# Математика

УДК 517.977.56

## Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции

**А. И. Агамалиева**

Бакинский государственный университет; Баку, Азербайджан

**e-mail:** agamaliyeva88@gmail.com; **ORCID: 0000-0002-1715-5813**

Рассматривается одна дискретная задача оптимального управления динамикой популяции с управляемым начальным условием. Процесс описывается нелинейной системой разностных уравнений типа Фредгольма. Налагая на правую часть рассматриваемого уравнения ряд условий гладкости, доказан аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина. В случае выпуклости и открытости области управления доказаны соответственно линеаризованный принцип максимума и аналог уравнения Эйлера, являющихся необходимыми условиями оптимальности первого порядка.

**Ключевые слова:** *необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума; аналог линеаризованного условия максимума; аналог уравнения Эйлера; уравнения в вариациях; динамика популяции.*

*Поступила в редакцию 10.04.2022, принята к опубликованию 11.05.2022*

## Necessary Optimality Conditions in the One Discrete Boundary Problem of Population Dynamics Control

**A. I. Agamaliyeva**

Baku State University; Baku, Azerbaijan

**e-mail:** agamaliyeva88@gmail.com; **ORCID: 0000-0002-1715-5813**

One discrete problem of optimal population dynamics control with a controllable initial condition is considered. The process is described by a nonlinear system of Fredholm-type difference equations. An analogue of the L.S. Pontryagin' maximum principle is proved by imposing a series of smoothness conditions on the right side the equation. The linearized maximum principle and the analogue of the Euler equation are proved for the case of convexity and openness of the control domain, which are first-order necessary conditions for optimality.

**Keywords:** *the necessary optimality condition of the discrete maximum principle type; an linearized maximum condition analogue; an Euler equation analogue; equation in the variations; population dynamics.*

*Received 10.04.2022, accepted 11.05.2022*

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13

## Введение

В работах [1–5] был исследован ряд задач оптимального управления динамики популяций при различных предположениях, что управляющая функция, являясь распределенной, входит в правые части уравнений. При этом различными способами получен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка как непрерывных, а также в соответствующих дискретных задачах оптимального управления. Важным является также исследование аналогичных задач в случае сосредоточенного управления. Исходя из вышеперечисленного, в данной статье исследуется случай граничных управлений.

## 1. Постановка задачи

Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой разностных уравнений

$$z(t+1,x) = f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big), \quad (1)$$

$$t = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1;\ x = x_0, x_0++1, \dots, x_1$$

с начальным условием

$$z(t_0,x) = a(x), x = x_0, x_0+1, \dots, x_1, \quad (2)$$

где

$$y(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x} g\big(t,x,s,z(t,s)\big), \quad (3)$$

$$t = t_0, t_0+1, \dots, t_1;\ x = x_0, x_0+1, \dots, x_1.$$

Здесь $f(t,x,z,y)$, $\big(g(t,x,s,z)\big)$ – заданная $n$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,y)$, $(z)$: $t_0, t_1, x_0, x_1$ – заданные числа, причем разности $t_1 - t$ , $x_1 - x_0$ есть натуральные числа, а $a(x)$ – $n$-мерная дискретная вектор-функция, являющаяся решением задачи (дискретный аналог задачи Коши):

$$a(x+1) = F\big(x,a(x),u(x)\big),$$

$$x = x_0, x_0++1, \dots, x_1-1\ , \quad (4)$$

$$a(x_0) = a_0, \quad (5)$$

где $F(x,a,u)$ – заданная $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с $F_a(x,a)$, $a_0$ – заданный постоянный вектор, а $u(x)$ – $r$-мерный дискретный вектор управляющих функций со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r,\ x = x_0, x_0+1, \dots, x_1-1. \quad (6)$$

Каждую управляющую функцию $u(x)$ с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением.*

Задача заключается в минимизации функционала типа Больца:

$$S(u) = \phi\big(a(x_1)\big) + \sum_{x=x_0}^{x_1} G\big(x, z(t_1,x)\big), \quad (7)$$

определенного на решениях задачи (1)–(5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями. Допустимое управление $u(x)$, являющееся решением задачи о минимуме функционала (7) при ограничениях (1)–(6), как обычно, назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс

$$\big(u(x), a(x), z(t,x), y(t,x)\big) –$$

*оптимальным процессом*.

В работе [3] рассмотрено одно оптимальное управление динамикой популяции при предположении, что процесс описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, а управляющая функция входит в правую часть уравнения. Методами оптимального управления получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Рассматриваемая задача является дискретным аналогом одной задачи управления динамикой популяции из [3] и исследуется впервые. При этом управляющая функция входит в начальное условие рассматриваемого разностного уравнения.

Как видно, процесс управляется посредством выбора начального сосредоточенного управления, а начальная функция определяется как решение задачи Коши для нелинейного обыкновенного разностного уравнения. Сам процесс описывается двумерным нелинейным разностным уравнением типа Фредгольма.

В рассматриваемой задаче при предположении существования оптимального управления, установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка (дискретный принцип максимума, линеаризованное условия максимума, аналог уравнения Эйлера) при различных предположениях.

## 2. Аналог дискретного принципа максимума

Предположим, что

$$\big(u(x), a(x), z(t,x), \mathrm{y(t,x)}\big)$$

в рассматриваемой задаче является фиксированным допустимым процессом, и при этом множество допустимых скоростей системы уравнений (4), т.е. множество

$$F(x,a(x),U)=\{\alpha:\alpha= F\big(x,a(x),v(x)\big), v(x)\in U, x\in X=x_0,x_0+ +1,\dots,x_1-1\ \} \quad (8)$$

выпукло при всех $x$.

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(x)$ – произвольное допустимое управление. В силу предположения о выпуклости множества (8) можно записать "возмущенную систему" в виде

$$a(x+1;\varepsilon)=F\big(x,a(x;\varepsilon),u(x;\varepsilon)\big)\equiv F\big(x,a(x),u(x)\big)+\varepsilon\Big(F\big(x,a(x;\varepsilon),v(x)\big)- -F\big(x,a(x;\varepsilon),u(x)\big)\Big), \quad (9)$$

$$a(x_0;\varepsilon)=a(x_0)=a_0, \quad (10)$$

$$z(t+1,x;\varepsilon)=f\big(t,x,z(t,x;\varepsilon),y(t,x;\varepsilon)\big), \quad (11)$$

$$z(t_0,x;\varepsilon)=a(x;\varepsilon), \quad (12)$$

$$y(t,x;\varepsilon)=\sum_{s=x_0}^{x} g\Big(t,x,s,\big(z(t,s),z(t,s,\varepsilon)\big)\Big). \quad (13)$$

Положим

$$A(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$B(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$C(x)=\left.\frac{\partial a(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \quad (14)$$

Учитывая условия гладкости, наложенные на правые части соотношений (1), (3), (4) из (9)–(13), получаем, что $A(t,x),B(t,x),C(x)$, определяемые соотношениями (14), являются решениями аналогов уравнений в вариациях в виде

$$A(t+1,x)=\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}A(t,x)+ +\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}B(t,x), \quad (15)$$

$$A(t_0,x)=C(x), \quad (16)$$

$$B(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s)\big)}{\partial z}A(t,s), \quad (17)$$

$$C(x+1)=\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a}C(x)+ +\big[F\big(x,a(x),v(x)\big)-F\big(x,a(x),u(x)\big)\big], \quad (18)$$

$$C(x_0)=0. \quad (19)$$

При этом специальное приращение функционала цели имеет вид (т.е. допускает разложение):

$$S\big(u(x;\varepsilon)\big)-S\big(u(x)\big)=\varepsilon\frac{\partial\phi'\big(a(x_1)\big)}{\partial a}C(x_1)+ +\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_i}\frac{\partial G'(z\,(t_1,x))}{\partial z}A(t_1,x)+o(\varepsilon).$$

Пусть $p(t,x),q(t,x),\psi(x)$ пока неизвестные $n$ -мерные вектор-функции.

Из соотношений (тождеств) (15), (17), (18) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)A(t+1,x)= =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)\left[\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}\times \times A(t,x)+\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}B(t,x)\right] \quad (20)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)B(t,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)\times \times\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s)\big)}{\partial z}A(t,s)\right], \quad (21)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)C(x+1,x)= =\left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a}C(x)+ +\psi'(x)\Big(F\big(x,a(x),v(x)\big)- -F\big(x,a(x),u(x)\big)\Big)\right]. \quad (22)$$

Введем обозначения вида

$$H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)= \psi'(x)F\big(x,a(x),u(x)\big),$$

$$\Delta_{v(x)}H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)= =H\big(x,a(x),v(x),\psi(x)\big)- -H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big).$$

Учитывая введенные обозначения и тождества (20)–(22), специальное приращение функционала (7) представляем в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S\big(u(x;\varepsilon)\big) - S\big(u(x)\big) =$$
$$= \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1} \frac{\partial G'(z,t_1,x)}{\partial z} A(t_1,x) +$$
$$+\varepsilon \frac{\partial \phi'\big(a(x_1)\big)}{\partial a} C(x_1) + \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) C(x+1) -$$
$$-\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) \frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a} C(x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\upsilon(x)} H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big) +$$
$$+\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t,x) A(t+1,x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Big[ p'(t,x) \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z} \times$$
$$\times A(t,x) + p'(t,x) \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y} B(t,x) \Big] +$$
$$+\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t,x) B(t,x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'\,(t,x) \times$$
$$\times \frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s),z(t,s)\big)}{\partial z} A(t,s) + o(\varepsilon). \quad (23)$$

Нетрудно доказать, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) C(x+1) = \psi'(x_1) C(x_1) +$$
$$+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x_0-1) C(x), \quad (24)$$
$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'\,(t,x) A(t+1,x) =$$
$$= \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x) A(t_{1,}x) -$$
$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_0-1,x) A(t_{0,}x) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x) A(t,x). \quad (25)$$

Принимая во внимание тождества (24), (25), из специальной формулы приращения (23) получим специальное разложение функционала качества в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = \varepsilon \frac{\partial \phi'\big(a(x_1)\big)}{\partial a} C(x_1) +$$
$$+\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G'\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z} A(t_1,x) +$$
$$+\varepsilon \psi'(x_1-1) C(x_1) +$$
$$+\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x-1) C(x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\upsilon(x)} H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big) +$$
$$+\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1-1,x) A(t_1,x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'\big((t_0-1,x)\big) A(t_0,x) +$$
$$+\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x) A(t,x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t,x) \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z} \times$$
$$\times A(t,x) -$$
$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t,x) \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y} \times$$
$$\times B(t,x) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t,x) B(t,x) - \varepsilon \times$$
$$\times \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t,s) \frac{\partial g\big(t,s,x,z(t,x)\big)}{\partial z} \times$$
$$\times\ A(t,x) + \mathrm{o}(\varepsilon). \quad (26)$$

Если предполагать, что вектор-функции $\psi(x), p(t,x)$, и $q(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi(x-1) = \frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a} \psi(x) +$$
$$+p(t_0-1,x), \quad (27)$$

$$\psi(x_1-1) = -\frac{\partial \phi\big(a(x_1)\big)}{\partial a}, \quad (28)$$

$$p(t-1,x)=\frac{\partial f'\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}\times$$
$$\times\, p(t,x)+\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial g'(t,s,x)z(t,x)}{\partial z}q'(t,s), \tag{29}$$

$$q(t,x)=\frac{\partial f'\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}p(t,x), \tag{30}$$

$$p(t_1-1,x)=-\frac{\partial G(x,z(t_1,x))}{\partial z}, \tag{31}$$

то разложение (30) примет вид

$$\Delta S_\varepsilon(u)=$$
$$=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)+$$
$$+\mathrm{o}(\varepsilon). \tag{32}$$

Из разложения (32) следует

**Теорема 1**. Если множество (8) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ задаче (1)–(7), необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\le 0, \tag{33}$$

выполнялось для всех $v(x)\in U, x\in X=\{x: x=x_0,x_0+1,\dots x_1-1\}$.

Таким образом, в случае граничной задачи оптимального управления, имеет место необходимое условие оптимальности (33) типа дискретного принципа максимума Л.С. Понтрягина (см. напр., [6]).

## 3. Аналог линеаризованного условия максимума

В этом пункте предполагаем, что множество $U$ выпуклое, а вектор-функция $F(x,a,u)$ имеет непрерывную производную также по $u$.

Пусть $u(x)$ фиксированное допустимое управление, $\mu\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(x)$ – произвольное допустимое управление.

Тогда, в силу сделанных предположений, "возмущенное" управление $u(x,\mu)$ можно определить по формуле

$$u(x,\mu)=u(x)+\mu[v(x)-u(x)]. \tag{34}$$

Рассмотрим "возмущенную систему уравнений":

$$z(t+1,x,\mu)=$$
$$=f\big(t,x,z(t,x,\mu),y(t,x,\mu)\big), \tag{35}$$

$$y(t,x,\mu)=a(x,\mu), \tag{36}$$

$$y(t,x,\mu)=\sum_{s=x_0}^{x_1}g\big(t,x,s,z(t,s,\mu)\big), \tag{37}$$

$$a(x+1,\mu)\equiv F\big(x,a(x,\mu)u(x,\mu)\big)$$
$$\equiv F(x,a(x,\mu),u(x)$$
$$+\mu[v(x)-u(x)]), \tag{38}$$

$$a(x,\mu)=a_0. \tag{39}$$

Положим

$$\alpha(t,x)=\frac{\partial z(t,x,\mu)}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0},$$
$$\beta(t,x)=\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0},$$
$$\gamma(x)=\frac{\partial a(x,\mu)}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0}. \tag{40}$$

Принимая во внимания (40) из соотношений (35)–(39), с учетом гладкости правых частей соотношений (35), (37), (39), получаем, что $\alpha(t,x),\beta(t,x)$ и $\gamma(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha(t+1,x)=$$
$$=\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}\alpha(t,x)+$$
$$+\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}\beta(t,x), \tag{41}$$

$$\beta(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s)\big)}{\partial z}\alpha(s,x), \tag{42}$$

$$\gamma(x+1)=\frac{\partial F\big(x,a(x),\dot u(x)\big)}{\partial a}\gamma(x)+$$
$$+\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial u}\big(v(x)-u(x)\big), \tag{43}$$

$$\gamma(x)=0. \tag{44}$$

Далее запишем специальное приращение функционала качества (7), соответствующее допустимым управлениям $u(x)$ и $u(x,\mu)$.

Имеем:

$$S\big(u(x,\mu)\big)-S(u)=\mu\frac{\partial\phi\big(a(x_1)\big)}{\partial a}\gamma(x_1)+$$
$$+\mu\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial G\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z}\alpha(t_1,x)+o(\mu), \tag{45}$$

Из соотношений (42)–(44) следует, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)\alpha(t+1,x)=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Big[p'(t,x)\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}\times$$

$$\times\,\alpha(t,x)\,\frac{p'(t,x)\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}\,\beta(t,x)\Big]. \quad (46)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x>x_0}^{x_1} q'(t,x)\beta(t,x) =$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x>x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1} q'(t,x)\,\frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s)\big)}{\partial z}\,\alpha(t,s), \quad (47)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi(x)\gamma(x+1) =$$
$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\,\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a}\,\gamma(x) +$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\,\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial u}\times$$
$$\times\,(v(x)-u(x)). \quad (48)$$

Нетрудно видеть, что справедливы тождества

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t,x)\alpha(t+1,x) =$$
$$=\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x)\alpha(t_1,x) =$$
$$=-\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_0-1,x)\,\alpha(t_0,x) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x)\alpha(t,x) =$$
$$=\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x)\alpha(t_1,x) -$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_0-1,x)\gamma(x) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x)\alpha(t,x), \quad (49)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\gamma(x+1) = \psi'(x_1-1)\gamma(x_1) +$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x-1)\,\gamma(x). \quad (50)$$

Учитывая тождества (46)–(50), а также предполагая, что $p(t,x), q(t,x), \psi(x)$ является решением сопряженной системы (27)–(31) с рассуждениями, аналогичными рассуждениям, используемым при доказательстве разложения (45), доказывается, что разложение (46) может быть представлено в виде

$$S\big(u(x,\mu)\big) - S(u) =$$
$$= -\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\times$$
$$\times\,\big(v(x)-u(x)\big) + o(\mu). \quad (51)$$

Из разложения (51) следует, что если $u(x)$ оптимальное управление, то

$$-\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\times$$
$$\times\,(v(x)-u(x)) + o(\mu) \geq 0.$$

Из последнего неравенства, в силу произвольности $\mu \in [0,1]$, следует

**Теорема 2.** Если в задаче (1)–(7) множество $U$ выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)'\times$$
$$\times\,\big(v(x)-u(x)\big) \leq 0$$

выполнялось для всех допустимых управлений $v(x)$.

Таким образом, в рассматриваемой задаче доказан аналог линеаризованного условия максимума.

## 4. Аналог уравнения Эйлера

Предположим, что в задаче (1)–(7) множества $U$ открытое, а $F(x,a,u)$ имеет также непрерывное частное производное по $u$.

Пусть $\big(u(x), z(t,x), a(x)\big)$ фиксированный, а $\big(\bar{u}(x) = u(x) + +\Delta u(x), \bar{x}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x), a(x) = a(x) + \Delta a(x)\big)$ – произвольный –допустимые процессы.

Допустим, что $\varepsilon$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(x) \in R^r, x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1-1$ – произвольная $r$-мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления).

В силу открытости области управления $U$ специальное приращение допустимого управления можно определить по формуле

$$\Delta u(x;\varepsilon) = \varepsilon\delta u(x). \quad (52)$$

Из введенных обозначений ясно, что $\left(\Delta z(t,x),\Delta t(t,x),\Delta a(x)\right)$ является решением задачи

$$\Delta z(t+1,x)=f\left(t,x,\bar{z}(t,x),y(t,x)\right)-\\ -f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right), \quad (53)$$

$$\Delta z(t_0,x)=\Delta a(x), \quad (54)$$

$$\Delta y(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x_1}\left[g\left(t,x,s,\bar{z}(t,s)\right)\right.\\ \left.-g\left(t,x,s,z(t,s)\right)\right], \quad (55)$$

$$\Delta a(x+1)=F\left(x,\bar{a}(x),\bar{u}(x)\right)-\\ -F\left(x,a(x),u(x)\right), \quad (56)$$

$$\Delta a(x_0)=0. \quad (57)$$

Из соотношений (53)–(57), с помощью формулы Тейлора, получаем, что $\Delta z(t,x),\Delta y(t,x),\Delta a(x)$ являются решениями линеаризованных задач

$$\Delta z(t+1,x)=\\ =f_z\left(t,x,z(x),y(t,x)\right)\Delta z(t,x)\\ +fy\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\Delta y(t,x)\right)+\\ +o_1(\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta y(t,x)\|), \quad (58)$$

$$\Delta z(t,x)=\Delta a(x), \quad (59)$$

$$\Delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1} g_z\left(t,x,s,z(t,s)\right)\Delta z(t,s)+\\ +o_2(\|\Delta z(t,s)\|), \quad (60)$$

$$\Delta a(x+1)=F_a\left(x,a(x),u(x)\Delta a(x)\right)+\\ +F_u\left(x,a(x),u(x)\Delta u(x)\right)+\\ +o_3(\|u\Delta a(x)\|+\|\Delta u(x)\|), \quad (61)$$

$$\Delta a(x_0)=0. \quad (62)$$

Через $\Delta z(t,x,\varepsilon),\Delta y(t,x,\varepsilon),\Delta a(x,\varepsilon)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x),y(t,x),a(x)$ , отвечающее специальному приращению (52) управления $u(x)$.

Используя линеаризованные системы (58)–(62) докажем, что имеют место разложения:

$$\Delta z(t,x,\varepsilon)=\varepsilon\delta z(t,x)+o_1(\varepsilon;t,x),\\ \Delta y(t,x,\varepsilon)=\varepsilon\delta y(t,x)+o_2(t,x;\varepsilon),\\ \Delta a(x)=a\delta a(x)+o_3(\varepsilon), \quad (63)$$

где $\delta z(t,x),\delta y(t,x),\delta a(x)$ (вариация состояния $z(t,x),y(t,x),a(x)$ ) является решением уравнения в вариациях

$$\delta z(t+1,x)=f_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\delta z(t,x)+\\ f_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\delta y(t,x), \quad (64)$$

$$\delta z(t_0,x)=\delta a(x), \quad (65)$$

$$\delta y(t,x)=\textstyle\sum_{x=x_0}^{x_1} g_z\left(t,x,s,z(t,s)\right)\delta z\,(t,s), \quad (66)$$

$$\delta a(x+1)=F_a(x,a(x),u(x)\delta a(x))+\\ +F_u(x,a(x),u(x)\delta u(x)), \quad (67)$$

$$\delta a(x)=0\,. \quad (68)$$

Запишем приращение функционала качества, используя формулу Тейлора:

$$S(u+\Delta u)-S(u)=\frac{\partial\phi'\left(a(x_1)\right)}{\partial a}\Delta a(x_1)+\\ +o_1(\|\Delta a(x_1)\|)+\\ +\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+\\ +\sum_{x=x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t_1,x)\|).$$

Отсюда, учитывая формулы (63), получаем справедливость разложения

$$S(u+\varepsilon\delta u)-S(u)=\varepsilon\frac{\partial\phi'\left(a(x_1)\right)}{\partial a}\delta a(x_1)+\\ +\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial G'\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z}\delta z(t,x)+\ o(\varepsilon). \quad (69)$$

Пусть $p(t,x),q(t,x),\psi(x)$ являются решением сопряженной системы (27)–(31).

Учитывая (64)–(69), легко доказать, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x)\delta z(t_1,x)-\\ -\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_0-1,x)\delta a(x_1)+\\ +\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x)\delta z(t,x)=\\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x\geq x_0}^{x_1} p'(t,x)\left[\frac{\partial f(t,x)z(t,x),y(t,x)}{\partial z}\times\right.\\ \left.\times\,\delta z(t,x)+\tfrac{\partial f(t,x)z(t,x),y(t,x)}{\partial y}\delta t(t,x)\right], \quad (70)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t,x)\delta y(t,x)=\\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x0}^{x_1} q'(t,s)\frac{\partial y\left(t,x,s,z(t,s)\right)}{\partial z}\delta z(t,s)\\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1} q'(t,s)\frac{\partial g\left(t,s,x,z(t,x)\right)}{\partial z}\delta z(t,x), \quad (71)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x-1)\delta a(x)+\psi'(x_1-1)\delta a(x_1)=$$
$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\left[\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a}\delta a(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial u}\delta u(x)\right]. \qquad (72)$$

Принимая во внимание тождества (70)–72), а также то, что $p(t,x), q(t,x), \psi(x)$ являются решением сопряженной системы (27)–(31), специальная формула приращения (70) функционала качества представляется в виде

$$S(u+\varepsilon\delta u)-S(u)=-\varepsilon\times$$
$$\times\sum_{x>x_0}^{x_1-1}H_u'\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\delta u(x)+\mathrm{o}(\varepsilon).$$

Из этого разложения следует, что первая вариация (в классическом смысле) критерия качества имеет вид

$$\delta^1 S(u;\delta u)=-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\delta u(x).$$

Поэтому на основе основного результата вариационного исчисления следует, что вдоль оптимального управления $u(x)$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\delta u(x)=0$$

для всех $\delta u(x)\in R^{\mathrm{r}}, x=x_0, x+1, x_1-1$.

Используя произвольность допустимой вариации $\delta u(x)$ из последнего соотношения, получаем справедливость следующего утверждения.

**Теорема 3**. Если множество $U$ открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(7) необходимо, чтобы соотношение

$$H_u\big(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi)\big)=0$$

выполнялось для всех

$$\xi=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1.$$

Последнее соотношение является аналогом уравнения Эйлера [6] для рассматриваемой задачи.

## Заключение

В рассматриваемой задаче оптимального управления доказан дискретный аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина. В случае выпуклости области управления установлено линеаризованное необходимое условие оптимальности без предположения выпуклости множества допустимых скоростей рассматриваемого уравнения.

При предположении открытости области управления доказан аналог уравнения Эйлера.

*Автор благодарит рецензента за полезные замечания.*

## Список литературы

1. *Агамалыева А.И., Мансимов К.Б.* Необходимое условие оптимальности в одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник Бакинского университета Сер. физ.-мат. наук. 2018. № 3. С. 20–28.
2. *Агамалыева А.И., Мансимов К.Б.* Об одной задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений // Вестник ТГУ. Сер. управ. выч. техники и информатика. 2017. № 39. С. 4–10.
3. *Агамалыева А.И.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления динамикой популяции // Журнал Бакинского инженерного университета. Сер. матем. и комп. науки. 2020. Т. 4, № 1. С. 40–48.
4. *Букина А.В., Букин С.С.* Исследование модели динамики популяций методами теории оптимального управления // Известия Иркутского университета. Сер. Математика. 2010. № 3. С. 59–66.
5. *Букина А.В.* Численное решение задачи оптимального управления динамикой популяции на основе вариационного принципа максимума // Известия Иркутского университета. Сер. Математика. 2009. № 1. С. 304–307.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др.* Методы оптимизации. Минск: Изд-во "Четыре четверти", 2011. 472 с.

## References

1. *Agamalyeva A.I., Mansimov K.B.* Neobhodimoe uslovie optimal'nosti v odnoj diskretnoj zadache optimal'nogo upravleniya. // Vestnik Bak. Univ. Ser. fiz.-mat. Nauk. 2018. № 3. S. 20–28.

2. *Agamalyeva A.I., Mansimov K.B.* Ob odnoj zadache upravleniya, opisyvaemoj sistemoj integro-differencial'nyh uravnenij // Vestnik TGU. Ser. uprav. vych. tekhniki i informatika. 2017. № 39. S. 4–10.
3. *Agamalyeva A.I.* Neobhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoj zadache optimal'nogo upravleniya dinamikoj populyacii // ZHurnal Bakinskogo inzhenernogo universiteta. Ser. matem. i komp. nauki. 2020. T. 4, № 1. S. 40–48.
4. *Bukina A.V., Bukin S.S.* Issledovanie modeli dinamiki populyacij metodami teorii optimal'nogo upravleniya // Izv. Irkutskogo un-ta. Ser. Matematika. 2010. № 3. S. 59–66.
5. *Bukina A.V.* Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya dinamikoj populyacii na osnove variacionnogo principa maksimuma // Izv. Irkutskogo universiteta. Ser. Matematika. 2009. № 1. S. 304–307.
6. *Gabasov R., Kirillova F.M. i dr.* Metody optimizacii / R. Gabasov. Minsk: Izd-vo "CHetyre chetverti". 2011. 472 s.

**Просьба ссылаться на эту статью:**

*Агамалиева А.И.* Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13.

**Please cite this article as:**

*Agamaliyeva A.I.* Necessary Optimality Conditions in the One Discrete Boundary Problem of Population Dynamics Control // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13.