УДК_530.12:531.551

Космологическая модель V типа по Бьянки

О. В. Сандакова[1], **Е. В. Кувшинова**[2]

[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: o_sandakova@list.ru; **ORCID: 0000-0003-1768-7286, AuthorID: 38871**
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: kuvlenka@narod.ru; **ORCID: 0000-0003-3432-8234, AuthorID: 28999**

В рамках общей теории относительности построена космологическая модель типа V по классификации Бьянки, где в качестве источника гравитации использована несопутствующая идеальная жидкость. Найдено два возможных решения, первое из которых описывает стадию ранней инфляции эволюции Вселенной.

Ключевые слова: *космологическая модель; система уравнений Эйнштейна; идеальная жидкость.*

Поступила в редакцию 22.04.2022, принята к опубликованию 13.05.2022

Bianchi Type V Cosmological Model

O. V. Sandakova[1], **E. V. Kuvshinova**[2]

[1]Perm State University; Perm, Russia
e-mail: o_sandakova@list.ru; **ORCID**: **0000-0003-1768-7286, AuthorID**: **38871**
[2]Perm State University; Perm, Russia
e-mail: kuvlenka@yandex.ru; **ORCID: 0000-0003-3432-8234, AuthorID: 28999**

Within the framework of the general theory of relativity, a cosmological model of type V according to the Bianchi classification is constructed, where a non-interacting ideal fluid is used as a source of gravity. Two possible solutions have been found, the first of which describes the stage of early inflation of the evolution of the Universe.

Keywords: *cosmological model; Einstein's system of equations; ideal fluid.*

Received 22.04.2022, accepted 13.05.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-67-72

Введение

В настоящее время не исключена малая анизотропия Вселенной, в том числе вызванная космологическим вращением, поэтому модели в однородных, но не изотропных метриках представляют интерес, связанный с прошлым Вселенной и поведением материи вблизи сингулярного состояния.

Ранее авторами данной работы были построены две космологические модели для метрики типа V по Бьянки в работе [1], как с вращением, так и без него.

Данная работа отличается от ранее найденных решений, так как ранее авторами рассматривалась только сопутствующая анизотропная жидкость.

Метрика типа V по Бьянки с успехом применялась разными авторами в ряде работ: в связи с вопросом о связи реликтового излучения с параметрами изотропных космологических моделей [2], при построении модели с динамикой, аналогичной фридмановской [3], для построения космологической модели в теории гравитации Бранса–Дикке [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим метрику типа V по Бьянки:

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - e^{2\alpha x}\left(B^2 dy^2 + C^2 dz^2\right). \quad (1)$$

Здесь $\alpha - const, A = A(t), B = B(t), C = C(t).$

Будем искать решение уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (2)$$

где R_{ik} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, g_{ik} – метрический тензор. Принимается, что $\frac{8\pi G}{c^4} = 1, c = 1$. Методом описания уравнений Эйнштейна является тензорный анализ. Таким образом, скалярная кривизна вычисляется по формуле

$$R = g^{ik} R_{ik}, \quad (3)$$

тензор Риччи R_{ik} задает один из способов измерения того, как отличить кривизну многообразия от кривизны плоского евклидова пространства. Тензор Риччи может быть выражен через символы Кристоффеля Γ^a_{ik}:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^a_{ia}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^a_{ik}}{\partial x^a} + \Gamma^b_{ia}\Gamma^a_{kb} - \Gamma^b_{ik}\Gamma^a_{ba}, \quad (4)$$

где символы Кристоффеля выражаются через ковариантные и контрвариантные компоненты метрического тензора:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \quad (5)$$

Источником гравитации данной модели является несопутствующая идеальная жидкость.

Левая (геометрическая) часть уравнений Эйнштейна (2) была найдена с использованием программы Mathematics с учетом ненулевых ковариантных компонент метрического тензора g_{ik}, полученных из метрики (1):

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1, \\ &g_{11} = -A^2, \\ &g_{22} = -e^{2\alpha x} B^2, \\ &g_{33} = -e^{2\alpha x} C^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Правая (гравитационная) часть уравнений Эйнштейна (2) представлена несопутствующей идеальной жидкостью.

Тензор энергии – импульса идеальной жидкости – имеет вид:

$$T_{ik} = (\pi + \rho) u_i u_k - \pi g_{ik}, \quad (7)$$

где $u_i = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ – компоненты 4-скорости идеальной жидкости, для которых выполняется условие нормировки $u_i u^i = 1$, π – давление идеальной жидкости, ρ – плотность энергии идеальной жидкости. Предполагаем, что $u_2 = u_3 = 0$.

Неизвестными величинами при решении системы уравнений Эйнштейна (2) будут: масштабный фактор, ненулевые компоненты 4-скорости, давление идеальной жидкости и плотность энергии идеальной жидкости.

2. Система уравнений

Система уравнений Эйнштейна (2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A^2 BC}\left(A^2 \dot{B}\dot{C} + AB\dot{A}\dot{C} + AC\dot{A}\dot{B} - 3BC\alpha^2\right) = \\ &= (\pi + \rho) u_0^2 - \pi, \\ &-\frac{\alpha}{ABC}\left(A\dot{B}C - 2BC\dot{A} + AB\dot{C}\right) = (\pi + \rho) u_0 u_1, \\ &-\frac{1}{BC}\left(A^2 B\ddot{C} + A^2 C\ddot{B} + A^2 \dot{B}\dot{C} - BC\alpha^2\right) = \\ &= (\pi + \rho) u_1^2 + A^2 \pi, \\ &-\frac{e^{2\alpha x} B^2}{A^2 C}\left(A^2 \ddot{C} + AC\ddot{A} + A\dot{A}\dot{C} - C\alpha^2\right) = \\ &= e^{2\alpha x} B^2 \pi, \\ &-\frac{e^{2\alpha x} C^2}{A^2 B}\left(A^2 \ddot{B} + AB\ddot{A} + A\dot{A}\dot{B} - B\alpha^2\right) = \\ &= e^{2\alpha x} C^2 \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Из последних двух уравнений системы (8) получим, что $B(t) = C(t)$. Из условия нормировки 4-скорости идеальной жидкости получим, что

$$u_1 = A\sqrt{u_0^2 - 1}. \quad (9)$$

3. Первое решение уравнений Эйнштейна

Предположим, что $A = aB$, где $a - const$. Тогда система уравнений (8) преобразуется к виду:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2B^4}\left(3a^2B^2\dot{B}^2-3B^2\alpha^2\right)=\\
&=(\pi+\rho)u_0^2-\pi,\\
&0=(\pi+\rho)u_0\sqrt{u_0^2-1},\\
&-\frac{1}{B^2}\left(2a^2B^3\ddot{B}+a^2B^2\dot{B}^2-B^2\alpha^2\right)=\\
&=(\pi+\rho)a^2B^2(u_0^2-1)+a^2B^2\pi,\\
&-\frac{e^{2\alpha x}}{a^2B}\left(2a^2B^2\ddot{B}+a^2B\dot{B}^2-B\alpha^2\right)=\\
&=e^{2\alpha x}B^2\pi.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Решая систему уравнений Эйнштейна (10) найдем неизвестные величины: компоненты 4-скорости идеальной жидкости

$$u_0=1, u_1=0, \tag{11}$$

давление идеальной жидкости

$$\pi=-\frac{1}{a^2B^2}\left(3a^2\dot{B}^2-3\alpha^2\right), \tag{12}$$

плотность энергии идеальной жидкости

$$\rho=\frac{1}{a^2B^2}\left(3a^2\dot{B}^2-3\alpha^2\right), \tag{13}$$

а также дифференциальное уравнение для вычисления масштабного фактора $B=B(t)$:

$$B\ddot{B}-\dot{B}^2+\frac{\alpha^2}{a^2}=0. \tag{14}$$

Решая дифференциальное уравнение (14), найдем масштабный фактор

$$B=\frac{\alpha}{aH}sh(Ht), \tag{15}$$

где H – константа интегрирования, а также получим окончательные выражения для давления и плотности энергии идеальной жидкости:

$$
\begin{aligned}
&\pi=-3H^2,\\
&\rho=3H^2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Так как $\pi+\rho=0$, то идеальная жидкость является вакуумоподобной и не может вращаться.

4. Второе решение уравнений Эйнштейна

В дальнейшем мы предполагаем, что $A-const$. Тогда неизвестный масштабный фактор – это функция $B=B(t)$.

Тогда система уравнений Эйнштейна (8) приобретет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A^2B^2}\left(A^2\dot{B}^2-3B^2\alpha^2\right)=\\
&=(\pi+\rho)u_0^2-\pi,\\
&-\frac{2\dot{B}\alpha}{A^2B}=(\pi+\rho)u_0\sqrt{u_0^2-1},\\
&-\frac{1}{B^2}\left(2A^2B\ddot{B}+A^2\dot{B}^2-B^2\alpha^2\right)=\\
&=(\pi+\rho)A^2(u_0^2-1)+A^2\pi,\\
&\pi=-\frac{1}{A^2B}\left(A^2\ddot{B}-B\alpha^2\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Подставим из последнего уравнения системы (17) значение давления π в первые три уравнения системы уравнений Эйнштейна и получим:

$$
\begin{aligned}
&(\pi+\rho)u_0^2=\\
&=\frac{1}{A^2B^2}\left(A^2\dot{B}^2-A^2B\ddot{B}-2B^2\alpha^2\right),\\
&(\pi+\rho)^2u_0^2(u_0^2-1)=\left(-\frac{2\dot{B}\alpha}{A^2B}\right)^2,\\
&(\pi+\rho)(u_0^2-1)=\frac{1}{B^2}\left(-B\ddot{B}-\dot{B}^2\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Решая систему уравнений (18), мы получим дифференциальное уравнение для нахождения масштабного фактора $B=B(t)$:

$$\left(B\ddot{B}-\dot{B}^2\right)\left(A^2\dot{B}^2+A^2B\ddot{B}+2B^2\alpha^2\right)=0. \tag{19}$$

Таким образом, из уравнения (19) мы получим два возможных решения, соответствующих двум возможным значениям масштабного фактора.

Первый случай соответствует уравнению

$$B\ddot{B}-\dot{B}^2=0. \tag{20}$$

Тогда масштабный фактор имеет вид

$$B=B_0e^{Ht}, \tag{21}$$

где B_0, H – константы интегрирования (считаем, что с формальной точки зрения при t близком к нулю, выполняется условие $B=B_0$).

Тогда из системы уравнений Эйнштейна (17) мы находим давление идеальной жидкости:

$$\pi = \frac{\alpha^2 - A^2 H^2}{A^2}, \qquad (22)$$

плотность энергии идеальной жидкости:

$$\rho = \frac{-2\alpha^2 + 2A^2 H^2}{A^2}, \qquad (23)$$

ненулевые компоненты 4-скорости идеальной жидкости:

$$u_0 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2 - A^2 H^2}}, \quad u_1 = \frac{A\sqrt{\alpha^2 + A^2 H^2}}{\sqrt{\alpha^2 - A^2 H^2}}. \qquad (24)$$

Чтобы система уравнений (17) была согласована, подставим в нее найденные величины, в результате чего найдем константу интегрирования $H = 1/\sqrt{2}$. Окончательно найдем решение системы уравнений Эйнштейна в данном случае.

Масштабный фактор:

$$B = B_0 e^{t/\sqrt{2}}, \qquad (25)$$

давление идеальной жидкости:

$$\pi = \frac{2\alpha^2 - A^2}{2A^2}, \qquad (26)$$

плотность энергии идеальной жидкости:

$$\rho = \frac{-2\alpha^2 + A^2}{A^2}, \qquad (27)$$

ненулевые компоненты 4-скорости идеальной жидкости:

$$u_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\alpha^2 - A^2}}, \quad u_1 = \frac{A\sqrt{2\alpha^2 + A^2}}{\sqrt{2\alpha^2 - A^2}}. \qquad (28)$$

5. Третье решение уравнений Эйнштейна

Другой случай соответствует уравнению

$$A^2\dot{B}^2 + A^2 B\ddot{B} + 2B^2\alpha^2 = 0. \qquad (29)$$

Тогда, масштабный фактор имеет вид:

$$B = \sqrt{\frac{A\sqrt{D}}{\alpha}\sin\left(\frac{2\alpha t}{A}\right)}, \qquad (30)$$

где D – константа интегрирования (считаем, что с формальной точки зрения при t близком к нулю, выполняется условие $B = 0$).

Тогда из системы уравнений Эйнштейна (17) мы находим давление идеальной жидкости:

$$\pi = \frac{5\alpha^2}{A^2}, \qquad (31)$$

плотность энергии идеальной жидкости:

$$\rho = \frac{2\alpha^2}{A^2}\left(2ctg^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) - 3\right), \qquad (32)$$

ненулевые компоненты 4-скорости идеальной жидкости:

$$u_0 = \frac{\sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) + 2\sin^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right)}}{\sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) - \sin^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right)}},$$

$$u_1 = \frac{A\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\alpha t}{A}\right)}{\sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) - \sin^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right)}}. \qquad (33)$$

Так как для данного решения имеется ограничение, следующее из формул (33):

$$4\cos^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) - \sin^2\left(\frac{2\alpha t}{A}\right) > 0, \qquad (34)$$

то получим ограничение на время t , при котором возможна реализация второго решения:

$$t < \frac{A}{2\alpha} arctg 2. \qquad (35)$$

6. Причинность модели

Исследуем данную модель на причинность. Будем делать это от противного.

Для этого предположим, что существуют замкнутые времениподобные кривые, на каждой из которых существует точка, которая удовлетворяет двум условиям: первое из них $\frac{dt}{ds} = 0$, в тоже время в связи с требованием времениподобности получим второе условие: $u_k u^k > 0$.

Для удовлетворения этих условий достаточно, чтобы матрица пространственной части метрики (1) была положительно определена. Эта матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -A^2 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha x}B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\alpha x}C^2 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Очевидно, что условие положительной определенности матрицы (36) не выполняется, значит и наше предположение о существовании замкнутых времениподобных линий является неверным. Следовательно, найденное решение является причинным.

Выводы

Первое решение системы уравнений Эйнштейна (11), (15), (16) с масштабным фактором (15) соответствует эпохе Гута – крайне малому отрезку времени, за который происходит крайне быстрое расширение Вселенной, а именно: стадии инфляции Вселенной.

В данном решении несопутствующая идеальная жидкость является вакуумоподобной, $\pi+\rho=0$.

Второе решение системы уравнений Эйнштейна (25)–(28) с масштабным фактором (25) также может соответствовать эпохе Гута, так как масштабный фактор экспоненциально увеличивается. В отличие от первого решения, идеальная несопутствующая идеальная жидкость не является вакуумоподобной, так как $\pi+\rho<0$.

Третье решение системы уравнений Эйнштейна (30)–(33) с масштабным фактором (30) имеет ограничение по времени действия (35) и представляет собой некую "пульсирующую" модель Вселенной. Можно полагать, что им моделируется некоторая переходная стадия между двумя инфляционными стадиями развития Вселенной. Надо отметить, что данное решение имеет, скорее, математическое значение, нежели физическое, так как слабо совмещается с общепринятой фридмановской моделью.

Пермская группа гравитационистов занимается исследованием такого кинематического параметра, как вращение Вселенной. Построенные модели являются невращающимися.

Сравнивая данные решения с ранее найденными нами решениями в работе [1], можно сделать вывод о том, что наличие большего количества источников гравитации позволяет более точно описать стадии развития Вселенной.

С помощью несопутствующей идеальной жидкости обычно описывают барионную материю и холодную темную материю, которые вместе составляют приблизительно 30,8% содержания Вселенной. Оставшиеся примерно 69,2 %, согласно современным исследованиям, – это темная энергия, которая послужила причиной ускорения Вселенной в современную эпоху. Также наличие темной энергии позволяет Вселенной на больших масштабах быть однородной.

В работе [1] рассмотрены два случая: в первом случае в качестве источников гравитации берут сопутствующую анизотропную жидкость с одним вектором анизотропии, с помощью которой моделируется темная энергия, а во втором – чистое излучение плюс анизотропная жидкость с двумя векторами анизотропии. Чистое излучение может моделировать собой, например, поток фотонов.

Первая из построенных в работе [1] моделей является невращающейся, а вторая – вращающейся.

Таким образом, мы можем предположить, что именно наличие такого компонента, как темная энергия, в сочетании с дополнительным источником гравитации, может оказать влияние на наличие либо отсутствие вращения Вселенной. Отметим также, что в работе [1] имеются ненулевые компоненты метрического тензора g_{ik} при $i \neq k$.

Данное обстоятельство также оказывает влияние на отсутствие либо наличие вращения у рассматриваемой модели, что подтверждается множеством ранее построенных космологических моделей Вселенной.

Список литературы

1. *Кувшинова Е. В., Сандакова О. В., Янишевский Д. М.* Космологические модели с метрикой типа V по Бьянки // Известия высших учебных заведений. Физика. 2022. Т. 65, № 2. С. 43–47.
2. *Гуц А. К.* Топологическая структура Вселенной Геделя // Известия высших учебных заведений. Физика. 1980. № 6. С. 109–110.
3. *Raval H. M.* On a Godel-type Nonstatic Cosmological Solution for Matter in an Electromagnetic Field // Austral. J. Phys. 1967. Vol. 20, № 6. P. 663–673.

4. *Bhardwaj V. K., Dixit A., Pradhan A.* Bianchi type-V Transitioning model in Brans-Dicke theory with Observational Constraint // arxiv:2203/11426v2.

References

1. *Kuvshinova E.V., Sandakova O.V., Yanishevskiy D.M.* Kosmologicheskiye modeli s metrikoj tipa V po Bianchi // Izvestija visshih uchebnih zavedeniy. Fizika. 2022. Vol. 65, №2. P. 43–47.
2. *Guts A.K.* Topologicheskaya structura Vselennoj Gedelya // Izvestija visshih uchebnih zavedeniy. Fizika. 1980. № 6. P. 109–110.
3. *Raval H. M.* On a Godel-type Nonstatic Cosmological Solution for Matter in an Electromagnetic Field // Austral. J. Phys. 1967. Vol. 20, № 6. P. 663–673.
4. *Bhardwaj V.K., Dixit A., Pradhan A.* Bianchi type-V Transitioning model in Brans-Dicke theory with Observational Constraint // arxiv: 2203/11426v2.

Просьба ссылаться на эту статью:

Сандакова О.В., Кувшинова Е.В. Космологическая модель V типа по Бьянки // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 67–72. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-67-72.

Please cite this article as:

Sandakova O.V., Kuvshinova E.V. Bianchi Type V Cosmological model // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 67–72. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-67-72.