Механика

УДК 531.36: 534.1

О задаче управления двухзвенного плоского манипулятора с неразделенными многоточечными промежуточными условиями

В. Р. Барсегян[1], **Т. А. Симонян**[2], **А. Г. Матевосян**[3]
[1]Институт механики НАН Армении; Ереван, Республика Армения
Ереванский государственный университет; Ереван, Республика Армения
e-mail: barseghyan@sci.am; **ORCID: 0000-0001-6518-3694, AuthorID: 269389**
[2]Ереванский государственный университет; Ереван, Республика Армения
e-mail: simtom09@gmail.com
[3] Ереванский государственный университет; Ереван, Республика Армения
e-mail: matevosaram@gmail.com

Решена задача программного управления движением двухзвенного плоского манипулятора на неподвижном основании с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями фазового вектора в промежуточных моментах времени. Абсолютно жесткие звенья манипулятора соединены между собой идеальным цилиндрическим шарниром, и с помощью такого же шарнира первое звено крепится к основанию. Таким образом, манипулятор может совершать движения только в горизонтальной плоскости. Движения манипулятора описываются системой уравнений Лагранжа второго рода. Задача построения программного управления движением такой динамической системы заключается в построении законов изменения управляющих моментов, позволяющих манипулятору осуществлять программное движение, переводящее систему из заданного начального состояния, обеспечивая удовлетворение неразделенным многоточечным промежуточным условиям, в конечное состояние. Используя методы теории управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями, построены решения рассматриваемой задачи. В качестве приложения предложенного подхода построены функции управления и соответствующего движения с заданными неразделенными условиями на значения координат фазового вектора в некоторых двух промежуточных моментах времени. Построены соответствующие графики для координат фазового вектора манипулятора, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: *двухзвенный манипулятор; управляющее воздействие; многоточечные условия; фазовые ограничения.*

Поступила в редакцию 18.02.2022, принята к опубликованию 06.05.2022

On the Control Problem of a Two-link Flat Manipulator with Nonseparate Multipoint Intermediate Conditions

V. R. Barseghyan[1], **T. A. Simonyan**[2], **A. G. Matevosyan**[3]
[1]Institute of Mechanics of NAS of RA; Yerevan, Republic of Armenia
Yerevan State University; Yerevan, Republic of Armenia
e-mail: barseghyan@sci.am; **ORCID: 0000-0001-6518-3694, AuthorID: 269389**
[2]Yerevan State University; Yerevan, Republic of Armenia
e-mail: simtom09@gmail.com
[3]Yerevan State University; Yerevan, Republic of Armenia
e-mail: matevosaram@gmail.com

The article solves the problem of programmed control of the movement of a two-link flat manipulator on a fixed base with given initial, final conditions and unseparated values of the phase vector at intermediate points in time. Absolutely rigid links of the manipulator are interconnected by an ideal cylindrical hinge, and using the same hinge the first link is fixed to the base. Thus, the manipulator can perform movements only in the horizontal plane. The movements of the manipulator are described by a system of second-order Lagrange equations. The task of constructing programmed movement control of such a dynamic system is to construct laws of change in control moments that allow the manipulator to carry out programmed movement that transfers the system from a given initial state, ensuring satisfaction of the unseparated multipoint intermediate conditions, to the final state. Solutions of the considered problem are constructed using the methods of theory of control of finite-dimensional systems with unseparated multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, functions of control and corresponding movement are constructed with given unseparated conditions on the coordinates of the phase vector at some two intermediate points in time. The corresponding graphs are constructed for the coordinates of the phase vector of the manipulator, confirming the theoretical results obtained.

Keywords: *two-link manipulator; control action; multipoint conditions; phase constraints.*

Received 18.02.2022, accepted 06.05.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-53-60

Введение

Развитие высоких технологий привело к повсеместному использованию манипуляционных роботов в различных сферах человеческой деятельности, таких как различные области промышленности, сервисные обслуживания и т.д. Такая широкая востребованность требует разработки и проектирования современных (высокоэффективных) методов управления, обладающих простотой реализации управления манипулятором, приводящих к желаемому движению.

При исследовании движений манипуляторов и проектировании систем управления обычно используется механическая модель манипулятора в виде системы абсолютно твердых тел (стержней), которые последовательно соединены между собой при помощи идеальных шарниров [6–8, 10, 12].

Синтез систем управления манипуляционными роботами требует изучения в качестве объектов управления сложных многозвенных механических систем [7, 8, 9, 11].

Развитие теории исполнительных систем манипуляторов ставит новые проблемы перед теоретической механикой, теорией управления, вычислительной математикой.

В ряде важных прикладных задач возникают задачи управления движением манипуляторов, как динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Характерной чертой этих задач является наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями наличие неразделенных (нелокальных) условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Исследования этих задач имеют важные значения как для теории, так и для приложения.

Некоторые вопросы управления и оптимального управления линейных динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями исследованы, в частности, в работах [1–5].

В настоящей статье рассматривается задача управления движением двухзвенного плоского манипулятора на неподвижном основании с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями фазового вектора в промежуточных моментах времени.

На основе математической модели двухзвенного плоского манипулятора в виде уравнений Лагранжа второго рода [13], в которых в качестве управлений являются главные моменты, построены явные виды управляющего воздействия и соответствующего движения.

1. Математическая модель манипулятора и постановка задачи

Рассматривается двухзвенный манипулятор (см. рис. 1) состоящий из двух абсолютно твердых тел (звеньев) G_1, G_2, соединенных шарниром O_2.

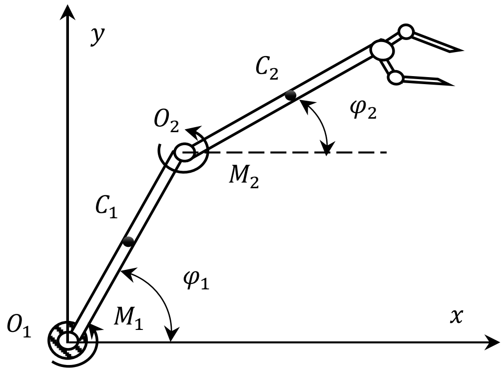

Рис. 1. *Двухзвенный манипулятор*

Тело G_1 при помощи шарнира O_1 связано с неподвижным основанием. Шарниры являются идеальными, цилиндрическими, а их оси параллельны друг другу. Система совершает движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров O_1, O_2. Каждое звено манипулятора представляет собой абсолютно жесткий однородный стержень длины L. Предполагается, что звено G_2 включает в себя исполнительный орган (схват), т.е. масса схвата пренебрегается и динамические характеристики отдельно не рассматриваются.

Управление манипулятором осуществляется при помощи двух независимых приводов D_1, D_2. Привод D_1 осуществляет взаимодействие тела G_1 с основанием, а D_2 – взаимодействие между звеньями G_1, G_2 манипулятора. Главные векторы сил, создаваемых приводами D_1, D_2, равны нулю, а главные моменты относительно осей шарниров O_1, O_2 соответственно равны M_1, M_2. Величины M_1, M_2 приняты за управляющие функции в рассматриваемой модели манипулятора. Отметим, что из физического характера управляющих воздействий следует ограниченность функций управления. Предполагается также, что функции управления принадлежат классу кусочно непрерывных функций. Действие других сил не учитывается.

Введем в рассматриваемой плоскости неподвижную декартову систему координат O_1XY с началом на оси шарнира O_1.

Обозначим через φ_1, φ_2 – углы между горизонтальной осью и первым и вторым звеньями соответственно, I_1, I_2 – моменты инерции тел G_1, G_2 относительно соответствующих осей. $L_1 = |O_1O_2|$ – расстояние между осями шарниров, $L_2 = |O_2C_2|$ – расстояние от оси O_2 до центра масс C_2 звена G_2.

Кинетическая энергия двухзвенника равна

$$K = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_2L_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(I_2 + m_2L_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2 + $$
$$+ m_2L_1L_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Уравнения движения рассматриваемого манипулятора в форме дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\begin{gathered}\left(I_1 + m_2L_1^2\right)\ddot{\varphi}_1 + m_2L_1L_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\ddot{\varphi}_2 + \\ + m_2L_1L_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_2^2 = M_1 - M_2 \\ (I_2 + m_2L_2^2)\ddot{\varphi}_2 + m_2L_1L_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\ddot{\varphi}_1 - \\ - m_2L_1L_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_1^2 = M_2\end{gathered} \qquad (1.1)$$

Предполагается, что центр масс второго звена расположен на оси шарнира O_2, соединяющего с первым звеном, которое соответствует статической уравновешенности второго звена манипулятора. В этом случае, принимая, что $|O_2C_2| = L_2 = 0$, уравнение (1.1) представляется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u_1,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = u_2, \qquad (1.2)$$

где $$x_1 = \left(I_1 + m_2L_1^2\right)\varphi_1,$$

$$x_2 = \left(I_1 + m_2L_1^2\right)\dot{\varphi}_1,\ x_3 = \left(I_2 + m_2L_2^2\right)\varphi_2,$$

$$x_4 = \left(I_2 + m_2L_2^2\right)\dot{\varphi}_2.$$

Управляющие функции u_1 и u_2 имеют вид

$$u_1 = M_1 - M_2,\ u_2 = M_2,$$

где M_1, M_2 – главные моменты относительно осей шарниров.

Пусть заданы начальное и конечное

$$x(t_0) = x_0,\ x(T) = x_T \qquad (1.3)$$

состояния системы (1.2) и в некоторые фиксированные промежуточные моменты времени $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ заданы неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия

$$\sum_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = \alpha\,, \qquad (1.4)$$

где α – q-мерный ($q \le 4$) вектор столбец, $F_k - (q \times 4)$ мерные матрицы $(k = 1,...,m)$, элементы которых являются вещественными числами [3].

Вообще для ряда случаев можно предполагать, что в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1,...,m)$ не все значения координат фазового вектора $x(t_k)$ присутствуют в (1.4), а лишь некоторые значения координат фазового вектора. В таких случаях будем считать, что соответствующие элементы матрицы F_k будут нулями.

Система (1.2) с многоточечным промежуточным условием (1.4) на промежутке времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой [2]. Рассмотрим следующую задачу.

Требуется найти программное управляющее воздействие $u = u(t)$, $t \in [t_0, T]$ и движение $x = x(t)$, переводящее решение системы (1.2) из начального состояния $x(t_0)$, обеспечивая удовлетворение неразделенным промежуточным условиям (1.4) в конечное состояние $x(T)$.

2. Решение задачи

Для решения задачи напишем решение уравнения (1.2), выходящее из начального состояния $x(t_0)$, и для моментов времени $t = t_k$ ($k = 1,...,m$), подставляя значения $x(t_k)$ в (1.4), получим следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{m} F_k X[t_k, t_0] x(t_0) + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t_k} F_k X[t_k, \tau] B u(\tau) d\tau = \alpha\,, \qquad (2.1)$$

а для конечного момента времени $t = T$ будем иметь

$$x(T) = X[T, t_0] x(t_0) + \int_{t_0}^{T} X[T, \tau] B u(\tau) d\tau\,, \qquad (2.2)$$

где через $X[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.2).

Матрицы B и $X[t, \tau]$ имеют следующие виды:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X[t,\tau] = \begin{pmatrix} x_{11}(t,\tau) & x_{12}(t,\tau) & 0 & 0 \\ 0 & x_{22}(t,\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}(t,\tau) & x_{34}(t,\tau) \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}(t,\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$x_{11}(t,\tau) = x_{22}(t,\tau) = x_{33}(t,\tau) = x_{44}(t,\tau) = 1;$$

$$x_{12}(t,\tau) = x_{34}(t,\tau) = t - \tau\,. \qquad (2.3)$$

Используя подходы, приведенные в работах [2, 3], из (2.1) и (2.2) получим следующее интегральное соотношение:

$$\int_{t_0}^{T} H[t] u(t) dt = \eta(t_0, ..., T)\,, \qquad (2.4)$$

где приняты следующие обозначения:

$$H[t] = \begin{pmatrix} F(t)B \\ X[T,t]B \end{pmatrix},$$

$$\eta(t_0, ..., T) = \begin{pmatrix} \alpha - F x(t_0) \\ x(T) - X[T, t_0] x(t_0) \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} F_k[t] = \sum_{k=1}^{m} F_k X[t_k, t]\,,$$

$$F = \sum_{k=1}^{m} F_k X[t_k, t_0] = F(t_0)\,,$$

$$F_k[t] = \begin{cases} F_k X[t_k, t], \text{ при } t_0 \le t \le t_k \\ 0, \text{ при } t_k < t \le t_{m+1} = T \left(k = 1, ..., m+1\right) \end{cases} \qquad (2.5)$$

Здесь $H[t]$ – блочная матрица с размерностью $((q+4) \times 2)$, известные матрицы $F(t)$ и F имеют размерность $(q \times 2)$, а $\eta - ((q+4) \times 1)$-мерный известный вектор-столбец.

Можно сформулировать условие для вполне управляемости системы (1.2) с неразделенным многоточечным промежуточным условием (1.4).

Для того чтобы система (1.2) с неразделенным многоточечным промежуточным условием (1.4) была вполне управляемой на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы $H[t]$ были линейно независимыми на этом отрезке.

Функция $u(t)$, удовлетворяющая интегральному соотношению (2.4), и решающая задачу, будет иметь вид [2, 3]:

$$u(t) = H^T[t]Q^{-1}\eta + v(t), \qquad (2.6)$$

где $H^T[t]$ – транспонированная матрица, матрица Q с размерностью $((q+4)\times(q+4))$ имеет вид

$$Q(t_0,....,T) = \int_{t_0}^{T} H[t]H^T[t]dt, \qquad (2.7)$$

а $v(t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_{t_0}^{T} H[t]v(t)dt = 0. \qquad (2.8)$$

Отметим, что функция $u(t)$ представлена в виде (2.6) в предположении, что $\det Q \neq 0$.

Учитывая обозначения (2.5), формула (2.6) представится в следующем виде:

$$u(t) = \begin{cases} B^T\left(\left(\sum_{k=1}^{m} F_k X[t_k,t]\right)^T, \left(X[T,t]\right)^T\right)Q^{-1}\eta + v(t), \\ \quad t\in[t_0,t_1] \\ B^T\left(\left(\sum_{k=2}^{m} F_k X[t_k,t]\right)^T, \left(X[T,t]\right)^T\right)Q^{-1}\eta + v(t), \\ \quad t\in(t_1,t_2] \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B^T\left(\left(F_m X[t_m,t]\right)^T, \left(X[T,t]\right)^T\right)Q^{-1}\eta + v(t), \\ \quad t\in(t_{m-1},t_m] \\ B^T\left(0,\ \left(X[T,t]\right)^T\right)Q^{-1}\eta + v(t), \\ \quad t\in(t_m,T] \end{cases}. \qquad (2.9)$$

Построенное управляющее воздействие является кусочно непрерывной функцией.

Подставляя выражение управляющего воздействия (2.9) в (1.2) и интегрируя эти уравнения, получим движение на каждом промежутке времени.

3. Пример

Пусть заданы некоторые фиксированные промежуточные моменты времени $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < T$ и $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$; $T = 3$. Начальные и конечные состояния фазового вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ выберем $x(0) = (0,0,0,0)^T$, $x(3) = (3,2,2,1)^T$.

Неразделенные промежуточные значения (1.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} &x_1(t_1) + x_3(t_1) + x_1(t_2) + x_3(t_2) = \alpha_1 \\ &x_2(t_1) + x_4(t_1) + x_2(t_2) + x_4(t_2) = \alpha_2 \end{aligned}, \qquad (3.1)$$

т. е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$F_1 = F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим управляющее воздействие и соответствующее движение.

Подставляя выражения матриц F_1, F_2 и фундаментальной матрицы решения $X[t,\tau]$ в формулу (2.5), будем иметь

$$H[\tau] = \begin{pmatrix} x_{12}(t_1,\tau) + x_{12}(t_2,\tau) & x_{34}(t_1,\tau) + x_{34}(t_2,\tau) \\ x_{22}(t_1,\tau) + x_{22}(t_2,\tau) & x_{44}(t_1,\tau) + x_{44}(t_2,\tau) \\ x_{12}(T,\tau) & 0 \\ x_{22}(T,\tau) & 0 \\ 0 & x_{34}(T,\tau) \\ 0 & x_{44}T(t_2,\tau) \end{pmatrix}$$

$$F(\tau) = F_1 X[t_1,\tau] + F_2 X[t_2,\tau] = \begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & f_{12}(\tau) & f_{13}(\tau) & f_{14}(\tau) \\ f_{21}(\tau) & f_{22}(\tau) & f_{23}(\tau) & f_{24}(\tau) \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

где

$$f_{11}(\tau) = x_{11}(t_1,\tau) + x_{11}(t_2,\tau);$$

$$f_{12}(\tau) = x_{12}(t_1,\tau) + x_{12}(t_2,\tau);$$

$$f_{13}(\tau) = x_{33}(t_1,\tau) + x_{33}(t_2,\tau);$$

$$f_{14}(\tau) = x_{34}(t_1,\tau) + x_{34}(t_2,\tau);$$

$$f_{22}(\tau) = x_{22}(t_1,\tau) + x_{22}(t_2,\tau);$$

$$f_{24}(\tau) = x_{44}(t_1,\tau) + x_{44}(t_2,\tau);$$

$$f_{21}(\tau) = f_{23} = 0.$$

Согласно формуле (2.5), предполагая, что $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, получим следующее значение для постоянного вектора η:

$$\eta = \left(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\right)^T = \left(2,1,3,2,2,1\right)^T.$$

Учитывая явное выражение матрицы $H[\tau]$, согласно формуле (2.7), вычисляем значение матрицы Q, размерность которой равна (6x6). Отметим, что $\det Q \neq 0$.

Далее, вычисляя матрицу Q^{-1}, учитывая значения вектора η и выражения (2.3), согласно формуле (2.9), при $v(t) = 0$, для компонент вектора управляющего воздействия будем иметь явные выражения в следующем виде:

при $t \in [0,1]$,

$$u_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{61}{18}t, \; u_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{65}{18}t;$$

при $t \in (1,2]$,

$$u_1(t) = \frac{17}{2} - \frac{44}{9}t, \; u_2(t) = \frac{17}{2} - \frac{46}{9}t;$$

при $t \in (2,3]$,

$$u_1(t) = 17 - \frac{115}{18}t, \quad u_2(t) = 17 - \frac{119}{18}t. \quad (3.3)$$

Если найденные выражения для управления (2.5) подставить в (1.2) и проинтегрировать эти уравнения, получим движение объекта на каждом промежутке времени в следующем виде:

при $t \in [0,1]$,

$$x_1(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{61}{108}t^3, \qquad x_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{61}{36}t^2,$$

$$x_3(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{65}{108}t^3, \qquad x_4(t) = \frac{3}{2}t - \frac{65}{36}t^2,$$

при $t \in (1,2]$,

$$x_1(t) = 3 - \frac{25}{4}t + \frac{17}{4}t^2 - \frac{22}{27}t^3,$$

$$x_2(t) = -\frac{25}{4} + \frac{17}{2}t - \frac{22}{9}t^2,$$

$$x_3(t) = 3 - \frac{25}{4}t + \frac{17}{4}t^2 - \frac{23}{27}t^3,$$

$$x_4(t) = -\frac{25}{4} + \frac{17}{2}t - \frac{23}{9}t^2, \qquad (3.4)$$

при $t \in (2,3]$,

$$x_1(t) = 16 - \frac{81}{4}t + \frac{17}{2}t^2 - \frac{115}{108}t^3,$$

$$x_2(t) = -\frac{81}{4} + 17t - \frac{115}{36}t^2$$

$$x_3(t) = 16 - \frac{81}{4}t + \frac{17}{2}t^2 - \frac{119}{108}t^3,$$

$$x_4(t) = -\frac{81}{4} + 17t - \frac{119}{36}t^2.$$

Графический вид вектор-функции движения $x(t)$ при $t \in [0,3]$ по координатам $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ изображен на рис. 2.

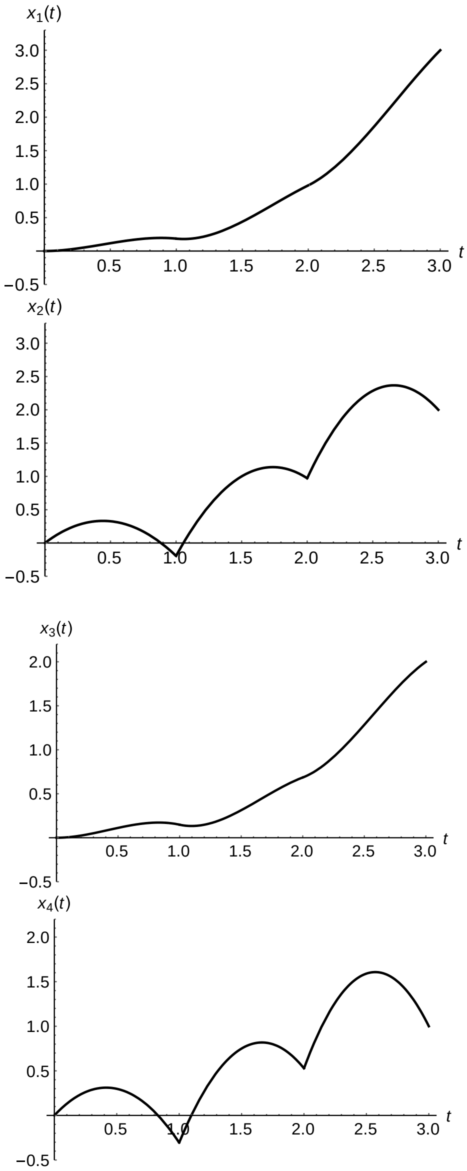

Рис. 2. *Графики вектор-функции движения* $x(t)$ *при* $t \in [0,3]$ *по координатам:* *а)* $x_1(t)$, *б)* $x_2(t)$, *в)* $x_3(t)$, *г)* $x_4(t)$

Отметим, что непосредственной подстановкой убедимся, что полученные движения удовлетворяют условию

$$F_1 x(t_1) + F_2 x(t_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для системы (1.2) с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и неразделенными промежуточными условиями (3.1) получены явные выражения программного управления (3.3) и соответствующего программного движения (3.4).

Заключение

Решена задача управления движением двухзвенного плоского манипулятора на неподвижном основании с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями фазового вектора в промежуточных моментах времени. В качестве приложения предложенного подхода построены функции управления и соответствующего движения с заданными неразделенными условиями на значения координат фазового вектора в некоторых двух промежуточных моментах времени. Построены соответствующие графики для координат фазового вектора манипулятора, подтверждающие полученные результаты.

Список литературы

1 *Абдуллаев В.М.* Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 3–15.

2 *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.

3 *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.

4 *Барсегян В.Р., Сардарян А.Г.* Оптимальное управление двухзвенного манипулятора при фиксированных промежуточных состояниях // Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван. 1997. С. 34–39.

5 *Верещагин И.Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. // Механика программного движения аппарата. Ч. 2. Пермь, 1972. 294 с.

6 *Вукабратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами: теория и приложения. М.: Наука, 1985. 384 с.

7 *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 480 с.

8 *Лутманов С.В., Куксенок Л.В., Попова Е.С.* Задачи управления двухзвенным манипулятором с вращательными кинематическими парами // Фундаментальные исследования. 2013. № 6 (ч. 4). С. 886–891.

9 *Пятницкий Е.С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 3. С. 92–99.

10 *Фролов К.В.* Механика промышленных роботов. Кн. 1: Кинематика и динамика. М.: Высшая школа, 1988. 304 с.

11 *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

12 *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 368 с.

13 *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ. Лаб. знаний. 2004. 238 с.

References

1 *Abdullaev V.M.* Reshenie differencial'nyh uravnenij s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integral'nymi usloviyami // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki, 2012. T. 15, № 3(51). S. 3–15.

2 *Barsegyan V.R.* Upravlenie sostavnyh dinamicheskih sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami. M.: Nauka, 2016. 230 s.

3 *Barsegyan V.R., Barsegyan T.V.* Ob odnom podhode k resheniyu zadach upravleniya dinamicheskih sistem s nerazdelennymi mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 4. S. 3–15.

4 *Barsegyan V.R., Sardaryan A.G.* Optimal'noe upravlenie dvuhzvennogo manipulyatora pri fiksirovannyh promezhutochnyh sostoyaniyah // Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustoj-

chivosti i prochnosti mekhanicheskih sistem. Erevan. 1997. S. 34–39.
5 *Vereshchagin I.F.* Metody issledovaniya rezhimov poleta apparata peremennoj massy. // Mekhanika programmnogo dvizheniya apparata. 2. Perm', 1972. 294 s.
6 *Vukabratovich M., Stokich D.* Upravlenie manipulyacionnymi robotami: teoriya i prilozheniya. M.: Nauka, 1985. 384 s.
7 *Zenkevich S.L., YUshchenko A.S.* Osnovy upravleniya maniCpulyacionnymi robotami. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2004. 480 s.
8 *Lutmanov S.V., Kuksenok L.V., Popova E.S.* Zadachi upravleniya dvuhzvennym manipulyatorom s vrashchatel'nymi kinematicheskimi parami // Fundamental'nye issledovaniya. 2013. № 6 (ch. 4). S. 886–891.
9 *Pyatnickij E.S.* Sintez upravleniya manipulyacionnymi robotami na principe dekompozicii // Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1987. № 3. S. 92–99.
10 *Frolov K.V.* Mekhanika promyshlennyh robotov. Kn. 1: Kinematika i dinamika. M.: Vysshaya shkola, 1988. 304 s.
11 *CHernous'ko F.L., Anan'evskij I.M., Reshmin S.A.* Metody upravleniya nelinejnymi mekhanicheskimi sistemami. M.: Fizmatlit, 2006. 328 s.
12 *CHernous'ko F.L., Bolotnik N.N., Gradeckij V.G.* Manipulyacionnye roboty. M.: Nauka, 1989. 368 s.
13 *YAkovenko G.N.* Kratkij kurs analiticheskoj dinamiki. M.: BINOM. Lab. znanij. 2004. 238 s.

Просьба ссылаться на эту статью:

Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г. О задаче управления двухзвенного плоского манипулятора с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 53–60. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-53-60.

Please cite this article as:

Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Matevosyan A.G. On the Control Problem of a Two-link Flat Manipulator with Nonseparate Multipoint Intermediate Conditions // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Issue 2(57). P. 53–60. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-2-53-60.