А.Е.* Исследования по истории физико-математических наук в Перми // Вестник Пермского научного центра. 2009. Вып.4. С. 52–74.
35. *Малых А.Е., Данилова В.И.* О жизни и научной деятельности Константина Алексеевича Рыбникова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3(21). С. 93–104.

References

1. *Netto E.* Lehrbuch der Combinatorik - Leipzig: Verlag von B.G. Teubner. 1901. 260 s.
2. *Knobloch E.* Die Kunst, Leibniz herauszugeben // Spektrum der Wissenschaft. 2011. no. 9. S. 48–57.
3. *Leibniz G.W.* Philosophische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Hrsg. von C.E. Gerhardt, VI Band, Berlin (Weidmann). 1875–1890.
4. *Leibniz G.W.* Disputatio Arithmetica de complexionibus, quam in illustri Academia Lipsiensi indultu amplissimae Facultatis Philosophicae pro loco in ea obtinendo prima vice habebit M. Gottfredus Guilielmus Leibnüzius, Lipsiensis. I.U. Baccat. d. 7. Martii Anno 1666. H.L.Q.C.
5. *Arifmeticheskoe* issledovanie kompleksij, osushchestvlennoe v znamenitoj Lejpcigskoj Akademii s razresheniya proslavlennogo filosofskogo fakul'teta v soiskanie dolzhnosti M. Gotfridom Vil'gel'mom Lejbnicem / Per. s lat. i komm. N.A. Osminskoj) // Voprosy filosofii. 2011. № 2.
6. *Lejbnic G.V.* Sochineniya / v 4 t. M.: Izd-vo "Mysl'". 1982. T. 1.
7. *Lejbnic G.V.* Sochineniya / v 4 t. M.: Izd-vo "Mysl'". 1984. T. 3.
8. *The history* of Cottfried Leibniz // History Computer Staff. 2021.
9. *Euler L.* Observationes analyticae variae de combinationibus // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 13. 1751. P. 64–93.
10. *Stirling J.* Methodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum. London. 1730.
11. *Stern M.* Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen // Journal für die reine und angewandte mathematic. 1840. Vol. 1. S. 91–97.
12. *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Auf Grund fast ausschließlich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert. Wiesbaden. 1973. 277 S. (Studia Leibnitiana Supplementa. Bd. 11).

13. *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschriften herausgegeben. Wiesbaden. 1976. 339 s.
14. *Knobloch E.* Der Beginn der Determinantentheorie: Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkul. Textband. 1980. 332 s. (Arbor Scientiarum Beiträge zur Wissenschaftgeschichte. Series B: Texts 2). Hildesheim: Gerstenberg, 1980.
15. *Knobloch E.* The mathematical studies of G.W. Leibniz on combinatorics // Historia Mathematica. № 1. 1974. C. 409–430.
16. *Sylvester J.J.* Note on the historical origin of the unsymmetrical Six-valued Function of six Letters // Philosophical magazine. Ser. 4. 1861. Vol. 21. P. 264–271.
17. *Cayley A.* On the notion and boudaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. 1864. Vol. 6. P. 382–384.
18. *Leibniz G.W.* Mathematische Schriften (1). Bd 2. Berlin. 1850.
19. *Flyayshner G.* Eulerovi grafi i smezhnii voprosi. M.: Mir, 2002. 335 p.
20. *Euler E.* Solutio problematis ad geometriarn situs pertinentis // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1736. Vol. 8. C.128–140.
21. *Hierholzer C.* Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren // Mathematische Annalen. 1873. Bd. 6. S. 30–32.
22. *Listing I.B.* Predvaritel'nye issledovaniya po topologii /perev s nem. M.: GTTI, 1932.
23. *Euler L.* Solution d’une question curieuse que ne paroit soumise ò aucune analyse // Mémoires de l’académie des sciences de Berlin. 1766 (1759). Vol. 15. P. 310–337.
24. *Euler E.* Recherches sur une nouvelle espce de quarrs magiques // Opera Omnia.Series 1. Vol. 7. P. 291–392.
25. *Malyh A.E.* O sozdanii Ejlerom kombinatornoj teorii latinskih kvadratov // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 1983. Vyp. 27. S. 102–123.
26. *Tarry G.* Le Problbme de 36 Officiers // Comptes Rendu de l'Association Franqaise pour l'-Avancement de Science Naturel. 1900. Vol. 1. P. 122–123 (1900); 1901. Vol. 2 P. 170–203.
27. *Bose R.C., Shrikhande S.S., Parker E.T.* Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture // Canadian journal of Mathematics. 1960. Vol. 12. P. 189–203.
28. https://www.scientificamerican.com/magazine/sa/. /11-01/ oblozhka zhurnala "Scientific American". Noyabr. 1959.
29. *Lyamzin A.I.* Primer pary ortogonal'nyh latinskih kvadratov desyatogo poryadka // Uspekhi matematiechskih nauk. 1963. T. 18, vyp. 5(113). S. 173–174.
30. *Fisher R.A.* Statistical methods for research workers. Oliver & Boyd. Edinburgh, London, 1925.
31. *Fisher R.A.* The design on experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd. 3 ed. 1942. 236 p.
32. *Ugol'nikova O.D.* Formirovanie i razvitie kombinatornogo analiza v XVIII veke: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 07.00.10. M., 2004. 151 s.
33. *Malyh A.E., Danilova V.I.* O nauchnoj shkole E.G. Gonina // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2010. Vyp. 3(3). S. 108–116.
34. *YAkovlev V.I., Malyh A.E.* Issledovaniya po istorii fiziko-matematicheskih nauk v Permi // Vestnik Permskogo nauchnogo centra. 2009. Vyp. 4. S. 52–74.
35. *Malyh A.E., Danilova V.I.* O zhizni i nauchnoj deyatel'nosti Knstantina Alekseevicha Rybnikova // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2013. Vyp. 3(21). S. 93–104.

Просьба ссылаться на эту статью:

Алябьева В.Г. Из истории комбинаторного анализа: от идеи до научных школ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып 2(57). С. 14–25. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-14-25.

Please cite this article as:

Alyabieva V.G. From the History of Combinatorial Analysis: From Idea to Research Schools // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 14–25. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-14-25.