УДК 513

Геометрическое пространство, получающееся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы, являющейся прямым произведением трех подгрупп параллельных переносов

Г. Г. Шеремет, З. И. Андреева
Пермский государственный национальный исследовательский университет; Пермь, Россия
e-mail: sheremet@pspu.ru; **ORCID: 0000-0002-7454-8023, AuthorID: 1096081**

Определено пространство E_3^3, получающееся "склеиванием" евклидова трехмерного пространства при помощи равномерно-разрывной подгруппы группы движений евклидова пространства, которая является прямым произведением трех циклических групп параллельных переносов. Определены основные объекты нового пространства и изучены их аффинные и некоторые метрические свойства.

Ключевые слова: *Евклидово пространство; расстояние; движение; параллельный перенос; группа; структура группы; равномерно-разрывная группа;* "*склеивание*"*; плоскость; прямая; точка; расстояние; угол; перпендикулярность; параллельность*

Поступила в редакцию 14.11.2021, принята к опубликованию 16.02.2022

A geometric space obtained by "gluing" a three-dimensional Euclidean space using a group that is a direct product of three subgroups of parallel transfers

G. G. Sheremet, Z. I. Andreeva
Perm State University; Perm, Russia
e-mail: sheremet@pspu.ru; **ORCID: 0000-0002-7454-8023, AuthorID: 1096081**

The space E_3^3 is defined, which is obtained by "gluing" Euclidean three-dimensional space using a uniformly discontinuous subgroup of the group of motions of Euclidean space, which is a direct product of three cyclic groups of parallel transfers. The main objects of the new space are determined and their affine and some metric properties are studied.

Keywords: *Euclidean space; distance; motion; parallel transfer; group; group structure; uniformly discontinuous group; "gluing"; plane; straight line; point; distance; angle; perpendicular; parallelism*

Received 14.11.2021, accepted 16.02.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-14-21

Введение

В статье [1] подробно описан алгоритм определения и изучения геометрических пространств, получающихся в результате "склеивания" трехмерного евклидова пространства E_3 при помощи равномерно-разрывных подгрупп группы движений этого пространства. Полученные пространства называют *развертывающимися на пространство* E_3.

Определение 1 [1]. Подгруппа G движений евклидова пространства называется ***равномерно-разрывной***, если существует такое положительное действительное число d, что для любого $g \in G$ и любой точки $X \in E_3$ условие $|X\ g(X)| \geq d$ выполняется тогда и только тогда, когда $X \neq g(X)$.

В статье [2, теорема 7] показано, что существует точно девять типов равномерно-разрывных групп движений трехмерного евклидова пространства. Отсюда следует, что существует точно девять нетривиальных типов геометрических пространств, развертывающихся на трехмерное евклидово пространство. В статьях [1] и [2] описаны цилиндрическое пространство (пространство E_3^1), получающиеся "склеиванием" пространства E_3 при помощи циклической группы $G_1 = \{T_{\bar a}\}$, где $T_{\bar a}$ параллельный перенос пространства E_3 на вектор $\bar a$ ($\bar a \neq \bar 0$), и пространство E_3^2, получающееся "склеиванием" пространства E_3 при помощи группы $G_2 = \{T_{\bar a}\} \otimes \{T_{\bar b}\}$ ($\bar a$ и $\bar b$ не коллинеарны).

Пусть F любая фигура в E_3.

Определение 2 [1]. ***"Склеиванием" орбиты*** $\{G_k(F)\}$ называется результат отождествления всех элементов этой орбиты. При этом "склеиваются" орбиты всех точек фигуры F.

Результат "склеивания" орбиты $\{G_k(F)\}$ обозначим F^*, т. е. $F^*=\{G_k(F)\}$. Результаты "склеивания" орбит точек, прямых и плоскостей пространства E_3 будем называть новыми точками, прямыми и плоскостями соответственно.

Определение 3 [1]. Пространством, полученным "склеиванием" пространства E_3 при помощи группы G_k, называется множество всех новых точек, прямых и плоскостей. Обозначим это пространство E_3^k.

1. "Склеивание" пространства E3 при помощи группы $G_3 = \{T_{\bar a}\} \otimes \{T_{\bar b}\} \otimes \{T_{\bar c}\}$

1.1. Определение пространства E_3^3

Если все группы вида $\{T_{\bar a}\} \otimes \{T_{\bar b}\} \otimes \{T_{\bar c}\}$ с некомпланарными векторами $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ изоморфны, то можно считать, что эти векторы попарно перпендикулярны.

Пусть A – произвольная точка пространства E_3. Орбитой точки A при действии группы $\boldsymbol{G_2}$ будет множество точек:

$$A^* = \{ A^*_{k,m,n} \} = \{T_{k\bar a + m\bar b + n\bar c}(A), k \in Z, m \in Z, n \in Z\}.$$

Все точки орбиты лежат в узлах пространственной решетки, каждая ячейка которой – прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$, как на ребрах (рис. 1). Все эти точки "склеиваются" в одну новую точку пространства E_3^3. Все ячейки решетки "склеиваются" в одну (любую из них).

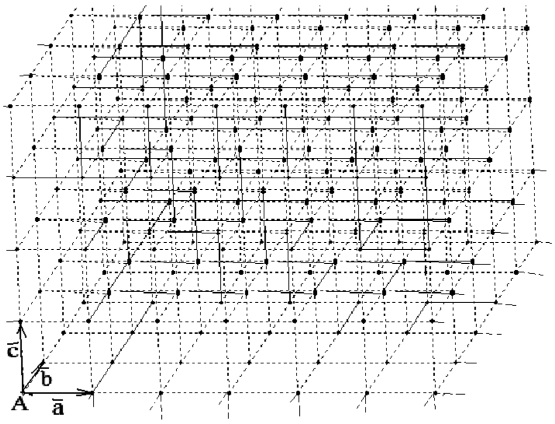

Рис. 1

Пусть $П_1$, $П_2$, $П_3$ такие три евклидовы плоскости, что $П_1 \perp \bar a$, $П_2 \perp \bar b$, $П_3 \perp \bar c$.

Орбиты этих плоскостей разбивают пространство E_3 на прямоугольные параллелепипеды, построенные на векторах $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$, как на ребрах.

Все эти параллелепипеды "склеиваются" в один (любой из них, например, в $ABCDA_1B_1C_1D_1$, рис. 2). При этом "склеиваются" противоположные грани, параллельные ребра и все вершины.

Получили ***первую модель*** пространства E_3^3.

Эту модель обозначим *Ф*.

В четырехмерном пространстве результатом описанного "склеивания" является четырехмерный тор.

Это ***вторая модель*** пространства E_3^3.

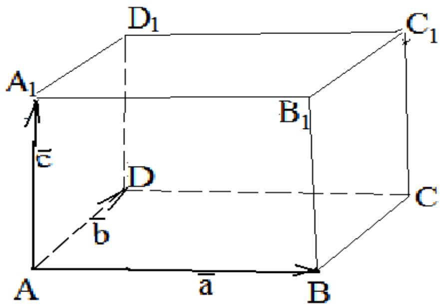

Рис. 2

Расстоянием между точками A^* и B^* в пространстве E_3^3 называется число

$$|A^* B^*| = min(|A_iB_j|_{евк.},$$

где A_i и B_j пробегают все элементы орбит точек A и B соответственно.

Свойства расстояния между точками:

1. Для любой упорядоченной пары точек A^*, B^* пространства E_3^3 расстояние определено и однозначно.

2. $|A^*B^*| = |B^* A^*|$ для любых точек A^*, B^*.

3. $|A^*B^*| \geq 0$ для любых точек A^*, B^*. При этом $|A^*B^*| = 0$ тогда и только тогда, когда $A^* = B^*$.

4. В орбитах точек A^* и B^* всегда найдутся евклидовы точки A_i и B_j соответственно такие, что $|A^*B^*| = |A_i B_j|_{евк.}$.

5. $|A^*B^*| + |B^*C^*| \geq |A^*C^*|$.

6. $0 \leq |A^*B^*| \leq max(2|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}|,$ $|\bar{a}| + 2|\bar{b}| + |\bar{c}|$, $|\bar{a}| + |\bar{b}| + 2|\bar{c}|)$.

1.2. Прямые в пространстве E_3^3

Пусть p^* – любая прямая в пространстве E_3^3. Она получается "склеиванием" орбиты некоторой прямой p пространства E_3. Одна из прямых, входящих в орбиту прямой p, пересекает параллелепипед *Ф*. Можно считать, что это сама прямая p.

Для прямой p возможны следующие случаи:

1. $p // \bar{a}$. Прямая p пересекает параллелепипед *Ф* по отрезку MN, перпендикулярному грани AA_1D_1D (рис. 3).

Вся орбита прямой p "склеивается" с этим отрезком, при этом точки M и N тоже "склеиваются". Полученная в пространстве E_3^3 прямая – это ***прямая первого рода.*** На модели *Ф* они изображаются отрезками, перпендикулярными грани AA_1D_1D со "склеенными" концами. В четырехмерном пространстве эти прямые изображаются окружностями радиуса $\frac{|\bar{a}|}{2\pi}$. Все прямые первого рода имеют конечную длину, равную $|\bar{a}|$. Через любую точку пространства E_3^3 проходит прямая первого рода и только одна. Любые две различные прямые первого рода не пересекаются.

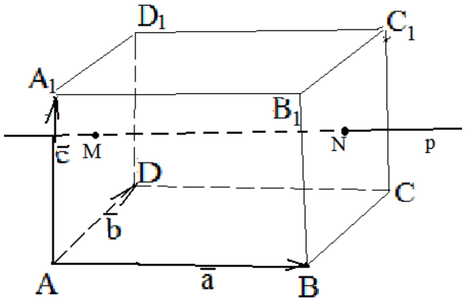

Рис. 3

2. $p // \bar{b}$. По аналогии с первым случаем получаем прямые ***второго рода***, которые на первой модели изображаются отрезками, перпендикулярными грани AA_1B_1B со "склеенными" концами. В четырехмерном пространстве эти прямые изображаются окружностями радиуса $\frac{|\bar{b}|}{2\pi}$. Все прямые второго рода имеют конечную длину, равную $|\bar{b}|$. Через любую точку пространства E_3^3 проходит прямая второго рода и только одна. Любые две различные прямые второго рода не пересекаются. Любая прямая первого рода либо пересекает прямую второго рода в одной точке, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

3. $p // \bar{c}$. По аналогии с первым случаем получаем прямые ***третьего рода***, которые на первой модели изображаются отрезками, перпендикулярными грани $ABCD$ со "склеенными" концами. В четырехмерном пространстве эти прямые изображаются окружностями радиуса $\frac{|\bar{c}|}{2\pi}$. Все прямые третьего рода имеют конечную длину, равную $|\bar{c}|$.

Через любую точку пространства E_3^3 проходит прямая третьего рода и только одна. Любые две различные прямые третьего рода не пересекаются. Любая прямая первого или второго рода либо пересекает прямую третьего рода в одной точке, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

4. Прямая p не параллельна ни вектору $\overline{a}$, ни вектору $\overline{b}$, ни вектору $\overline{c}$. Не нарушая общности, можно считать, что прямая p проходит через вершину A параллелепипеда Φ (рис. 3). В этом случае прямая p будет пересекать плоскость одной из граней параллелепипеда в точке, отличной от точки A. Пусть это будет точка K. Тогда $\overline{AK} = m\overline{a} + n\overline{b} + s\overline{c}$. Возможны два случая.

1). Коэффициенты m, n, s – целые числа. В этом случае результатом "склеивания" прямой p будет окружность (***прямая* четвертого рода**), длина которой равна $|m\overline{a} + n\overline{b} + s\overline{c}|$. Эта окружность в модели в четырехмерном пространстве "навернута" на трехмерный тор.

2). Среди чисел m, n, s хотя бы одно не является целым. В этом случае результатом "склеивания" прямой p будет винтовая линия (***прямая пятого рода***). Эта винтовая линия в модели в четырехмерном пространстве "навернута" на трехмерный тор. Прямые пятого рода бесконечны. Любая прямая первого, второго, третьего или четвертого рода либо не пересекает данную прямую четвертого рода, либо имеет с ней одну общую точку. Любая прямая четвертого рода либо не пересекает прямую пятого рода, либо имеет с ней бесконечно много общих точек. Любые две различные прямые пятого рода либо не пересекаются, либо имеют бесконечно много общих точек.

В пространстве E_3^3 любые две различные точки прямой первого (или второго, или третьего, или четвертого) рода разбивают эту прямую на два отрезка. Любые две различные точки прямой пятого рода определяют на этой прямой отрезок и два луча.

1.3. Плоскости в пространстве E_3^3

Пусть Π^* – произвольная плоскость в E_3^3. Она получается "склеиванием" орбиты некоторой плоскости Π пространства E_3.

Одна из плоскостей, входящих в орбиту плоскости Π, пересекает параллелепипед Φ. Можно считать, что это сама плоскость Π.

Для плоскости Π возможны следующие случаи:

1. Плоскость Π параллельна векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. В этом случае Π пересекает Φ по прямоугольнику $MNPQ$ (рис. 4).

Орбита плоскости Π "склеивается" с этим прямоугольником. При этом ребро MN "склеивается" с ребром QP, а ребро NP "склеивается" с ребром MQ. Это ***плоскость первого рода.***

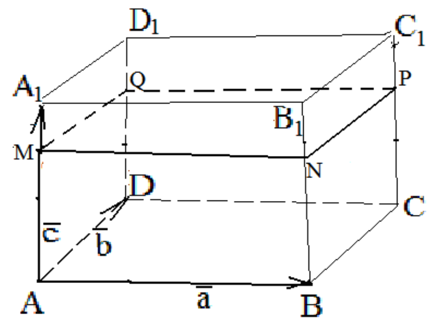

Рис. 4

На модели Φ плоскости первого рода изображаются прямоугольниками, плоскости которых параллельны грани $ABCD$. Кроме того, у этих прямоугольников "склеены" противоположные ребра. На модели в четырехмерном пространстве они будут изображаться трехмерными торами. Через любую точку пространства E_3^3 проходит плоскость первого рода и только одна. Любые две различные плоскости первого рода не имеют ни одной общей точки.

2. Плоскость Π параллельна векторам $\overline{a}$ и $\overline{c}$. По аналогии с первым случаем получаем ***плоскости второго рода.*** На модели Φ плоскости второго типа изображаются прямоугольниками, параллельными грани AA_1B_1B, у которых "склеены" противоположные ребра. На модели в четырехмерном пространстве они будут изображаться трехмерными торами. Через любую точку пространства E_3^3 проходит плоскость второго рода и только одна. Любые две различные плоскости второго рода не имеют ни одной общей точки. Любая плоскость первого рода пересекает любую плоскость второго рода по прямой третьего рода.

3. Плоскость Π параллельна векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$. По аналогии с первым случаем получаем ***плоскости третьего рода.***

На модели Φ плоскости третьего типа изображаются прямоугольниками, параллельными грани AA_1D_1BD, у которых "склеены" противоположные ребра. На модели в четырехмерном пространстве они будут изображаться трехмерными торами. Через любую точку пространства E_3^3 проходит плоскость третьего рода и только одна. Любые две различные плоскости третьего рода не имеют ни одной общей точки. Любая плоскость первого (второго) рода пересекает плоскость третьего рода по прямой второго (первого) рода.

4. Плоскость Π параллельна вектору $\overline{a}$ (или вектору $\overline{b}$, или вектору $\overline{c}$), но не параллельна векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (или $\overline{a}$ и $\overline{c}$, или $\overline{a}$ и $\overline{b}$ соответственно). В пространстве E_3^3 получаем ***плоскости четвертого рода.***

5. Плоскость Π не параллельна ни вектору $\overline{a}$, ни вектору $\overline{b}$, ни вектору $\overline{c}$.

В пространстве E_3^3 получаем ***плоскости пятого рода.***

1.4. Свойства прямых и плоскостей в пространстве E_3^3

1. Через любые две различные прямые первого рода проходит либо плоскость первого рода, либо плоскость второго рода, либо плоскость четвертого рода.

2. Через любые две различные прямые второго рода проходит либо плоскость первого рода, либо плоскость третьего рода, либо плоскость четвертого рода.

3. Через любые две различные прямые третьего рода проходит либо плоскость третьего рода, либо плоскость второго рода, либо плоскость четвертого рода.

4. Через любые две различные прямые четвертого (пятого) рода либо проходит одна плоскость четвертого рода, либо рода, либо одна плоскость четвертого рода, либо плоскость пятого рода.

5. Через любые две различные прямые пятого рода либо проходит одна плоскость четвертого рода, либо бесконечно много плоскостей пятого рода.

6. Через любые две прямые первого и второго рода проходит либо плоскость первого рода, либо плоскость четвертого рода.

7. Через любые две прямые первого и третьего рода проходит либо плоскость второго рода, либо плоскость четвертого рода.

8. Через любые две прямые второго и третьего рода проходит либо плоскость третьего рода, либо плоскость четвертого рода.

9. Через любые две прямые первого и четвертого (или пятого) рода проходит плоскость первого рода.

10. Через любые две прямые второго и четвертого (или пятого) рода проходит плоскость второго рода.

11. Через любые две прямые третьего и четвертого (или пятого) рода проходит плоскость третьего рода.

12. Через любые две прямые четвертого и пятого рода проходит плоскость первого рода либо проходит плоскость пятого рода, либо не проходит ни одной плоскости.

1.5. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве E_3^3

Определение 4. Прямые p^* и q^* пространства E_3^3 называются ***параллельными***, если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки (обозначение $p^* // q^*$).

Определение 5. Плоскости Π_1^* и Π_2^* пространства E_3^3 называются ***параллельными***, если они либо совпадают, либо не имеют ни одной общей точки (обозначение $\Pi_1^* // \Pi_2^*$).

Определение 6. Плоскость Π^* и прямая p^* пространства E_3^3 называются ***параллельными***, если прямая p^* либо лежит в плоскости Π^*, либо не имеет с ней ни одной общей точки (обозначение $p^* // \Pi^*$).

Свойства параллельных прямых и плоскостей:

1. $p^* // p^*$;
2. $p^* // q^* \Rightarrow q^* // p^*$;
3. $(p^* // q^*,\ q^* // r^*) \Rightarrow p^* // r^*$;
4. $\Pi^* // \Pi^*$;
5. $\Pi_1^* // \Pi_2^* \Rightarrow \Pi_2^* // \Pi_1^*$;
6. $(\Pi_1^* // \Pi_2^*,\ \Pi_2^* // \Pi_3^*) \Rightarrow \Pi_1^* // \Pi_3^*$).

7. Через любую точку пространства E_3^3 проходит прямая, параллельная данной прямой и только одна.

8. Через любую точку пространства E_3^3 проходит плоскость, параллельная данной плоскости и только одна.

9. Любые две прямые первого рода (второго или третьего рода) параллельны.

10. Если прямая p^* является прямой чет-

вертого (пятого) рода, то параллельная ей прямая тоже является прямой четвертого (пятого) рода.

11. Любые две плоскости одного и того же первого, второго или третьего рода параллельны.

12. Если плоскость является плоскостью четвертого или пятого рода, то параллельная ей плоскость будет иметь тот же род.

13. Если Π^* – плоскость первого (второго или третьего) рода, то все прямые, проходящие через любую данную точку и параллельные Π^*, лежат в одной плоскости первого (второго или третьего) или четвертого рода.

14. Если Π^* – плоскость четвертого (пятого) рода, то все прямые, проходящие через любую данную точку и параллельные Π^*, лежат в одной плоскости четвертого (пятого) рода.

1.6. Углы между прямыми и плоскостями в пространстве E_3^3

Так как движение евклидова пространства сохраняет углы между прямыми, плоскостями и между прямой и плоскостью, то углы в пространстве E_3^3 можно определить следующим образом.

Углом между прямыми p^* и q^* (между плоскостями Π^* и K^*, прямой p^* и плоскостью Π^*) называется угол между соответствующими им евклидовыми прямыми p и q (плоскостями Π и K, прямой p и плоскостью Π).

Прямые p^* и q^*(плоскости Π^* и K^*, прямая p^* и плоскость Π^*) называются ***перпендикулярными***, если перпендикулярны соответствующие им евклидовы прямые p и q (плоскости Π и K, прямая p и плоскость Π). Если прямая $p^* \perp q^*$ и p^* пересекает q^*, то p^* называется ***перпендикуляром***, опущенным на q^*.

Свойства перпендикулярности прямых и плоскостей:

1. Из любой точки на любую прямую можно опустить перпендикуляр и только один.

2. Если $p^* \perp q^*$, то $q^* \perp p^*$.

3. Любые две прямые первого и второго рода, первого и третьего рода, второго и третьего рода попарно перпендикулярны.

4. Все прямые, проходящие через данную точку и перпендикулярные прямой первого рода, лежат в одной плоскости третьего рода.

5. Все прямые, проходящие через данную точку и перпендикулярные прямой второго рода, лежат в одной плоскости второго рода.

6. Все прямые, проходящие через данную точку и перпендикулярные прямой третьего рода, лежат в одной плоскости первого рода.

7. Прямая, перпендикулярная прямой четвертого (пятого) рода, может быть либо прямой четвертого рода, либо прямой пятого рода.

8. Все прямые, проходящие через данную точку и перпендикулярные прямой четвертого (пятого) рода, лежат в одной плоскости пятого рода.

9. Любые две плоскости первого и второго рода, первого и третьего рода, второго и третьего рода попарно перпендикулярны.

11. Через любую точку проходит бесконечно много плоскостей, перпендикулярных любой данной плоскости.

12. Через любую прямую проходит единственная плоскость, перпендикулярная любой данной плоскости.

13. Все плоскости, проходящие через одну точку и перпендикулярные плоскости первого (второго или третьего) рода, пересекаются по прямой третьего (второго или первого) рода соответственно.

14. Через любую точку проходит единственная прямая, перпендикулярная любой данной плоскости.

15. Любая прямая, перпендикулярная плоскости первого (второго или третьего) рода, является прямой третьего (второго или первого) рода соответственно.

16. Через любую точку пространства E_3^3 проходят три попарно перпендикулярные плоскости.

1.7. Движения пространства E_3^2

Определение 4 ([4, стр. 11]). ***Движением пространства E_3^3*** называется взаимно однозначное отображение множества точек этого пространства на себя, при котором сохраняется расстояние между точками.

Обозначим W множество орбит всех точек пространства E_3.

Пусть G – группа всех движений пространства E_3, G^* – множество всех движений, при которых множество W отображается само на себя. Очевидно, G^* является подгруппой в группе G и G_3 является инвариантной подгруппой в группе G^* ([3, стр. 11]).

При этом движения из G_3 и только они отображают каждую орбиту саму на себя.

В группу G^* входят

1. Все параллельные переносы пространства E_3 на векторы $k\overline{a}+m\overline{b}+n\overline{c}$, где *k, m, n* – любые целые числа;
2. Все центральные симметрии;
3. Все осевые симметрии, оси которых параллельны либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$;
4. Все скользящие симметрии, оси которых параллельны либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$;
5. Все симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$;
6. Все скользящие симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$.

Так как каждое движение из G^* отображает орбиту на орбиту, то каждая точка из E_3^3 отобразится на точку из E_3^3. Разные точки, очевидно, будут отображаться на разные же точки. Так как каждое движение из G^* сохраняет евклидово расстояние, то будет сохраняться и расстояние между соответствующими точками в пространстве E_3^3.

Итак, каждому движению из G^*соответствует движение пространства E_3^3. Легко доказать и обратное: каждому движению пространства E_3^2 соответствует хотя бы одно движение евклидового пространства.

Из сказанного выше следует

Теорема 1. Группа движений пространства E_3^3 изоморфна фактор-группе группы G^* по подгруппе G_3.

Рассмотрим частные виды движений пространства E_3^3. Все движения из G_2 порождают тождественное преобразование пространства E_3^3. Для остальных движений из G^* возможны следующие случаи:

1. Пусть $T_{\overline{g}}$ произвольный параллельный перенос пространства E_3. Если $\overline{g}=k\overline{a}+m\overline{b}+n\overline{c}$, то $T_{\overline{g}}$ порождает тождественное преобразование в E_3^3. Если $\overline{g}\neq k\overline{a}+m\overline{b}+n\overline{c}$, то $T_{\overline{g}}$ порождает ***сдвиг по прямой***. Все точки сдвигаются на одно и то же расстояние.

2. Центральная симметрия пространства E_3 порождает ***центральную симметрию*** пространства E_3^3.

3. Осевые симметрии с осями, параллельными либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$ порождают ***осевые симметрии*** пространства E_3^3 , осями которых являются прямые первого, второго или третьего рода соответственно.

4. Скользящие осевые симметрии с осями, параллельными либо вектору $\overline{a}$, либо вектору $\overline{b}$, либо вектору $\overline{c}$ порождают ***скользящие осевые симметрии*** пространства E_3^3, осями которых являются прямые первого, второго или третьего рода соответственно.

5. Симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, или $\overline{c}$, порождают симметрии пространства E_3^3 относительно плоскостей третьего, второго, или первого рода соответственно.

6. Скользящие симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ или $\overline{c}$, порождают скользящие симметрии пространства E_3^3 относительно плоскостей третьего, второго, или первого рода соответственно.

Список литературы

1. *Андреева З.И.* Равномерно-разрывные подгруппы группы движений *n*-мерного евклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (41). С. 5–10.
2. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Геометрии, развертывающиеся на трехмерное евклидово пространство // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (48). С. 5–12.
3. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Геометрия, получающаяся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы $\{T_{\overline{a}}\}\otimes\{T_{\overline{b}}\}$ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (51). С. 5–10.
4. *Никулин В.В., Шафаревич И.Р.* Группы и геометрии. М.: Наука, 1993. 239 с.
5. *Андреева З.И.* Современные главы геометрии / учеб. пособие. Пермь: изд-во ПГНИУ, 2014. 102 с.
6. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Многообразие геометрии / учебник. Пермь: изд-во ПГГПУ, 2015. 171 с.
7. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Движения плоскостей, развертывающихся на евклидову плоскость: сб. науч. тр. IV междунар.

симпозиума "Симметрии: теоретический и методический аспекты". Астрахань, 2012. С. 16.

8. *Андреева З.И.* Современные главы геометрии: учеб. пособие. Пермь: изд-во ПГНИУ, 2014. 102 с.

References

1. *Andreeva Z.I.* Ravnomerno-razryvnye podgruppy gruppy dvizhenij n-mernogo evklidova prostranstva. // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. Vyp. 2 (41). S. 5–11.
2. *Andreeva Z.I., SHeremet G.G.* Geometrii, razvyortyvayushchiesya na tryohmernoe evklidovo prostranstvo // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. Vyp. 1 (48). S. 5–12.
3. *Andreeva Z.I., SHeremet G.G.* Geometriya, poluchayushchayasya "skleivaniem" tryohmernogo evklidova prostranstva s pomoshch'yu gruppy // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. Vyp. 4 (51). S. 5–10.
4. *Nikulin V.V., SHafarevich I.R.* Gruppy i geometrii. M.: Nauka, 1993. 239 s.
5. *Andreeva Z.I.* Sovremennye glavy geometrii: uchebnoe posobie. Perm': izd-vo PGNIU, 2014. 102 s.
6. *Andreeva Z.I., SHeremet G.G.* Mnogoobrazie geometrii uchebnik. Perm': izd-vo PGGPU, 2015. 171 s.
7. *Andreeva Z.I., SHeremet G.G.* Dvizheniya ploskostej, razvertyvayushchihsya na evklidovu ploskost': sb. nauchnyh trudov IV mezhdunar. simpoziuma "Simmetrii: teoreticheskij i metodicheskij aspekty. Astrahan', 2012. S. 16.
8. *Andreeva Z.I.* Sovremennye glavy geometrii uchebnoe posobie. Perm': izd-vo PGNIU, 2014. 102 s.

Просьба ссылаться на эту статью:

Шеремет Г.Г., Андреева З.И. Геометрическое пространство, получающееся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы, являющейся прямым произведением трех подгрупп параллельных переносов // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1 (56). С. 14–21. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-14-21.

Please cite this article as:

Sheremet G.G., Andreeva Z.I. A geometric space obtained by "gluing" a three-dimensional Euclidean space using a group that is a direct product of three subgroups of parallel transfers // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Vyp. 1 (56). P. 14–21. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-14-21.