УДК 531.391

Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений

Г. Г. Иванов[1], **Г. В. Алфёров**[2], **В. С. Королёв**[3]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет; Санкт-Петербург, Россия
e-mail: guennadi.ivanov@gmail.com; **ORCID: 0000-0003-2808-7913, AuthorID: 116900**
[2]Санкт-Петербургский государственный университет; Санкт-Петербург, Россия
e-mail: g.alferov@spbu.ru; **ORCID: 0000-0002-3989-7850, AuthorID: 2873**
[3]Санкт-Петербургский государственный университет; Санкт-Петербург, Россия
e-mail: v.korolev@spbu.ru; **ORCID: 0000-0001-5812-1794, AuthorID: 7342**

Предлагается продолжение и развитие аппарата производных чисел, использование которого позволяет исследовать поведение функций нескольких переменных и свойства решений систем дифференциальных уравнений, не требуя их дифференцируемости. Предлагаются условия и критерии использования аппарата частных и внешних производных чисел, чтобы полученные ранее результаты можно было применять при исследовании устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; периодические решения; функции Ляпунова; устойчивость решений; асимптотическая устойчивость.*

Поступила в редакцию 08.04.2022, принята к опубликованию 11.05.2022

About the Solutions Stability of Linear Differential Equations System

G. G. Ivanov[1], **G. V. Alferov**[2], **V. S. Korolev**[3]

[1]St. Petersburg State University; St. Petersburg, Russia
e-mail: guennadi.ivanov@gmail.com; **ORCID: 0000-0003-2808-7913, AuthorID: 116900**
[2]St. Petersburg State University; St. Petersburg, Russia
e-mail: g.alferov@spbu.ru; **ORCID: 0000-0002-3989-7850, AuthorID: 2873**
[3]St. Petersburg State University; St. Petersburg, Russia
e-mail: v.korolev@spbu.ru; **ORCID: 0000-0001-5812-1794, AuthorID: 7342**

The article proposes the continuation and development of the apparatus of derived numbers, which allows us to study the behavior of several variables functions and the properties of systems solutions of differential equations without their differentiability. The conditions and criteria for using the apparatus of partial and external derivatives numbers are proposed, the obtained earlier results can be applied in the study of the solutions stability of ordinary differential equations systems.

Keywords: *differential equations; periodic solutions; Lyapunov functions; asymptotic stability.*

Received 08.04.2022, accepted 11.05.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-31-39

Введение

Многие науки занимаются созданием математических моделей различных процессов. Уравнения движения в задачах механики выводятся на основе законов движения для системы материальных точек или для твердых тел И. Ньютона и Л. Эйлера, связывающих динамические и кинематические характеристики.

Задачи устойчивости движения различных механических систем в числе первых рассматривали Л. Эйлер и Ж. Лагранж. Известная теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости положений равновесия консервативных систем является первым общим результатом в исследованиях условий устойчивости: "Если потенциальная энергия в положении равновесии имеет минимум, то система будет иметь устойчивое невозмущенное движение".

Создателем теории устойчивости движения считают А.М. Ляпунова в виде отдельной математической дисциплины. Теоремы Ляпунова определяют условия и критерии для многих задач.

Классические исследования оставляют место для новых результатов в рассматриваемой области.

В работах [1–17] развиваются основанные на идеях функционального анализа методы исследования дифференциальных уравнений.

В монографии [9] И.П. Натансон показал, как аппарат производных чисел можно использовать в исследовании поведения функций вещественной переменной.

Понятия частных производных чисел и внешних производных чисел рассматриваются с целью их использования для изучения устойчивости решений системы дифференциальных уравнений через исследование разрешимости системы уравнений специального вида [12–18],

Занимаясь развитием аппарата производных чисел для исследования функций нескольких переменных, мы вводим понятия частных и внешних производных чисел и показываем, как этот аппарат можно использовать в задаче интегрируемости поля плоскостей касательных к дифференциальному многообразию. Развитие этого метода позволяет обобщить ряд теорем математического анализа, а также получить новые результаты [17–21], которые можно использовать при исследовании устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Устойчивость решений

Рассмотрим поведение объекта, который описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad f(t,0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – n-мерный вектор фазовых переменных, а $f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_n(t,x))^T$ – n-мерная вектор-функция.

Решение системы уравнений (1), которое начинается при $t = t_0$ в точке $x = x_0$, обозначим через $x(t, t_0, x_0)$.

Будем говорить, что решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Введем класс функций $\mathcal{H}$, считая, что функция $l(r)$ принадлежит этому классу $l(r) \in \mathcal{H}$, если $l(r)$ − непрерывная строго возрастающая при $r \in [0, H]$, где $H = const > 0$, или при $r \in [0, \infty]$ функция, причем $l(0) = 0$.

Функцию $V(t,x)$, $V(t,0) \equiv 0, t \geq 0$, будем называть определенно положительной, если существует функция $l(r) \in \mathcal{H}$, такая, что в области

$$t \geq 0, \ \|x\| \leq H, \tag{2}$$

выполняется неравенство

$$V(t,x) \geq l(\|x\|).$$

Это определение эквивалентно общепринятому определению положительной определенности функции $V(t,x)$.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений:

$$K_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\},$$
$$S_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\},$$
$$r = const > 0.$$

Для краткости положим

$$S_1(0) = S.$$

Теорема 1.

Предположим, что в области (2) существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \ i,j = 1,2, \dots, n.$$

Тогда, для того чтобы решение $x = 0$ системы (1) было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы в области

$$t \geq 0, \ \|x\| \leq h, \ 0 < h = const < H, \tag{3}$$

система

$$a_0(t,x) + a(t,x) \cdot F(t,x) \leq 0, \tag{4}$$

$$a(t,x) = (a_1(t,x), \dots, a_n(t,x)),$$
$$\omega \wedge \lambda[\omega] \equiv 0,\ \omega = a_0 dt + a_1 dx + \cdots + a_n dx \qquad (5)$$

имела непрерывное решение $(a_0(t,x), a(t,x))$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1). В области

$$t \geq 0,\ \ x \in K_h(0)\{0\}, \qquad (6)$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2(t,x) > 0;$$

2). В области

$$t \geq 0,\ \ \mu \in [0,h],\ \ x \in S, \qquad (7)$$
$$\int_0^{\mu} a(t,\mu' x) \cdot x d\mu' \geq l(\mu), \qquad l(\mu) \in \mathcal{H}.$$

Доказательство

Необходимость

Воспользуемся методом, предложенным в работе [10] К.П. Персидским. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = F(t,y)\phi(y) = G(t,y) \qquad (8)$$

в которой $\phi -$ скалярная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\phi(y) = \begin{cases} 1, & \|y\| \leq h, \\ 0, & H_1 \leq \|y\| \leq H, \end{cases} \qquad (9)$$
$$0 < h < H_1 < H,$$

причем

$$0 \leq \phi(y) \leq 1.$$

Через $y(t;t_0,y_0)$ обозначим решение системы (8), определенное начальными условиями:

$$y(t_0;t_0,y_0) = y_0.$$

Прежде всего отметим, что функция $y(0;t,x)$ определена в области (3). Действительно, для любой точки (t,x) из области (3), согласно (9), ни при каком $\tau \geq 0$ не может нарушиться неравенство

$$\|y(\tau;t,x)\| \leq H_1,$$

откуда следует, что функция $y(\tau;t,x)$ определена при всех $\tau \geq 0$.

Из приведенного замечания заключаем, что функция

$$V(t,x) = \|y(0;t,x)\|^2 \qquad (10)$$

определена в области (3), причем из дифференцируемости решений $y(t;t_0,x_0)$ по начальным данным следует существование непрерывных частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial x_i},\ i = 1,2,\dots,n.$$

Положим

$$a_0(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t},$$
$$a_i(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

и покажем, что определенная таким образом функция $(a_0(t,x), a(t,x))$ является решением системы (4)–(5), удовлетворяющим требуемым ограничениям.

Согласно (9) правые части систем (1) и (8) в области (3) совпадают, следовательно, в этой области совпадают и производные функции (10) в силу этих систем:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \dot{V}_{(8)}(t,x).$$

Отсюда, учитывая, что производная $\dot{V}(t,x)$ может быть, согласно [5], представлена в виде

$$\dot{V}(t,x) = \left\{\frac{d}{d\tau} V\big(\tau, x(\tau;t,x)\big)\right\}_{\tau=t}, \qquad (11)$$

а также, что в силу свойства единственности решения имеет место равенство

$$x\big(t;\tau,x(\tau;t_0,x_0)\big) = x(t;t_0,x_0), \qquad (12)$$

получаем

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \dot{V}_{(8)}(t,x) =$$
$$= \{\frac{d}{d\tau}\big\|y\big(0;\tau,y(\tau;t,x)\big)\big\|^2\}_{\tau=t}$$
$$= \{\frac{d}{d\tau}\|y(0;t,x)\|^2\}_{\tau=t} \equiv 0.$$

Но

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} \cdot F(t,x) = a_0(t,x) + a(t,x) \cdot F(t,x),$$

откуда следует, что $\big(a_0(t,x), a(t,x)\big)$ удовлетворяет неравенству (4).

Построим уравнение в вариациях, соответствующее системе (8). Оно будет иметь вид

$$\dot{z} = \left.\frac{\partial G(t,y)}{\partial y}\right|_{y=y(t;t_0,y_0)} z. \qquad (13)$$

Выберем решение системы (8), начинающееся в момент $t_0 \geq 0$ в точке $y_0 \neq 0$.

Нетрудно проверить, что матрица

$$Y(t;t_0,y_0) = \frac{\partial y(t;t_0,y_0)}{\partial y_0}$$

удовлетворяет системе (13), причем

$$Y(t_0;t_0,y_0) = E,$$

где E – единичная матрица.

Таким образом, $Y(t;t_0,y_0)$ является для системы (13) фундаментальной матрицей решений, а следовательно, и неособой при всех $t \geq 0$.

Далее, из (10) имеем

$$\left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\| = 2\|y^T(0;t,x) Y(0;t,x)\|.$$

Но, как было показано выше, матрица $Y(0;t,x)$ неособая, а $y(0;t,x)$ не обращается в ноль в силу свойства единственности решения, откуда следует, что $\left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\|$ не обращается в ноль в области (6).

Согласно введенным выше обозначениям,

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = a(t,x),$$

и потому

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2(t,x) \geq \|a(t,x)\|^2 = \left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\right\|^2 > 0,$$

т.е. выполняется условие 1).

Покажем, что функция (10) определенно положительна. Так как решение $x = 0$ системы (1) устойчиво и, следовательно, решение $y = 0$ системы (8) устойчиво, то для любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < h$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из

$$\|x\| < \delta$$

следует

$$\|y(t; 0, x)\| \leq \varepsilon,$$

при всех $t \geq 0$.

Покажем, что если

$$t \geq 0,\ \varepsilon \leq \|x\| \leq h,$$

то

$$\|y(0; t, x)\| \geq \delta.$$

Допустим противное, что существует точка (t^*, x^*), для которой

$$t^* \geq 0, \qquad \varepsilon \leq \|x^*\| \leq h,$$

но

$$\|y(0; t^*, x^*)\| < \delta.$$

Отсюда, в силу устойчивости решения $y = 0$ системы (8), следует, что выполняется неравенство

$$\|y(t; 0, y(0; t^*, x^*))\| < \varepsilon,$$

при всех $t \geq 0$. Но в силу (12)

$$y(t; 0, y(0; t^*, x^*) = y(t; t^*, x^*),$$

и потому при всех $t \geq 0$ будет

$$\|y(t; t^*, x^*)\| < \varepsilon,$$

Полагая в этом неравенстве $t = t^*$, получаем

$$\|y(t^*; t^*, x^*)\| = \|x^*\| < \varepsilon,$$

что противоречит выбору точки (t^*, x^*)

Пусть теперь

$$h > \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_s > \cdots$$

такая последовательность положительных чисел, что $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$. Согласно предыдущему, существует последовательность

$$\delta_1 > \cdots > \delta_s > \cdots, \qquad \delta_s > 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \delta_s = 0,$$

для которой

$$\|y(0; t, x)\| \geq \delta_s$$

при

$$\varepsilon_{s+1} \leq \|x\| < \varepsilon_s,$$

Тогда в области (3) выполняется неравенство

$$\|y(0; t, x)\| \geq l(\|x\|),\ l(r) \in \mathcal{H}, \tag{14}$$

где, например, можно положить при

$$\varepsilon_{s+1} \leq \|x\| \leq \varepsilon_s,$$

$$l(\|x\|) = \delta_{s+1} + \frac{\delta_s - \delta_{s+1}}{\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1}}(\|x\| - \varepsilon_{s+1}).$$

Следовательно, функция (10) определенно положительная.

Выберем в области (7) произвольную точку (t, μ, x). Очевидно, имеет место представление

$$V(t, \mu x) = \int_0^\mu \frac{\partial V(t, \mu' x)}{\partial x} x d\mu',$$

из которого, в силу (14), как раз и следует, что

$$\min_{t\geq 0, \|x\|=1} \int_0^\mu a(t, \mu' x)\, x d\mu' \geq l(\mu),$$

т.е. выполняется условие 2).

Наконец, условие 1) показывает, что в области (6) задана непрерывная l-форма ω, нигде не обращающаяся в нуль-форму.

В силу своего определения форма ω задает поле гиперплоскостей, которое является полем касательных плоскостей к семейству поверхностей уровня функции (10). Следовательно, это поле гиперплоскостей является вполне интегрируемым, откуда, на основании результатов, полученных в [12], заключаем, что для построенной функции ω должно выполняться соотношение (5).

Достаточность

Соотношение (5) и ограничение 1) показывают, что существует функция $V(t,x)$, производная которой в силу системы (1) удовлетворяет неравенству (4). Ограничение 2) показывает, что функция $V(t,x)$, является положительно определенной. Таким образом, если выполнены все требования теоремы, то обязательно существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об устойчивости [5–7].

2. Равномерная устойчивость

Решение $x = 0$ системы (1) будем называть равномерно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $t_0 \geq 0$ и $\|x\| < \delta$ следует

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$$

для всех $t \geq t_0$.

Будем говорить, что решение $x = 0$ системы (1) является равномерно притягивающим, если существует $\Delta_0 = const > 0$ такое, что условие

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$$

выполняется равномерно по (t_0, x_0) из области

$$t_0 \geq 0, \quad \|x_0\| < \Delta_0. \tag{15}$$

Если решение $x = 0$ системы (1) является одновременно равномерно устойчивым и равномерно притягивающим, то его будем называть *равномерно асимптотически устойчивым.*

Теорема 2.

Предположим, что в области (2) функции F_i и их частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ непрерывны и ограничены:

$$|F_i(t,x)| \leq B,\ B = const, i = 1,2,\dots,n, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right| \leq A,\ A = const,\ i,j = 1,2,\dots,n. \tag{17}$$

Тогда, для того чтобы решение $x = 0$ системы (1) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы в области (3), где h – достаточно малая постоянная, система (4)–(5) имела непрерывное решение $(a_0(t,x), a(t,x))$, удовлетворяющее следующим ограничениям:

1) в области (6)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2(t,x) > 0,$$

2) в области (7)

$$l_1(\mu) \leq \int_0^{\mu} a(t,\mu' x)\, x d\mu' \leq l_2(\mu),$$

3) при $t \geq 0, \|x\| = 1$,

$$\max[a_0(t,\mu x) + a(t,\mu x)\cdot F(t,\mu x)] \leq -l_3(\mu),$$

$$l_k(r) \in \mathcal{H},\ k=1, 2,3.$$

Доказательство

Необходимость

Пусть решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво. Тогда, согласно определению, оно является равномерно притягивающим, и, следовательно, существует $\Delta_0 \leq H$, для которого $\| x(t; t_0, y_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по (t_0, x_0) из области (15). Ясно, что решения системы (1) будут стремиться к нулю равномерно по (t_0, x_0), также и в области (3), если там выбрать h из интервала $(0, \Delta_0)$. При таком h, как легко показать, для всех $\tau \geq 0$ в области (3) выполняется неравенство

$$\|x(t_0 + \tau; t_0, x_0)\|^2 < \phi(\tau),$$

где $\phi(\tau)$ – положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\tau\to\infty} \phi(\tau) = 0.$$

Покажем, что при $\tau > 0$ в области (3) справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial \|x(t_0 + \tau; t_0, x_0)\|^2}{\partial x_{j0}}\right| < Pe^{Qr} \equiv M(\tau),$$

$$j = 1,2,\dots,n,$$

$$\left|\left\{\frac{\partial \|x(t; t_0, x_0)\|^2}{\partial t_0}\right\}_{t=t_0+\tau}\right| < Pe^{Qr} \equiv M(\tau), \tag{18}$$

$$P > 0,\ Q > 0.$$

Уравнения в вариациях для системы (1) имеют вид

$$\dot{x} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} p_{sj} z_j,\ \ s = 1,2,\dots,n, \tag{19}$$

где

$$p_{sj} = \left.\frac{\partial F_s(t,x)}{\partial x_j}\right|_{x=x(t;t_0,x_0)}.$$

Как известно, производные

$$z_{sj} = \frac{\partial x_s(t;t_0,x_0)}{\partial x_{j0}},$$

$$z_s^* = \frac{\partial x_s(t; t_0, x_0)}{\partial t_0}, \qquad s,j = 1,2,..,n,$$

удовлетворяют системе (19) и начальным условиям

$$z_{sj}\big|_{t=t_0} = \delta_{sj},$$

$$z_s^*|_{t=t_0} = -F_s(t_0, x_0), \tag{20}$$

где δ_{sj} – символ Кронекера.

Полагая в (19)

$$u_s = z_s e^{-Qt},$$

получим

$$\dot{u}_s = p_{s1}u_1 + \dots + p_{sn}u_n - Qu_s,$$

$$\mathrm{s} = 1,2,\dots,\mathrm{n},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\textstyle\sum_{s=1}^{n} u_s^2 = \sum_{s,j}^{n} p_{sj} u_s\, u_j - Q\sum_{s=1}^{n} u_s^2. \tag{21}$$

При достаточно большом положительном Q, в силу (17), правая часть выражения (21) будет определенно отрицательной формой.

Следовательно, при $t \geq t_0$

$$\textstyle\sum_{s=1}^{n} u_s^2(t) \leq \sum_{s=1}^{n} u_s^2\,(t_0),$$

откуда

$$\textstyle\sum_{s=1}^{n} z_s^2(t) \leq \sum_{s=1}^{n} z_s^2\,(t_0)e^{2Q(t-t_0)}.$$

Применяя это неравенство к решениям z_{sj} и $z^* - s$, а также учитывая (16) и (20), получим оценки (18).

И.Г. Малкин [8] показал, что для определенных выше функций $\phi(\tau)$ и $M(\tau)$ можно построить непрерывно дифференцируемую функцию $G(\tau)$, такую, что

1. $G'(\eta) > 0$ при $\eta > 0$,
2. $G(0) = G'(0) = 0$,
3. $\int_0^{\infty} G\left(\phi(\tau)\right)d\tau < \infty$,
4. $\int_0^{\infty} G'\left(\phi(\tau)\right)M(\tau)d\tau < \infty$.

В силу условий 1 и 2 следует $G(\eta) \in \mathcal{H}$.

Построим функцию $V(t,x)$, положив

$$V(t,x) = \textstyle\int_t^{\infty} G\,(\|x(\tau; t,x)\|^2)d\tau. \tag{22}$$

Функция (22) определена и непрерывна в области (3) и имеет там непрерывные частные производные:

$$a_0(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t},$$

$$a_i(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}.$$

Причем, используя свойство 3 функции $G(\eta)$, можно показать, повторяя рассуждения И.Г. Малкина, что существует постоянная $N > 0$, для которой

$$|a_0(t,x)| \le N, |a_i(t,x)| \le N, i = 1,2, \dots n. \quad (23)$$

Покажем, что $(a_0(t,x), a(t,x))$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. Воспользовавшись представлением (11) и учитывая свойство единственности решения (12), найдем производную $\dot{V}(t,x)$ в силу системы (1):

$$\dot{V}(t,x) = \left\{\frac{d}{d\xi} V\big(\xi, x(\xi; t, x)\big)\right\}_{\xi=t} =$$

$$= \left\{\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\infty G(\|x(\tau; \xi, x(\xi; t,x)\|^2) d\tau\right\}_{\xi=t} \quad (24)$$

Но, в силу принятых обозначений

$$\dot{V}(t,x) = a_0(t,x) + a(t,x)F(t,x).$$

Таким образом, из (24) сразу следует, что $\big(a_0(t,x), a(t,x)\big)$ является решением неравенства (4), удовлетворяющим ограничению 3). А также $\big(a_0(t,x), a(t,x)\big)$ удовлетворяет ограничению 1).

Действительно, если бы это было не так, то в области (6) нашлась бы точка (t^*, x^*), в которой

$$a_i(t^*, x^*) = 0, \quad i = 1,2, \dots, n.$$

Но тогда в этой точке должно выполняться равенство

$$\dot{V}(t^*, x^*) = 0,$$

противоречащее (24). Откуда и следует справедливость нашего утверждения.

Дословно повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, с учетом свойства 1) и ссылкой на результаты, полученные в [12], убеждаемся, что $\big(a_0(t,x), a(t,x)\big)$ удовлетворяет равенству (5).

Покажем, наконец, что $\big(a_0(t,x), a(t,x)\big)$ удовлетворяет ограничению 2).

Пусть

$$\propto = \frac{\|x\|}{2B\sqrt{n}},$$

где B определено неравенством (16).
Тогда

$$V(t,x) \ge \int_0^\infty G(\|x(t+\tau; t,x)\|^2) d\tau. \quad (25)$$

Но

$$|x_s(t+\tau; t,x) - x_s| = \left|\int_t^{t+\tau} F_s(\xi, x(\xi; t,x)) d\xi \le B\tau\right|, \text{ s=1,2,…,n.}$$

Следовательно, при $0 \le \tau \le \alpha$

$$\sum_{s=1}^n \{x_s(t+\tau; t,x) - x_s\}^2 \le nB^2 \propto^2 = \frac{1}{4}\|x\|^{\ 2}.$$

Откуда

$$\|x_s(t+\tau; t,x)\|^2 \ge \frac{1}{4}\|x\|^{\ 2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получаем

$$V(t,x) \ge \frac{1}{2B\sqrt{n}}\|x\| G(\tfrac{1}{4}\|x\|^2) \equiv l_1(\|x\|). \quad (27)$$

С другой стороны, в силу единственности решения и формулы (22) имеем

$$V(t,0) \equiv 0.$$

На основании этого с учетом (23) получаем

$$V(t,x) = V(t, x_1, \dots, x_n) =$$
$$= V(t, x_1, \dots, x_n) - V(t, 0, x_2 \dots, x_n) +$$
$$+ V(t, x_1, x_2 \dots, x_n) - V(t, x_1, 0, \dots, x_n) + \cdots$$
$$+ V(t, 0, \dots, 0, x_n) - V(t, 0, \dots, 0) \le$$
$$\le N \sum_{i=1}^n |x_i| \le Nn|x| \le l_2(|x|). \quad (28)$$

Выберем в области (7) произвольную точку (t^*, μ^*, x^*). Из определения

$$a(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x},$$

следует, что

$$V(t^*, \mu^* x^*) = \int_0^{\mu^*} a(t^*, \mu x^*) \cdot x^* d\mu.$$

Учитывая в этом равенстве оценки (27) и (28), заключаем, что для рассматриваемого решения системы (4)–(5) выполняется и ограничение 2).

Достаточность

Пусть выполнены все условия теоремы. Тогда из равенства (5) и условия 2), в силу результатов, полученных в [12], следует, что существует функция $V(t,x)$, производная которой в силу системы (1) удовлетворяет неравенству (4) и является, ввиду 3), отрицательно определенной функцией. Условие 2) показывает, что эта функция является положительно определенной и допускает бесконечно малый высший предел по x.

Таким образом, выполнены достаточные условия для обеспечения равномерной асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (1).

Заключение

Предложенным методом можно получить целый ряд теорем, дающих необходимые или достаточные условия устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, но мы на этом останавливаться не будем.

В наших работах [12–29] изложены аппарат производных чисел, частных и внешних производных чисел, а также показаны некоторые возможности применения. Но, как видно из наших работ по исследованию функций вещественной переменной, все полученные результаты можно переписать на языке производных Дини, вводя, разумеется, понятия частных и внешних производных Дини. Мы это делать не стали, чтобы не загромождать изложение более сложными формулами.

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Теория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1975.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1968. 576 с.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. (Методы Ляпунова и их применение). М.: Высшая школа, 1973.
6. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача устойчивости. М.: Наука, 1969.
8. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
9. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.: Наука, 1974.
10. *Персидский К.П.* Избранные труды: Т. 1. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1976.
11. *Плисс В.А*. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.
12. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Аппарат производных чисел и возможности применения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(54). С. 5–18.
13. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III Междунар. конф. 2015. С. 33–34.
14. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 37–48.
15. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
16. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединенными элементами // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 139–143.
17. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56), С. 5–13.
18. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type. (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
19. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
20. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. P. 74–112. DOI:10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
21. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2017, AIP Conference Proceedings. Vol. 1863. P. 080002. DOI:10.1063/1.4992263.
22. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013, DOI: 10.1063/1.5079216.
23. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, No 9, P. 171. DOI: 10.3390/math 6090171.
24. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements.

(2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.

25. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics. 7(8). 677.
26. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of nonsmooth one-variable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 - Proceedings, 7973965.
27. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1959. 080006.
28. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
29. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.

References

1. *Arnol'd V.I.* Teoriya differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1975.
2. *Arnol'd V.I.* Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki. M.: Nauka, 1979.
3. *Gantmaher F.R.* Teoriya matric. M.: Nauka, 1968. 576 s.
4. *Demidovich B.P.* Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti. M.: Nauka, 1967.
5. *Zubov V.I.* Ustojchivost' dvizheniya. (Metody Lyapunova i ih primenenie). M.: Vysshaya shkola, 1973.
6. *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravleniya. M.: Nauka, 1975.
7. *Lyapunov A.M.* Obshchaya zadacha ustojchivosti. M.: Nauka, 1969.
8. Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya. M.: Nauka, 1966.
9. *Natanson I.P.* Konstruktivnaya teoriya funkcij. M.: Nauka, 1974.
10. *Persidskij K.P.* Izbrannye trudy: T. 1 Teoriya ustojchivosti reshenij differencial'nyh uravnenij. Alma-Ata: Nauka, 1976.
11. *Pliss V.A.* Nelokal'nye problemy teorii kolebanij. M.-L.: Nauka, 1964.
12. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Apparat proizvodnyh chisel i vozmozhnosti primeneniya // Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2021. № 3(54). S. 5–18.
13. *Ivanov G.G.* K voprosu ustojchivosti linejno odnorodnyh sistem s pereklyucheniyami // Ustojchivost' i processy upravleniya: mater. III Mezhdunar. konferenciya. 2015. S. 33–34.
14. *Ivanov G.G., Alfёrov G.V., Efimova P.A.* Usloviya ustojchivosti linejnyh odnorodnyh sistem s pereklyucheniyami // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2016. № 3(34). S. 37–48.
15. *Ivanov G.G., Alfёrov G.V., Efimova P.A.* Ustojchivost' selektorno-linejnyh differencial'nyh vklyuchenij // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017. № 2(37). S. 25–30.
16. *Ivanov G.G., Alfёrov G.V., Efimova P.A.* Stabilizaciya programmnogo dvizheniya ob"ekta upravleniya s uprugo prisoedinennymi elementami // Processy upravleniya i ustojchivost'. 2017. T. 4, № 1. S. 139–143.
17. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S.* Teorema ob oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti i ee prilozheniya // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022. № 1(56). S. 5–13.
18. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type. (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
19. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
20. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. P. 74–112. DOI:10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
21. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2017, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863. P. 080002. DOI:10.1063/1.4992263.
22. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.

23. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, No 9. P. 171. DOI: 10.3390/math 6090171.
24. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements. (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.
25. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics. 7(8). 677.
26. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of nonsmooth one-variable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 - Proceedings, 7973965.
27. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1959. 080006.
28. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
29. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.

Просьба ссылаться на эту статью:

Иванов Г.Г., Алфёров Г.В. Королёв В.С. Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 31–39. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-31-39.

Please cite this article as:

Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S. About the Solutions Stability of Linear Differential Equations System // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 31–39. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-31-39.