УДК 519.17

Некоторые графы Шилла с *b* = 5 не существуют

Х. Ли[1]**, А. А. Махнёв**[2]**, И. Н. Белоусов**[3]
[1] Хайнаньский университет; Хэйкоу, Китай
e-mail: lhy9694@163.com
[2] Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; Екатеринбург, Россия
e-mail: makhnev@imm.uran.ru; **AuthorID: 2970**
[3] Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; Екатеринбург, Россия
e-mail: i_belousov@mail.ru; **ORCID: 0000-0002-3314-7776, AuthorID: 170419**

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 со вторым собственным значением, равном $a = a_3$. Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 3$ (их оказалось 12). Белоусов И.Н. нашел допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$ (их оказалось 50) и $b = 5$ (их оказалось 82).
В работе доказано, что дистанционно регулярные графы Шилла с $b = 5$ и массивами пересечений {305,248,62;1,2,244}, {315,256,64;1,2,252}, {345,280,64;1,4,276}, {615,496,124;1,4,492}, {815,656,164;1,2,652}, {855,688,172;1,4,684}, {855,688,170;1,5,684}, {910,732,180;1,10,728}, {1000,804,201;1,3,800}, {1045,840,210;1,6,836}, {1055,848,212;1,4,844}, {1080,868,215;1,5,864}, {1155,928,232;1,2,924}, {1185,952,245;1,5,948}, {1235,992,248;1,8,988}, {1535,1232,308;1,8,1228}, {1560,1252,310;1,10,1248}, {1615,1296,324;1,12,1292}, {1665,1336,334;1,2,1332} не существуют.

Ключевые слова: *дистанционно регулярный граф; массив пересечений; граф Шилла.*

Поступила в редакцию 18.02.2022, принята к опубликованию 01.04.2022

Some Shilla Graphs with *b* = 5 do not Exist

Hai-Yan Li[1]**, A. A. Makhnev**[2]**, I. N. Belousov**[3]
[1] Hainan University; Haikou, P. R. China
e-mail: lhy9694@163.com
[2] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Yekaterinburg, Russia
e-mail: makhnev@imm.uran.ru; **AuthorID: 2970**
[3] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Yekaterinburg, Russia
e-mail: i_belousov@mail.ru; **ORCID: 0000-0002-3314-7776, AuthorID: 170419**

A Shilla graph is a distance-regular graph of diameter 3 that has a second eigenvalue equal to $a = a_3$. Koolen and Park found admissible arrays of intersections of the Shill graphs with $b = 3$ (there were 12 of them). Belousov I.N. found feasible intersection arrays of the Shilla graphs with $b = 4$ (there were 50 of them) and $b = 5$ (there were 82 of them).
It is proved in the paper that distance-regular Schill graphs with $b = 5$ and intersection arrays {305,248,62;1,2,244}, {315,256,64;1,2,252}, {345,280,64;1,4,276}, {615,496,124;1,4,492}, {815,656,164;1,2,652}, {855,688,172;1,4,684}, {855,688,170;1,5,684}, {910,732,180;1,10, 728}, {1000,804,201;1,3,800}, {1045,840,210;1,6,836}, {1055,848,212;1,4,844}, {1080,868, 215;1,5,864}, {1155,928,232;1,2,924}, {1185,952,245;1,5,948}, {1235,992,248;1,8,988}, {1535,1232,308;1,8,1228}, {1560,1252,310;1,10,1248}, {1615,1296,324;1,12,1292}, {1665, 1336,334;1,2,1332} do not exist.

Keywords: *distance-regular graph; intersection array; Shilla graph.*

Received 18.02.2022, accepted 01.04.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-40-45

Введение

В статье рассматриваются простые графы, то есть неориентированные графы, в которых отсутствуют петли и кратные ребра. Для вершины a графа Γ ее i-окрестность, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a, обозначим через $\Gamma_i(a)$.

Введем обозначения $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^{\perp}=\{a\}\cup[a]$.

Для двух вершин a,b графа Γ, число вершин в $[a]\cap[b]$ будем обозначать через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в графе Γ. Индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Пусть Γ – граф диаметра d, $i\in\{2,3,...,d\}$. Через Γ_i обозначается граф, который имеет то же самое множество вершин, и две вершины смежны в Γ_i, если они находятся на расстоянии i в графе Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $p^i_{jh}(u,w)$ обозначается число вершин, находящихся на расстоянии j от u и h от w, и называется *числом пересечений графа* Γ.

Рассмотрим числа $b_i(u,w)=p^i_{i+1,1}(u,w)$, $c_i(u,w)=p^i_{i-1,1}(u,w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если числа $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w, лежащих на расстоянии i в графе Γ для любого $i=0,...,d$. Заметим, что в дистанционно регулярном графе i-окрестность каждой вершины регулярна степени $a_i=k-b_i-c_i$. Кроме того, в дистанционно регулярном графе b_0 является его степенью, а $c_1=1$ (см. [1]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, у которого второе собственное значение равно $a=a_3$.

В таких графах a делит k и полагают $b=b(\Gamma)=k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$.

В [2] найдены допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b\in\{2,3\}$.

Предложение 1. *Пусть* Γ *– граф Шилла. Тогда*

(1) *если* $b=2$, *то* Γ *– нечетный граф степени* 4, *обобщенный шестиугольник порядка* (2,2), *граф Хэмминга* $H(3,3)$, *граф Терриллигера с массивом пересечений* $\{10,6,4;1,2,5\}$ *или граф Джонсона* $J(9,3)$;

(2) *если* $b=3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* {12,10,2;1,2,8}, {12,10,3;1,3,8}, {15,12,6;1,2, 10}, {24,18,9;1,1,16}, {27,20,10;1,2,18}, {30,22,9;1, 3,20}, {42,30,12;1,6,28}, {60,42,18;1,6,40}, {69,48, 24;1,4,46}, {93,64,24;1,6,62}, {105,72, 24;1,12,70}.

В [3] найдены допустимые массивы пересечений графов Шилла с b=5.

Предложение 2. *Пусть* Γ *– граф Шилла с* b=5. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений* {25, 24, 3; 1, 3, 20}, {25, 24, 9; 1, 1, 20}, {(30, 28, 2; 1, 2, 24}, {30, 28, 7; 1, 1, 24}, {30, 28, 9; 1, 3, 24}, {35, 32, 8; 1, 2, 28}, {45, 40, 10; 1, 1, 36}, {45, 40, 13; 1, 1, 36}, {45, 40, 14; 1, 2, 36}, {45, 40, 15; 1, 3, 36}, {50, 44, 5; 1, 5, 40}, {55, 48, 9; 1, 3, 44}, {55, 48, 12; 1, 4, 44}, {55, 48, 12; 1, 6, 44}, {60, 52, 10; 1, 10, 48}, {65, 56, 5; 1, 5, 52}, {65, 56, 14; 1, 2, 52}, {75, 64, 8; 1, 8, 60}, {75, 64, 12; 1, 6, 60}, {90, 76, 14; 1, 2, 72}, {105, 88, 7; 1, 7, 84}, {105, 88, 22; 1, 2, 84}, {115, 96, 16; 1, 8, 92}, {120, 100, 5; 1, 5, 96}, {120, 100, 20; 1, 2, 96}, {120, 100, 25; 1, 1, 96}, {130, 108, 27; 1, 9, 104},{130, 108, 36; 1, 2, 104}, {135, 112, 12; 1, 12, 108}, {135, 112, 20; 1, 8, 108}, {135, 112, 28; 1, 2, 108}, {135, 112, 28; 1, 4, 108}, {135, 112, 32; 1, 2, 108}, {135, 112, 35; 1, 5, 108}, {160, 132, 33; 1, 3, 128}, {165, 136, 30; 1, 15, 132}, {175, 144, 24; 1, 6, 140}, {175, 144, 36; 1, 4, 140}, {180, 148, 35; 1, 5, 144}, {195, 160, 40; 1, 8, 156}, {255, 208, 52; 1, 4, 204}, {255, 208, 52; 1, 8, 204}, {260, 212, 50; 1, 10, 208}, {265, 216, 45; 1, 5, 212}, {285, 232, 65; 1, 5, 228}, {305, 248, 62; 1, 2, 244}, {315, 256, 48; 1, 12, 252}, {315, 256, 50; 1, 20, 252}, {315, 256, 64; 1, 2, 252}, {315, 256, 64; 1, 16, 252}, {345, 280, 50; 1, 5, 276}, {345, 280, 64; 1, 4, 276}, {385, 312, 21; 1, 21, 308}, {385, 312, 33; 1, 33, 308}, {385, 312, 66; 1, 6, 308}, {405, 328, 80; 1, 5, 324}, {420, 340, 80; 1, 20, 336}, {520, 420, 100; 1, 20, 416}, {615, 496, 124; 1, 4, 492}, {665, 536, 134; 1, 2, 532}, {710, 572, 143; 1, 11, 568}, {715, 576, 132; 1, 16, 572}, {735, 592, 148; 1, 16, 588}, {765, 616, 150; 1, 15, 612}, {815, 656, 164; 1, 2, 652}, {855, 688, 170; 1, 5, 684}, {855, 688, 172; 1, 4, 684}, {910, 732, 180; 1, 10, 728}, {1000, 804, 201; 1, 3, 800}, {1045, 840, 180; 1, 24, 836}, {1045, 840, 210; 1, 6, 836}, {1055, 848, 212; 1, 4, 844}, {1080, 868, 215; 1, 5, 864}, {1155, 928, 232; 1, 2, 924}, {1185, 952, 245; 1, 5, 948}, {1195, 960, 240;, 1, 16, 956}, {1235, 992, 248; 1, 8, 988}, {1395, 1120, 240; 1, 24, 1116}, {1535, 1232, 308; 1, 8, 1228}, {1560, 1252, 310; 1, 10, 1248}, {1615, 1296, 324; 1, 12, 1292}, {1665, 1336, 334; 1, 2, 1332}.

В [4] доказано, что *Q*-полиномиальные графы Шилла с *b*=5 и массивами пересечений {315,256,64;1,16,252}, {420,340,80;1,20,336}, {1195,960,240;1,16,956} не существуют.

Теорема 1. *Дистанционно регулярного графа Шилла с массивом пересечений* {345,280,64;1,4,276} *не существует*.

Теорема 2. *Дистанционно регулярные графы Шилла с b*=5 *и массивами пересечений* {305,248,62;1,2,244}, {315,256,64;1,2,252}, {615,496,124;1,4,492}, {815,656,164;1,2,652}, {855, 688,172;1,4,684}, {855,688,170;1,5,684}, {910,732, 180;1,10,728}, {1000,804,201;1,3,800}, {1045,840, 210;1,6,836}, {1055,848,212;1,4,844}, {1080,868, 215;1,5,864}, {1155,928,232;1,2,924}, {1185,952, 245;1,5,948}, {1235,992,248;1,8,988}, {1535,1232, 308;1,8,1228}, {1560,1252,310;1,10,1248}, {1615, 1296,324;1,12,1292}, {1665,1336,334;1,2,1332} *не существуют.*

Следствие 1.

Пусть Γ *– граф Шилла с b*=5. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений*

{25, 24, 3; 1, 3, 20}, {25, 24, 9; 1, 1, 20}, {(30, 28, 2; 1, 2, 24},{30, 28, 7; 1, 1, 24}, {30, 28, 9; 1, 3, 24}, {35, 32, 8; 1, 2, 28}, {45, 40, 10; 1, 1, 36}, {45, 40, 13; 1, 1, 36}, {45, 40, 14; 1, 2, 36}, {45, 40, 15; 1, 3, 36}, {50, 44, 5; 1, 5, 40}, {55, 48, 9; 1, 3, 44}, {55, 48, 12; 1, 4, 44}, {55, 48, 12; 1, 6, 44}, {60, 52, 10; 1, 10, 48}, {65, 56, 5; 1, 5, 52}, {65, 56, 14; 1, 2, 52}, {75, 64, 8; 1, 8, 60}, {75, 64, 12; 1, 6, 60}, {90, 76, 14; 1, 2, 72}, {105, 88, 7; 1, 7, 84}, {105, 88, 22; 1, 2, 84}, {115, 96, 16; 1, 8, 92}, {120, 100, 5; 1, 5, 96}, {120, 100, 20; 1, 2, 96}, {120, 100, 25; 1, 1, 96}, {130, 108, 27; 1, 9, 104}, {130, 108, 36; 1, 2, 104}, {135, 112, 12; 1, 12, 108}, {135, 112, 20; 1, 8, 108}, {135, 112, 28; 1, 2, 108}, {135, 112, 28; 1, 4, 108}, {135, 112, 32; 1, 2, 108}, {135, 112, 35; 1, 5, 108}, {160, 132, 33; 1, 3, 128}, {165, 136, 30; 1, 15, 132}, {175, 144, 24; 1, 6, 140}, {175, 144, 36; 1, 4, 140}, {180, 148, 35; 1, 5, 144}, {195, 160, 40; 1, 8, 156}, {255, 208, 52; 1, 4, 204}, {255, 208, 52; 1, 8, 204}, {260, 212, 50; 1, 10, 208}, {265, 216, 45; 1, 5, 212}, {285, 232, 65; 1, 5, 228}, {315, 256, 48; 1, 12, 252}, {315, 256, 50; 1, 20, 252}, {345, 280, 50; 1, 5, 276}, {385, 312, 21; 1, 21, 308}, {385, 312, 33; 1, 33, 308}, {385, 312, 66; 1, 6, 308}, {405, 328, 80; 1, 5, 324}, {520, 420, 100; 1, 20, 416}, {665, 536, 134; 1, 2, 532}, {710, 572, 143; 1, 11, 568}, {715, 576, 132; 1, 16, 572}, {735, 592, 148; 1, 16, 588}, {765, 616, 150; 1, 15, 612}, {1045, 840, 180; 1, 24, 836}, {1395, 1120, 240; 1, 24, 1116}.

Ключевую роль в доказательстве теорем играет следующая граница Кулена–Пака [2, лемма 2].

Предложение 3. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф степени k и диаметра* $d \geq 2$. *Если окрестность некоторой вершины содержит s-коклику, то*

$$c_2 - 1 \geq \frac{(a_1+1)s - k}{\binom{s}{2}}.$$

1. Максимальные коклики локальных подграфов

Пусть Γ – граф Шилла с *b*=5 и окрестность некоторой вершины содержит *s*-коклику.

Лемма 1. *Если* Γ *имеет массив пересечений* {345,280,64;1,4,276}, *то* Γ *– граф Тервиллигера.*

Доказательство. Пусть Γ имеет массив пересечений {345,280,64;1,4,276}. Тогда $a_1 = 64$ и при *s*=6 имеем равенство $3 = (6\cdot 65 - 345)/15$ в предложении 3. По [2, теорема 4] Γ – граф Тервиллигера.

Лемма 2. *Если* Γ *имеет массив пересечений* {305,248,62;1,2,244}, {315,256,64;1,2,252}, {615,496,124;1,4,492}, {815,656,164;1,2,652}, {855, 688,172;1,4,684}, {855,688,170;1,5,684}, {910,732, 180;1,10,728}, {1000,804,201;1,3,800}, {1045,840, 210;1,6,836}, {1055,848,212;1,4,844}, {1080,868, 215;1,5,864}, {1155,928,232;1,2,924}, {1185,952, 245;1,5,948}, {1235,992,248;1,8,988}, {1535,1232, 308;1,8,1228}, {1560,1252,310;1,10,1248}, {1615, 1296,324;1,12,1292}, {1665,1336,334;1,2,1332}, *то* $s \leq 5$.

Доказательство. Пусть Γ имеет массив пересечений $\{305,248,62;1,2,244\}$.

Тогда $a_1 = 56$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $1 \geq (6 \cdot 57 - 305)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{315,256,64;1,2,252\}$. Тогда $a_1 = 58$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $1 \geq (6 \cdot 59 - 315)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{615,496,124;1,4,492\}$. Тогда $a_1 = 118$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $3 \geq (6 \cdot 119 - 615)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{815,656,164;1,2,652\}$. Тогда $a_1 = 158$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $1 \geq (6 \cdot 159 - 815)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{855,688,170;1,5,684\}$. Тогда $a_1 = 166$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $4 \geq (6 \cdot 167 - 855)/15$ в предложении 3.

Аналогично получается противоречие для графа с массивом пересечений {855, 688, 172; 1, 4, 684}.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{910,732,180;1,10,728\}$. Тогда $a_1 = 177$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $9 \geq (6 \cdot 178 - 910)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1000,804,201;1,3,800\}$. Тогда $a_1 = 195$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $2 \geq (6 \cdot 196 - 1000)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1045,840,210;1,6,836\}$. Тогда $a_1 = 204$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $5 \geq (6 \cdot 205 - 1045)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1055,848,212;1,4,844\}$. Тогда $a_1 = 206$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $3 \geq (6 \cdot 207 - 1055)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1080,868,215;1,5,864\}$. Тогда $a_1 = 211$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $4 \geq (6 \cdot 212 - 1080)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1155,928,232;1,2,924\}$. Тогда $a_1 = 226$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $1 \geq (6 \cdot 227 - 1155)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1185,952,245;1,5,948\}$. Тогда $a_1 = 232$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $4 \geq (6 \cdot 233 - 1185)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1235,992,248;1,8,988\}$. Тогда $a_1 = 242$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $7 \geq (6 \cdot 243 - 1235)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1535,1232,308;1,8,1228\}$. Тогда $a_1 = 302$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $7 \geq (6 \cdot 303 - 1535)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1560,1252,310;1,10,1248\}$. Тогда $a_1 = 307$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $9 \geq (6 \cdot 308 - 1560)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1615,1296,324;1,12,1292\}$. Тогда $a_1 = 318$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $11 \geq (6 \cdot 319 - 1615)/15$ в предложении 3.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{1665,1336,334;1,2,1332\}$. Тогда $a_1 = 328$ и при $s = 6$ нарушается неравенство $1 \geq (6 \cdot 329 - 1665)/15$ в предложении 3.

2. Графы Шилла с $s \leq 5$

В этом разделе изучаются графы с $b = 5$, в которых окрестности вершин не содержат 6-коклик.

Лемма 3. *Дистанционно регулярного* Γ *с массивом пересечений* {345,280,64;1,4,276} *не существует.*

Доказательство. По лемме 1 Γ – граф Тервиллигера. С другой стороны, по [1, следствие 1.16.6] граф Γ не является графом Тервиллигера.

Теорема 1 доказана.

Лемма 3. *Графы с массивами пересечений* {305,248,62;1,2,244} {315,256,64;1,2,252}, {615, 496,124;1,4,492}, {815,656,164;1,2,652}, {855,688, 172;1,4,684}, {855,688,170;1,5,684}, {910,732,180; 1,10,728}, {1000,804,201;1,3,800}, {1045,840,210;1, 6,836}, {1055,848,212;1,4,844}, {1080,868,215;1,5, 864}, {1155,928,232;1,2,924}, {1185,952,245;1,5, 948}, {1235,992,248;1,8,988}, {1535,1232,308;1,8, 1228}, {1560,1252,310;1,10,1248}, {1615,1296,324; 1,12,1292}, {1665,1336,334;1,2,1332} *не существуют.*

Доказательство. Если Γ имеет массив пересечений $\{305,248,62;1,2,244\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 56$ и $5 \cdot 57 < 305$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{315,256,64;1,2,252\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 58$ и $5 \cdot 59 < 315$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{615,496,124;1,4,492\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 118$ и $5 \cdot 119 < 615$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{815,656,164;1,2,652\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 158$ и $5 \cdot 159 < 815$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{855,688,172;1,4,684\}$ или $\{855,688,170;1,5,684\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 166$ и $5 \cdot 167 < 855$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{910,732,180;1,10,728\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 177$ и $5 \cdot 178 < 910$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1000,804,201;1,3,800\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 195$ и $5 \cdot 196 < 1000$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1045,840,210;1,6,836\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 204$ и $5 \cdot 205 < 1045$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1055,848,212;1,4,844\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 206$ и $5 \cdot 207 < 1055$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1080,868,215;1,5,864\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 211$ и $5 \cdot 212 < 1080$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1155,928,232;1,2,924\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 226$ и $5 \cdot 227 < 1155$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1185,952,245;1,5,948\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 232$ и $5 \cdot 233 < 1185$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1235,992,248;1,8,988\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 242$ и $5 \cdot 243 < 1235$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1535,1232,308;1,8,1228\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 302$ и $5 \cdot 303 < 1535$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1560,1252,310;1,10,1248\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 307$ и $5 \cdot 308 < 1560$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1615,1296,324;1,12,1292\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 308$ и $5 \cdot 309 < 1615$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{1665,1336,334;1,2,1332\}$, то по лемме 2 Γ не содержит 6-коклик. Противоречие с тем, что $a_1 = 328$ и $5 \cdot 329 < 1665$.

Лемма 4 и теорема 2 доказаны.

Благодарности

Работа поддержана РФФИ-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013) и Национальным исследовательским фондом Китая (проект № 12171126).

Acknowledgements

The study was supported by the RFBR and the NFSC (project No. 20-51-53013), and by the NNSF of China (No. 12171126).

Список литературы

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. *Koolen J. H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31. P. 2064–2073.
3. *Белоусов И.Н.* Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 16–26.
4. *Belousov I.N., Makhnev A.A.* Shilla graphs with *b=5* and *b=6* // Ural Math. Jornal. 2021. Vol. 7, № 2. P. 51–58.

References

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. *Koolen J.H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31. P. 2064–2073.

3. *Belousov I.N.* Shilla distance-regular graphs with $b_2 = sc_2$ // Trudy IMM UrO RAN. 2018. Vol. 24, № 3. S. 16–26.
4. *Belousov I.N., Makhnev A.A.* Shilla graphs with b=5 and b=6 // Ural Math. Jornal. 2021. Vol. 7, № 2. P. 51–58.

Просьба ссылаться на эту статью:

Ли Х., Махнёв А.А., Белоусов И.Н. Некоторые графы Шилла с *b* = 5 не существуют // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 40–45. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-40-45.

Please cite this article as:

Li H., Makhnev A.A., Belousov I.N. Some Shilla graphs with *b* = 5 do not exist // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 40–45. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-40-45.