УДК 517.982.22

Множества в пополнении нормированных пространств

Е. Ю. Еленская[1], **Ю. Н. Еленский**[2]
[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: elenliza@yandex.ru; **AuthorID: 537859**
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: elenliza@yandex.ru; **AuthorID: 537860**

Исследуется строение замыкания множества в пополнении нормированного пространства. Изложен и доказан критерий точки прикосновения множества.

Ключевые слова: *нормированное пространство; пополнение множества; замыкание множества; точка прикосновения.*

Поступила в редакцию 30.04.2022, принята к опубликованию 17.05.2022

Sets in the Normalized Spaces Completion

E. U. Elenskaya[1]**, U. N. Elenskiy**[2]
[1]Perm State University; Perm, Russia
e-mail: elenliza@yandex.ru; **AuthorID: 537859**
[2]Perm State University; Perm, Russia
e-mail: elenliza@yandex.ru; **AuthorID: 537860**

The article investigates the set closure in the normalized space completion. The adherent point of a set criterion is given and proved.

Keywords: *normalized space; completion of a set; closure of a set; adherent point.*

Received 30.04.2022, accepted 17.05.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-26-30

Введение

При исследовании задач, связанных с нормированными пространствами, часто существенную роль играет полнота пространства. Но иногда выбор удобной нормы в заданном линейном пространстве приводит к неполному нормированному пространству, что не всегда приемлемо. Обычно в таких случаях приходится подбирать другую норму.

Но есть другой путь преодоления описанных неудобств. Неполное пространство можно пополнить. Метод пополнения метрического пространства описан в литературе по функциональному анализу и топологии, например в работах [1–6]; теория метрических пространств также изложена в работе [7].

В книге [2] изложен и метод пополнения нормированного пространства.

Напомним основные понятия, связанные с таким пополнением, и метод пополнения.

1. Пополнение нормированного пространства

Пусть X − метрическое пространство. Дадим определение пополнения метрического пространства.

Определение. Пополнением метрического пространства X называется такое полное метрическое пространство $\widetilde{X}$, что

1) X − метрическое подпространство пространства $\widetilde{X}$;

2) X всюду плотно в $\widetilde{X}$, т.е. $\overline{X} = \widetilde{X}$ ($\overline{X}$ – замыкание множества X в пространстве $\widetilde{X}$).

Заметим, что такое определение пополнения метрического пространства дается, например, в работе [1].

Опишем кратко метод пополнения метрического пространства.

Обозначим символом d метрику пространства X. Элементы пополнения определяются при помощи фундаментальных последовательностей. Две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в X называются эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Тогда множество всех фундаментальных последовательностей разбивается на классы эквивалентных последовательностей. Элемент пополнения определяется как класс эквивалентности фундаментальных последовательностей.

Если элемент x принадлежит пространству X, то он отождествляется с любой последовательностью, сходящейся к x. Одной из таких последовательностей может быть стационарная последовательность $\{x, x, x, \ldots\}$.

Таким образом, все элементы пополнения $\widetilde{X}$ можно считать классами эквивалентности фундаментальных последовательностей. А при операциях над элементами пополнения используются любые представители соответствующих классов.

В дальнейшем если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность из класса эквивалентности элемента $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, то это будем иногда обозначать так: $\widetilde{x} = \{x_n\}$.

Пусть теперь X – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Так как каждое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$, то существует его пополнение по описанной выше схеме. Такое пополнение будет метрическим пространством. А то, что оно будет и нормированным, требует доказательства. Это изложено, например, в работе [2] (с. 125).

При этом алгебраические операции определяются следующим образом: если $\widetilde{x} = \{x_n\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\}$, λ – число, то

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \{x_n + y_n\}, \quad \lambda\widetilde{x} = \{\lambda x_n\}.$$

Норму в пополнении $\widetilde{X}$ будем обозначать символом $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$. Норма элемента $\widetilde{x} = \{x_n\}$, где $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность элементов пространства X из класса эквивалентности элемента $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, которая определяется равенством

$$\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Такой предел существует, что следует из фундаментальности $\{x_n\}$ и критерия Коши для числовых последовательностей.

2. Замыкание множеств в пополнении нормированного пространства

Пусть X – неполное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\widetilde{X}$ – его пополнение. Норму в $\widetilde{X}$ будем обозначать символом $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$. Докажем вспомогательные утверждения, полезные для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Любая подпоследовательность фундаментальной последовательности фундаментальна.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальная последовательность, $\{x_{n_k}\}$ – любая ее подпоследовательность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное N, что для любых натуральных $m, j > N$ выполняется неравенство

$$\|x_m - x_j\| < \varepsilon.$$

Очевидно, $n_m \geq m > N, \quad n_j \geq j > N$,

поэтому $\|x_{n_m} - x_{n_j}\| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любых натуральных $m, j > N$ выполняется неравенство

$$\|x_{n_m} - x_{n_j}\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна.

Лемма доказана.

Лемма 2. Любая подпоследовательность фундаментальной последовательности эквивалентна этой последовательности.

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ – произвольная подпоследовательность фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset X$. По лемме 1 $\{x_{n_k}\}$ тоже фундаментальна. Покажем, что $\{x_n\}$ и $\{x_{n_k}\}$ эквивалентны.

Для доказательства эквивалентности надо оценить норму разности элементов этих последовательностей с одинаковыми номерами.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное *N*, что для любых натуральных $m, k > N$ выполняется неравенство

$$\|x_k - x_m\| < \varepsilon .$$

Пусть $k > N$. Очевидно, $n_k \ge k > N$, поэтому $\|x_k - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\|x_k - x_{n_k}\| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

а это означает, что $\{x_k\}$ и $\{x_{n_k}\}$ эквивалентны. *Лемма доказана.*

Лемма 3. Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$, то последовательность $\{y_n\}$ тоже фундаментальна.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное N_1, что для любого натурального $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\|x_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует существование такого натурального N_2 , что для любого натурального $n > N_2$ выполняется неравенство

$$\|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим, $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Пусть $m, n > N$. Тогда

$$\|y_m - y_n\| \le \|y_m - x_m\| + \|x_m - x_n\| + $$
$$+ \|x_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное *N*, что для любых натуральных $m, n > N$ выполняется неравенство

$$\|y_m - y_n\| < \varepsilon .$$

Отсюда следует, что $\{y_n\}$ фундаментальна. *Лемма доказана.*

Установим теперь связь между точками пространства *X* и точками его пополнения $\widetilde{X}$. Напомним, что $\|\cdot\|$ − норма в пространстве *X*, $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ − норма в его пополнении.

Так как $\widetilde{X}$ − замыкание пространства X , или, что то же, X всюду плотно в $\widetilde{X}$ ([1], гл. 2, § 3, п. 4, доказательство теоремы 3, с. 72), то любая точка, принадлежащая $\widetilde{X}$, есть точка прикосновения пространства X в $\widetilde{X}$. Поэтому такую точку можно представить в виде предела последовательности точек из X в пространстве $\widetilde{X}$.

Но при использовании этого факта надо учитывать строение нормы в пополнении $\widetilde{X}$. При формулировке такого предела приходится элементы из X представлять в виде, характерном для элементов пространства $\widetilde{X}$, т.е. в виде фундаментальных последовательностей, в частности, если это удобно, в виде стационарных. Это видно в формулировке и доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть X − неполное нормированное пространство, $\widetilde{X}$ − его пополнение.

Для того чтобы последовательность $\{x_k\} \subset X$ принадлежала классу эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\tilde{x}_n\} \subset X$, где $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$, сходилась в $\widetilde{X}$ к элементу $\tilde{x}$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\{x_n\} \subset X$ − фундаментальная последовательность из класса эквивалентности элемента $\tilde{x}$. Надо доказать, что $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ в $\widetilde{X}$, где $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$, x_n − элементы заданной последовательности $\{x_n\}$.

Оценим

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\widetilde{X}} = \lim_{k\to\infty}\|x_n - x_k\|.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\{x_n\}$ − фундаментальная последовательность, то найдется такое N >0, что для любых $k, n > N$ выполняется неравенство

$$\|x_n - x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При фиксированных n из этого неравенства при $n > N$ получается такое неравенство:

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\widetilde{X}} = \lim_{k\to\infty}\|x_n - x_k\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Мы взяли произвольное $\varepsilon > 0$.

В результате получилось следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что для любых $n > N$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\tilde{X}} < \varepsilon.$$

Поэтому $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\{x_n\} \subset X$ и $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$, где $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$. Надо доказать, что $\{x_n\}$ принадлежит классу эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x}$.

По условию $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\tilde{X}} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $\{z_n\} \subset X$ − одна из фундаментальных последовательностей класса эквивалентности элемента $\tilde{x}$. Тогда по утверждению необходимости этой теоремы $\tilde{z}_n \to \tilde{x}$, где $\tilde{z}_n = \{z_n, z_n, z_n, \ldots\}$, т.е. $\|\tilde{z}_n - \tilde{x}\|_{\tilde{X}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{z}_n\|_{\tilde{X}} \le$$
$$\le \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\tilde{X}} + \|\tilde{x} - \tilde{z}_n\|_{\tilde{X}} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Так как $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$, $\tilde{z}_n = \{z_n, z_n, z_n, \ldots\}$,

то $\|x_n - z_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда по лемме 3 следует, что $\{x_n\}$ − фундаментальная последовательность; кроме того, она эквивалентна последовательности $\{z_n\}$, так как $\|x_n - z_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. А последовательность $\{z_n\}$ принадлежит классу эквивалентности элемента $\tilde{x}$, поэтому $\{x_n\}$ принадлежит этому же классу.

Теорема доказана.

Исследуем теперь строение замыкания множества в пополнении нормированного пространства.

Будем рассматривать случай замыкания $\overline{M}$ множества $M \in X$ в пополнении $\tilde{X}$. Выясним, из каких элементов состоит такое замыкание.

Теорема 2. Для того чтобы элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ был точкой прикосновения множества $M \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы в классе эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x} \in \tilde{X}$ была хотя бы одна фундаментальная последовательность, состоящая только из элементов множества M.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$ − точка прикосновения множества $M \subset X$. Покажем, что существует фундаментальная последовательность, принадлежащая классу эквивалентности элемента $\tilde{x}$, состоящая из элементов этого множества. Построим такую последовательность.

Так как $\tilde{x}$ − точка прикосновения множества $M \subset X$, то найдется такая последовательность $\{\tilde{x}_n\} \subset M$, которая сходится к $\tilde{x}$.

Здесь имеется в виду сходимость в $\tilde{X}$, поэтому точки $\tilde{x}_n$ надо представить в виде фундаментальных последовательностей. Наиболее удобными здесь будут стационарные последовательности $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$.

Итак, $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$. По теореме 1 последовательность $\{x_n\}$ принадлежит классу эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x}$. При этом все $x_n \in M$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует последовательность $\{x_n\}$ из класса эквивалентности элемента $\tilde{x}$, состоящая только из точек множества M. Положим $\tilde{x}_n = \{x_n, x_n, x_n, \ldots\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ Из теоремы 1 следует, что $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$. Так как все $\tilde{x}_n \in M$, то $\tilde{x}$ − точка прикосновения множества M.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для того чтобы элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ был точкой прикосновения множества $M \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы в классе эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x} \in \tilde{X}$ была хотя бы одна фундаментальная последовательность, содержащая бесконечное множество элементов из множества M.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$ − точка прикосновения множества $M \subset X$. По теореме 2 в классе эквивалентности элемента $\tilde{x}$, есть фундаментальная последовательность, состоящая только из элементов этого множества. Тогда, очевидно, бесконечное число членов этой последовательности содержится в множестве M.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в классе эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x} \in \tilde{X}$ есть последовательность, содержащая бесконечное число элементов множества M . Рассмотрим ее подпоследовательность, состоящую из элементов множества M .

По лемме 1 эта подпоследовательность тоже фундаментальна. А по лемме 2 эта подпоследовательность эквивалентна исходной последовательности, поэтому она принадлежит классу эквивалентности фундаментальных последовательностей элемента $\tilde{x}$. А так как она состоит только из элементов множества M , то по теореме 2 элемент $\tilde{x}$ − точка прикосновения множества M . *Теорема доказана.*

Рассмотрим примеры. Неполными пространствами являются, например, пространства $C_1[a,b]$ и $C_2[a,b]$, где $C_1[a,b]$ − пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, норма в котором определяется равенством

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)dt| ,$$

а $C_2[a,b]$ − пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, норма в котором определяется равенством

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2} .$$

В книге [1] А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина показано, что пространство $C_2[a,b]$ неполно. Тем же способом легко доказывается, что пространство $C_1[a,b]$ тоже неполно.

Заключение

В статье описывается процесс замыкания множества в пополнении нормированного пространства. Сформулирован и доказан критерий точки прикосновения.

Результаты статьи могут быть полезными при исследовании операторных уравнений в нормированных пространствах.

Список литературы

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2019. 576 с.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 816 с.
3. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 694 с.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2022. 272 с.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Просвещение-Дрофа, 2001. 384 с.
7. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005. 296 с.

References

1. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Fizmatlit, 2019. 576 p.
2. *Kantorovich L.V., Akilov G.P.* Functional analysis. SPb.: BHV-Peterburg, 2004. 816 p.
3. *Kuratovskiy K.* Topology. Vol. 1. M.: Mir, 1966. 694 p.
4. *Lusternik L.A., Sobolev V.I.* Brief course of functional analysis. SPb.: Lan, 2022. 272 p.
5. *Lusternik L.A., Sobolev V.I.* Elements of functional analysis. M.: Nauka, 1965. 520 p.
6. *Sadovnichiy V.A.* Theory of operators. M.: Prosveschenie-Drofa, 2001. 384 p.
7. *Lebedev V.I.* Functional analysis and computational mathematics. M.: Fizmatlit, 2005. 296 p.

Просьба ссылаться на эту статью:

Еленская Е.Ю., Еленский Ю.Н. Множества в пополнении нормированных пространств // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 26–30. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-26-30.

Please cite this article as:

Elenskaya E.U., Elenskiy U.N. Sets in the Completion of the Normalized Space // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 26–30. DOI:1 0.17072/1993-0550-2022-2-26-30.