УДК 513

"Склеивание" трехмерного евклидова пространства с помощью циклической группы, порожденной осевой скользящей симметрией

Г. Г. Шеремет[1; a], З. И. Андреева[b]
[1] Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: [a] sheremet@pspu.ru; ORCID: 0000-0002-7454-8023, AuthorID: 1096081
e-mail: [b] varden2012@yandex.ru

Определено пространство E_3^4, получающееся "склеиванием" евклидова трехмерного пространства. При "склеивании" была использована равномерно-разрывная подгруппа группы движений евклидова пространства, которая является циклической группой, порожденной осевой скользящей симметрией пространства E_3. Определены основные объекты нового пространства и изучены их аффинные и некоторые метрические свойства.

Ключевые слова: *евклидово пространство; расстояние; движение; осевая симметрия; параллельный перенос; группа; структура группы; равномерно-разрывная группа; "склеивание"; плоскость; прямая; точка; расстояние; угол; перпендикулярность; параллельность.*

Поступила в редакцию 03.05.2022, принята к опубликованию 01.08.2022

Three-Dimensional Euclidean Space "Gluing" with Using a Cyclic Group Generated by an Axial Sliding Symmetry

G. G. Sheremet[1; a], Z. I. Andreeva[b]
[1] Perm State University; Perm, Russia
e-mail: [a] sheremet@pspu.ru; ORCID: 0000-0002-7454-8023, AuthorID: 1096081
e-mail: [b] varden2012@yandex.ru

The obtained with using Euclidean three-dimensional space "gluing" space E_3^4 is defined. An uniformly discontinuous subgroup of the Euclidean space motions group is used for "gluing". It is a cyclic group generated by an axial sliding symmetry of the space E_3. The new space main objects are determined and their affine and some metric properties are studied.

Keywords: *Euclidean space; distance; motion; axial symmetry parallel translation; group; group structure; uniformly discontinuous group; "gluing"; plane; line; point; distance; angle; perpendicularity; parallelism.*

Received 03.05.2022, accepted 01.08.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-11-17

Введение

Пространствами, развертывающимися пространство E_3, называют результат "склеивания" трехмерного евклидова пространства E_3 при помощи равномерно-разрывных подгрупп группы движений этого пространства. В статье [1] подробно описан алгоритм определения и изучения такого вида геометрических пространств.

Определение 1 **[2].** Подгруппа G движений евклидова пространства называется ***равномерно-разрывной***, если существует такое положительное действительное число d, что для любого $g \in G$ и любой точки $X \in E_3$ условие $|X\, g(X)| \geq d$ выполняется тогда и только тогда, когда $X \neq g(X)$.

В статье [3, теорема 7] показано, что существует точно девять типов равномерно-разрывных групп движений трехмерного евклидова пространства. Отсюда следует, что существует точно девять нетривиальных типов геометрических пространств, развертывающихся на трехмерное евклидово пространство.

В статьях [1, 3, 4] описаны пространства E_3^1, E_3^2, E_3^3, которые получаются "склеиванием" трехмерного евклидова пространства E_3 при помощи групп

$$G_1 = \{T_{\bar{a}}\},$$

$$G_2 = \{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\} \text{ и}$$

$$G_3 = \{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\} \otimes \{T_{\bar{c}}\}$$

соответственно. Здесь $T_{\bar{a}}$, $T_{\bar{b}}$ и $T_{\bar{c}}$ параллельные переносы на некомпланарные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Пусть F любая фигура в E_3.

Определение 2 **[1].** ***"Склеиванием" орбиты*** $\{G_k(F)\}$ называется результат отождествления всех элементов этой орбиты. При этом "склеиваются" орбиты всех точек фигуры F.

Результат "склеивания" орбиты $\{G_k(F)\}$ обозначим F^*, т. е. $F^*=\{G_k(F)\}$. Результаты "склеивания" орбит точек, прямых и плоскостей пространства E_3 будем называть новыми точками, прямыми и плоскостями соответственно.

Определение 3 **[1].** Пространством, полученным "склеиванием" пространства E_3 при помощи группы G_k, называется множество всех новых точек, прямых и плоскостей. Обозначим это пространство E_3^K.

1. "Склеивание" пространства E$_3$ при помощи группы G$_4$ = { $S_{l,\bar{a}}$ }

1.1. Определение пространства E$_3^4$

Пространством **E$_3^4$** называется результат "склеивания" пространства **E$_3$** при помощи циклической группы ***G$_4$***.

G$_4$ = { $S_{l,\bar{a}}$ }, где $S_{l,\bar{a}} = (S_l\ T_{\bar{a}})$, S_l – симметрия пространства E_3 относительно прямой l, $T_{\bar{a}}$ – параллельный перенос на ненулевой вектор $\bar{a}$, $\bar{a}\ ||\ l$.

Так как $(S_l \cdot T_{\bar{a}})\ (S_l \cdot T_{\bar{a}}) = T_{2\bar{a}}$, то группа G_4 состоит из всех движений вида $S_{l,(2к+1)}\bar{a}$ и $T_{2m\bar{a}}$, где m и k любые целые числа. Орбитой любой точки A является множество

$$\{S_{l,(2к+1)}\bar{a}\,(A),\ T_{2m\bar{a}}\,(A)\}.$$

Если точка A лежит на прямой l, то все точки ее орбиты лежат на этой прямой, расстояние между любыми двумя соседними точками орбиты равно $|\bar{a}|$.

Если точка A не лежит на прямой l, то все точки ее орбиты лежат на двух прямых (носителях орбиты), симметричных относительно l, расстояние между любыми двумя соседними точками орбиты, лежащими на одном носителе, равно $|2\bar{a}|$.

Пусть Π – евклидова плоскость, проходящая через прямую l. Плоскость Π разбивает все евклидово трехмерное пространство на два полупространства Ω_1 и Ω_2. С помощью группы ***G$_4$*** все пространство "склеивается" в одно (любое) полупространство (например, в Ω_1). При этом "сужение" группы ***G$_4$*** на плоскость Π является циклической группой **{** $S_{l,\bar{a}}$ **}**, действующей в группе движений плоскости Π, т.е. в группе движений евклидовой плоскости. Но с помощью этой группы евклидова плоскость "склеивается" в "скрученный" цилиндр, т. е. в плоскость Мебиуса [5, с. 19–21].

Пусть Π_0 – евклидова плоскость, проходящая через прямую l и перпендикулярная плоскости Π. Пусть $\Pi_к = S_{l,к\bar{a}}(\Pi_0)$, $p_k = \Pi \cap \Pi_к$ (рис. 1). Плоскость Π разбивает каждую плоскость $\Pi_к$ *на* две полуплоскости. Обозначим $\Pi_{к1}$ те полуплоскости, которые лежат в Ω_1, *и через* $\Pi_{к2}$ те, которые лежат в Ω_2. Плоскости $\Pi_к$ разбивают все евклидово пространство E_3 на слои. С помощью группы ***G$_4$*** пространство E_3 "склеивается" в слой, ограниченный плоскостями $П_0$ и $П_2$. В этом слое полуслой, ограниченный полуплоскостями $П_{02}$, $П_{12}$ и полосой с границами p_0, p_1, "склеивается" с полуслоем, ограниченным полуплоскостями $П_{11}$, $П_{21}$ и полосой с границами p_1, p_2. А полуслой, ограниченный полуплоскостями $П_{12}$, $П_{22}$ и полосой с границами p_1, p_2, "склеивается" с полуслоем, ограниченным полуплоскостями $П_{11}$, $П_{01}$ и полосой с границами p_1, p_0.

Следовательно, все пространство E_3 "склеивается" в бесконечный полуслой, ограниченный полуплоскостями $П_{01}$, $П_{21}$ и полосой с границами p_0, p_2. А полоса с границами p_0, p_2 "склеивается" в плоскость Мебиуса.

Кроме того, полуплоскости $П_{01}$ и $П_{21}$ "склеиваются" между собой. Таким образом, получили модель пространства E_3^4 (рис. 1). Обозначим эту модель $\boldsymbol{\Phi}$. В четырехмерном пространстве это будет бесконечный четырехмерный цилиндр, ограниченный плоскостью Мебиуса.

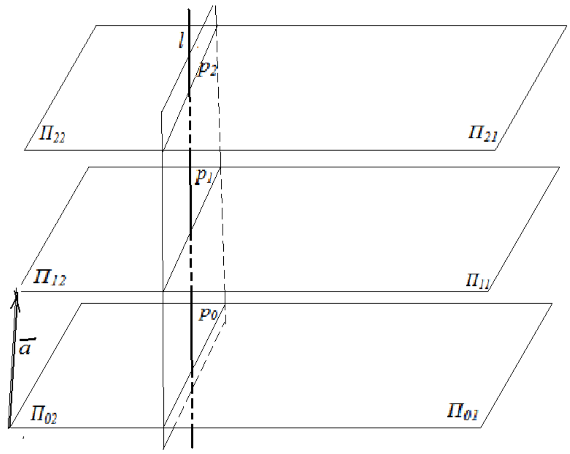

Рис. 1

1.2. Плоскости в пространстве $\mathbf{E_3^4}$

Пусть P^* – произвольная плоскость в пространстве E_3^4 и P та плоскость пространства E_3, орбита которой определяет P^*. Для плоскости P возможны следующие случаи.

1. $P \supset l$. Орбита плоскости P состоит из одной плоскости (самой плоскости P). Как было описано выше, эта плоскость "склеивается" в "скрученный" цилиндр (плоскость Мебиуса). Назовем эти плоскости в пространстве $\mathbf{E_3^4}$ ***плоскостями первого рода.***

2. $P \,||\, \bar{a}$, но $l \not\subset P$. Орбита P состоит из двух плоскостей, симметричных относительно прямой l. Эти плоскости "склеиваются" с одной (любой) из них, пусть с самой плоскостью P.

Если q – ортогональная проекция прямой l на плоскость P, то группа $\boldsymbol{G_4}$ индуцирует на плоскости P группу $\{S_{q,\overline{2a}}\}$.

Но с помощью такой группы плоскость P "склеивается" в плоскость Мебиуса. Плоскости пространства $\mathbf{E_3^4}$, полученные в этом случае, назовем ***плоскостями второго рода.***

3. $P \perp \bar{a}$ (следовательно, $P \perp П$). Орбита P состоит из всех плоскостей вида $P_к = S_{l,k\bar{a}}(P)$, $p_k = П \cap P_к$, параллельных P и таких, что расстояние между двумя соседними плоскостями равно $|\bar{a}|$. Плоскость $П$ разбивает каждую плоскость $P_к$ на две полуплоскости. В модель $\boldsymbol{\Phi}$ попадают две из них (P_{01} и P_{11}). Вся орбита плоскости P "склеивается" с этими полуплоскостями. При этом границы p_0 и p_1 "склеиваются" между собой. Результатом "склеивания" будут две полуплоскости со "склеенными" границами, лежащими в $\boldsymbol{П}$. Полученная фигура гомеоморфна евклидовой плоскости. Получили в пространстве $\mathbf{E_3^4}$ ***плоскости третьего рода.***

4. Плоскость P не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{a}$.

Если $P_к = \{S_{l,k\bar{a}}(P)\}$ орбита плоскости P, то плоскость $П$ разбивает каждую плоскость $P_к$ на две полуплоскости $P_{к1}$ и $P_{к2}$. Все они "склеиваются в две винтовые полуповерхности, границами которых являются две винтовые линии, которые "склеиваются" между собой. В результате получается поверхность, гомеоморфная винтовой поверхности. Получили в пространстве $\mathbf{E_3^4}$ ***плоскости четвертого рода.***

1.3. Прямые в пространстве $\mathbf{E_3^4}$

Пусть p^* – любая прямая пространства $\mathbf{E_3^4}$ и p – та прямая пространства E_3, орбита которой определяет прямую p^*. Для прямой p возможны следующие случаи.

1. Прямая p совпадает с l. Орбита этой прямой состоит из одной прямой – самой прямой l. Если на прямой l зафиксировать точку A, то орбита этой точки состоит из всех тех и только тех точек, которые лежат на прямой l и расстояние между двумя соседними из них равно$|\bar{a}|$. Следовательно, прямая l "склеивается" в окружность радиуса $\dfrac{|\bar{a}|}{2\pi}$.

Такая прямая в пространстве E_3^4 единственная. Назовем ее ***прямой первого рода.***

2. $p \mid\mid \bar{a}$, но $p \neq l$. Орбита этой прямой состоит из двух прямых, симметричных относительно прямой l. Эти прямые "склеиваются" в одну (любую) из них. Можно считать, что они "склеиваются" в ту прямую, которая лежит в полупространстве Ω. Эта прямая пересекает модель $\boldsymbol{\Phi}$ по отрезку длины $2|\bar{a}|$. Концы этого отрезка "склеиваются" и в результате получается окружность радиуса $\dfrac{|\bar{a}|}{\pi}$. Получили в пространстве $\mathbf{E_3^4}$ ***прямые второго рода.***

3. $p \perp \bar{a}$. Орбита этой прямой состоит из всех прямых параллельных p и таких, что расстояние между любыми двумя соседними прямыми равно $|\bar{a}|$. Все эти прямые "склеиваются" в одну (любую) из них, например, в ту прямую $p_к$, которая пересекает модель $\boldsymbol{\Phi}$. Если прямая $p_к$ не лежит в плоскости Π, то Π разбивает ее на две полупрямые. Одна из этих полупрямых лежит в модели $\boldsymbol{\Phi}$. Образ второй полупрямой при движении $S_{l,\bar{a}}$ тоже лежит в $\boldsymbol{\Phi}$. Начала этих полупрямых будут лежать в плоскости Π и будут "склеиваться" между собой. Итак, в этом случае результатом "склеивания" орбиты прямой p будут два луча со "склеенными" началами. Эта фигура гомеоморфна евклидовой прямой. Если прямая p лежит в плоскости Π, то ее орбита "склеивается" с самой этой прямой. Эти прямые тоже являются евклидовыми. Полученные в пространстве $\mathbf{E_3^4}$ прямые назовем ***прямыми третьего рода.***

4. Прямая p не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{a}$.

В результате "склеивания" орбиты этой прямой получается винтовая линия. Получили ***прямые четвертого рода.***

1.4. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве E_3^4

1. Все плоскости первого рода пересекаются по прямой первого рода.

2. Любая плоскость первого рода либо пересекает плоскость второго рода по прямой второго рода, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

3. Любые две плоскости второго рода либо пересекаются по прямой второго рода, либо не имеет ни одной общей точки.

4. Любая плоскость первого или второго рода пересекает плоскость третьего рода по прямой третьего рода.

5. Любые две различные плоскости третьего рода не имеют ни одной общей точки.

6. Любая плоскость первого, второго или третьего рода пересекает плоскость четвертого рода либо по прямой четвертого рода, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

7. Любые две различные плоскости четвертого рода либо не имеют ни одной общей точки, либо пересекаются по прямой третьего или четвертого рода.

8. Через любые две различные прямые второго рода проходит плоскость второго рода и только одна.

9. Через две прямые, из которых одна прямая первого рода, а вторая – второго рода, проходит плоскость второго рода и только одна.

10. Через любые две различные прямые третьего рода либо проходит плоскость третьего рода и только одна, либо не проходит ни одной плоскости.

11. Через любые две различные прямые четвертого рода либо проходит плоскость четвертого рода и только одна, либо не проходит ни одной плоскости.

1.5. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве E_3^4

Определение 4. Прямые p^* и q^* пространства E_3^4 называются ***параллельными*** ($p^* \mid\mid q^*$), если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки.

Определение 5. Плоскости P_1^* и P_2^* пространства E_3^4 называются ***параллельными***, если они либо совпадают, либо не имеют ни одной общей точки (обозначение $P_1^* \mid\mid P_2^*$).

Определение 6. Плоскость P^* и прямая p^* пространства E_3^4 называются ***параллельными***, если прямая p^* либо лежит в плоскости P^*, либо не имеет с ней ни одной общей точки (обозначение $p^* \mid\mid P^*$).

Свойства параллельных прямых и плоскостей

1. $p^* \mid\mid p^*$;
2. $p^* \mid\mid q^* \Rightarrow q^* \mid\mid p^*$;
3. $(p^* \mid\mid q^*, q^* \mid\mid r^*) \Rightarrow p^* \mid\mid r^*$;
4. $P^* \mid\mid P^*$;

5. $P_1^* \mid\mid P_2^* \Rightarrow P_2^* \mid\mid P_1^*$;

6. $(P_1^* \mid\mid P_2^*, P_2^* \mid\mid P_3^*) \Rightarrow P_1^* \mid\mid P_3^*)$.

7. Через любую точку пространства $\mathbf{E_3}^4$ проходит прямая, параллельная данной прямой и только одна.

8. Через любую точку пространства $\mathbf{E_3}^4$ проходит плоскость, параллельная данной плоскости и только одна.

2. Метрические свойства плоскости $\mathbf{E_3}^4$

2.1. Расстояние между точками в пространстве $\mathbf{E_3}^4$

Пусть A^*, B^* любые две точки в пространстве E_3^4 и пусть $\{A_i,\ i \in Z\}$,$\{B_j,\ j \in Z\}$ соответствующие им орбиты в пространстве E_3.

Определение 3 **[1]. *Расстоянием*** между точками A^* и B^* в пространстве E_3^4 называется минимум расстояний между точками A_i и B_j в пространстве E_3

$$| A^* B^* | = min\ (|A_i\ B_j\ |_{\text{евк.}}).$$

Свойства расстояний между точками

1^0. Для любых двух точек A^* и B^* пространства E_3^4 расстояние $|A^*\ B^*|$ существует и только одно.

2^0. Для любых двух точек A^* и B^* в соответствующих им орбитах

$$\{A_i,\ i \in Z\} \text{ и } \{B_j, j \in Z\}$$

найдутся такие точки A_i и B_j, что

$$|A^*\ B^*| = (|A_i\ B_j\ |_{\text{евк}}.$$

3^0. $|A^*\ B^*| \geq 0$ для любых двух точек A^* и B^*.

4^0. $|A^*\ B^*| = 0$ тогда и только тогда, когда $A^* = B^*$.

5^0. $|A^*\ B^*| = |\ B^*A^*|$ для любых двух точек A^* и B^*.

6^0. $|A^*\ B^*| + |B^*C^*| \geq |A^*\ C^*|$ для любых точек A^*, B^* и C^*.

Определение 4. Сферой с центром C^* и радиусом r ($r > 0$) называется множество всех точек M^* пространства E_3^4, удовлетворяющих условию

$$|\ C^* M^*| = r.$$

2.2. Углы между прямыми и плоскостями в пространстве $\mathbf{E_3}^4$

Так как движение евклидова пространства сохраняет углы между прямыми, плоскостями и между прямой и плоскостью, то углы в пространстве E_3^4 можно определить следующим образом.

Углом между прямыми p^* и q^* (между плоскостями P^* и Q^*, прямой p^* и плоскостью P^*) называется угол между соответствующими им евклидовыми прямыми p и q (плоскостями P и Q, прямой p и плоскостью P).

Прямые p^* и q^*(плоскости P^* и Q^*, прямая p^* и плоскость P^*) называются ***перпендикулярными***, если перпендикулярны соответствующие им евклидовы прямые p и q (плоскости P и Q, прямая p и плоскость P). Если прямая $p^* \perp q^*$ и p^* пересекает q^*, то p^* называется ***перпендикуляром***, опущенным на q^*.

Свойства перпендикулярности прямых и плоскостей

1. Из любой точки на любую прямую можно опустить перпендикуляр и только один.

2. Если $p^* \perp q^*$, то $q^* \perp p^*$.

3. Любая прямая третьего рода перпендикулярна любой прямой первого и второго рода.

4. Если p^* является прямой четвертого рода, то любая перпендикулярная ей прямая тоже будет прямой четвертого рода.

5. Любая плоскость третьего рода перпендикулярна любой плоскости первого и второго рода.

6. Если P^* плоскость четвертого рода, то любая перпендикулярная ей плоскость тоже будет плоскостью четвертого рода.

7. Любая прямая третьего рода перпендикулярна любой плоскости первого и второго рода.

8. Любая прямая первого и второго рода перпендикулярна любой плоскости третьего рода.

9. Если прямая p^* является прямой четвертого рода и p^* перпендикулярна плоскости P^*, то P^* тоже является плоскостью четвертого рода.

2.3. Движения пространства $\mathbf{E_3}^4$

Определение 5 [6, с. 11]. ***Движением пространства*** $\mathbf{E_3}^4$ называется взаимно однозначное отображение множества точек этого пространства на себя, при котором сохраняется расстояние между точками.

Обозначим W множество орбит всех точек пространства E_3 при действии группы $\boldsymbol{G_4} =\{S_{l,\bar{a}}\}$. Пусть G – группа всех движений пространства E_3, G^* – множество всех движений, при которых множество W отображается само на себя. Очевидно, G^* является подгруппой в группе G и G_4 является инвариантной подгруппой в группе G^* ([3, с. 11]).

При этом движения из G_4 и только они отображают каждую орбиту саму на себя.

В группу G^* входят

1. Параллельные переносы $T_{\bar{b}}$, где $\bar{b}$ любой вектор, параллельный прямой l.

2. Симметрия (S_l) пространства E_3 относительно прямой l.

3. Скользящие симметрии ($S_{l,\bar{c}}$) относительно прямой l ($\bar{c} \parallel l$).

4. Осевые симметрии (S_p), $p \perp l$.

5. Симметрии относительно плоскостей S_Q ($Q \perp l$).

6. Центральные симметрии Z_O, $O \in l$.

Так как каждое движение из G^* отображает орбиту на орбиту, то каждая точка из E_3^4 отобразится на точку из E_3^4. Разные точки, очевидно, будут отображаться на разные же точки. Так как каждое движение из G^* сохраняет евклидово расстояние, то будет сохраняться и расстояние между соответствующими точками в пространстве E_3^4. Итак, каждому движению из G^* соответствует движение пространства E_3^4. Легко доказать и обратное; каждому движению пространства E_3^4 соответствует хотя бы одно движение евклидова пространства.

Из сказанного выше следует

Теорема 1. Группа движений пространства E_3^4 изоморфна фактор-группе группы G^* по подгруппе G_3.

Рассмотрим частные виды движений пространства E_3^4. Все движения из G_4 порождают тождественное преобразование пространства E_3^4. Для остальных движений из G^* возможны следующие случаи.

1. Параллельные переносы $T_{\bar{b}}$ пространства E_3, где $\bar{b}$ любой вектор, параллельный прямой l, порождают сдвиги вдоль прямых первого и второго рода. При этом все точки пространства E_3^4 сдвигаются в одном направлении на одно расстояние.

2. Симметрия S_l пространства $\mathbf{E_3}$ ***порождает симметрию пространства*** $\mathbf{E_3^4}$ ***относительно прямой*** $\mathbf{l^*}$.

3. Скользящие симметрии ($S_{l,\bar{c}}$) относительно прямой l ($\bar{c} \parallel l$) порождают движения пространства E_3^4, которые являются произведениями осевой симметрии относительно прямой l^* и сдвига, порожденного параллельным переносом $T_{\bar{c}}$.

Это движение назовем ***скользящей симметрией относительно прямой*** $\mathbf{l^*}$.

4. Осевые симметрии S_p ($p \perp l$) порождают **осевые *симметрии пространства*** $\mathbf{E_3^4}$ относительно прямых третьего рода. Обозначим их S_{p^*}.

5. Симметрии относительно плоскостей S_Q ($Q \perp l$) определяют симметрии пространства $\mathbf{E_3^4}$ относительно плоскостей третьего рода.

6. Центральные симметрии Z_O, $O \in \Pi$ порождают ***центральные симметрии пространства*** $\mathbf{E_3^4}$ относительно точек $O^* \in l^*$. Эти движения назовем ***центральными симметриями пространства*** $\mathbf{E_3^4}$ и будем обозначать Z_{O^*}.

Список литературы

1. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Геометрии, развертывающиеся на трехмерное евклидово пространство // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 5–12.
2. *Никулин В.В., Шафаревич И.Р.* Группы и геометрии. М.: Наука, 1993. 239 с.
3. *Андреева З.И.* Равномерно-разрывные подгруппы группы движений n-мерного евклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 5–11.
4. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Геометрия, получающаяся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы $\{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\}$ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4(51). С. 5–10.
5. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Движения плоскостей, развертывающихся на евклидову плоскость // Сб. науч. тр. IV междунар. симпозиума "Симметрии: теоретический и методический аспекты". Астрахань, 2012. С. 16.
6. *Шеремет Г.Г., Андреева З.И.* Геометрическое пространство, получающееся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы, являющейся прямым произведением трех подгрупп параллельных переносов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56). С. 14–21.

References

1. *Andreeva Z.I., Sheremet G.G.* Geometrii, razvyortyvayushchiesya na tryohmernoe evklidovo prostranstvo. // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. Vyp. 1(48). S. 5–12.
2. *Nikulin V.V., Shafarevich I.R.* Gruppy i geometrii. M.: Nauka, 1993. 239 s.
3. *Andreeva Z.I.* Ravnomerno-razryvnye podgruppy gruppy dvizhenij *n*-mernogo evklidova prostranstva // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. Vyp. 2(41). S. 5–11.
4. *Andreeva Z.I., Sheremet G.G.* Geometriya, poluchayushchayasya "skleivaniem" tryohmer nogo evklidova prostranstva s pomoshchyu gruppy // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. Vyp. 4(51). S. 5–10.
5. *Andreeva Z.I., Sheremet G.G.* Dvizheniya ploskostej, razvertyvayushchihsya na evklidovu ploskost' // Sb. nauchnyh trudov IV mezhdunarodnogo simpoziuma "Simmetrii: teoreticheskij i metodicheskij aspekty". Astrahan', 2012. S. 16.
6. *Sheremet G.G., Andreeva Z.I.* Geometricheskoe prostranstvo, poluchayushcheesya "skleivaniem" tryohmernogo evklidova prostranstva s pomoshch'yu gruppy, yavlyayushchejsya pryamym proizvedeniem tryoh podgrupp parallel'nyh perenosov // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022. Vyp. 1(56). S. 14–21.

Просьба ссылаться на эту статью:

Шеремет Г.Г., Андреева З.И. "Склеивание" трехмерного евклидова пространства с помощью циклической группы, порожденной осевой скользящей симметрией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 11–17. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-11-17.

Please cite this article as:

Sheremet G.G., Andreeva Z.I. "Gluing" three-dimensional Euclidean space using a cyclic group generated by a sliding symmetry // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 3(58). P. 11–17. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-3-11-17.