МАТЕМАТИКА

УДК 531.391

Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения

Г. Г. Иванов[a], Г. В. Алфёров[b], В. С. Королёв[c]
Санкт-Петербургский государственный университет; г. Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
e-mail: [a]guennadi.ivanov@gmail.com; SPIN-код: 1492-92-50, AuthorID: 116900, ORCID: 0000-0003-2808-7913;
e-mail: [b]g.alferov@spbu.ru; SPIN-код: 2537-3266, AuthorID: 2873, ORCID: 0000-0002-3989-7850, SCOPUS ID 56405478800;
e-mail: [c]v.korolev@spbu.ru; SPIN-код (РИНЦ): 8293-8874, ORCID: 0000-0001-5212-1794, SCOPUS ID 56651788200; tel. +7(911)2465787

Предлагается обобщение теоремы об области асимптотической устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на случай системы уравнений, где правая часть явно зависит от времени. Показывается, как можно использовать теорему для ответа на вопрос о существовании для рассматриваемого уравнения периодических решений, отличных от тривиального, и как с использованием построенных функций Ляпунова можно находить эти периодические решения.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; периодические решения; функции Ляпунова; асимптотическая устойчивость*

Поступила в редакцию 05.12.2021, принята к опубликованию 27.01.2022

The theorem on the region of asymptotic stability and its applications

G. G. Ivanov, G. V. Alferov, V. S. Korolev
St. Petersburg State University; St. Petersburg, Peterhof, Russia
e-mail: [a]guennadi.ivanov@gmail.com; SPIN-код: 1492-92-50, AuthorID: 116900, ORCID: 0000-0003-2808-7913;
e-mail: [b]g.alferov@spbu.ru; SPIN-код: 2537-3266, AuthorID: 2873, ORCID: 0000-0002-3989-7850, SCOPUS ID 56405478800;
e-mail: [c]v.korolev@spbu.ru; SPIN-код (РИНЦ): 8293-8874, ORCID: 0000-0001-5212-1794, SCOPUS ID 56651788200; tel. +7(911)2465787

The article considers a theorem on the region of asymptotic stability of solutions of ordinary differential equations, which is generalized to the case of a system of equations, where the right-hand side explicitly depends on time. It is shown how it can be used to answer the question of whether the equation under consideration has periodic solutions other than the trivial one, and how, using the constructed Lyapunov functions, one can find these periodic solutions.

Keywords: *differential equations; periodic solutions; Lyapunov functions; asymptotic stability*

Received 28.11.2021, accepted 27.01.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13

1. Некоторые понятия и определения

Проблемы устойчивости решений системы дифференциальных уравнений исследованы во многих фундаментальных работах [1–6] и получили возможности [7–12] для практического применения.

Рассматривается известная теорема В.И. Зубова об области асимптотической устойчивости [3]. Она обобщается на случай системы дифференциальных уравнений, правая часть которой явно зависит от времени.

Здесь показывается, как можно использовать теорему для ответа на вопрос о существовании у рассматриваемого уравнения периодических решений [13–21], отличных от тривиального, а также находить эти периодические решения, используя построенные функции Ляпунова [22–27].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad f(t,0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – n-мерный вектор фазовых переменных, а $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))^T$ – n-мерная вектор-функция.

Пусть функция $f(t, x)$ определена, вещественна и непрерывна по совокупности аргументов, и пусть точка $x = 0$ является положением равновесия для системы (1), т.е. $f(t, x) \equiv 0$.

Решение системы уравнений (1), начинающееся при $t = t_0$ в точке $x = x_0$, обозначим через $x(t, t_0, x_0)$. Предположим, что система (1) обладает свойством единственности решения, и что решение $x \equiv 0$ этой системы равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Множество A всех точек (t_0, x_0). для которых

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0 \text{ при } x \to \infty$$

будем называть областью *асимптотической устойчивости.*

В силу предположения об асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $x \equiv 0$ множество A для системы (1) не является пустым множеством. Покажем, что оно открыто.

Предположим противное, т.е., что существует точка $(t_0, x_0) \in A$ и что эта точка не является внутренней точкой множества A.

Поскольку (t_0, x_0) по предположению принадлежит A, то существует такое T, что

$$\|x(T, t_0, x_0)\| < \frac{1}{2}\delta$$

и при всех t

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon(\delta),$$

где ε и δ удовлетворяют определению равномерной устойчивости по Ляпунову для решения $x \equiv 0$. Тогда, в силу теоремы об интегральной непрерывности, найдется $\eta > 0$ такое, что для любой точки (t_0^*, x_0^*) из η -окрестности точки (t_0, x_0) при всех $t \in [t_0, T]$ будет выполняться неравенство

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0^*, x_0^*)\| < \tfrac{1}{2}\delta,$$

из которого, очевидно, следует, что

$$\|x(T, t_0^*, x_0^*)\| < \delta,$$

а значит

$$\|x(t, t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon$$

при $t > T$ и $\|x(t, t_0^*, x_0^*)\| \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. точка $(t_0^*, x_0^*) \in A$. Отсюда, в силу произвольности выбора точки (t_0^*, x_0^*), заключаем, что если точка $(t_0, x_0) \in A$, то множеству A принадлежит и некоторая ее окрестность, что и доказывает открытость множества A.

Покажем, что A является связным множеством.

Выберем в A две произвольные точки (t_0^*, x_0^*) и (t_0, x_0). Не нарушая общности, можно считать, что $t_0 = t_0^*$. В силу того, что выбранные точки принадлежат области асимптотической устойчивости, найдется такое большое T, что будет

$$\|x(T, t_0, x_0)\| < \delta$$

и

$$\|x(T, t_0^*, x_0^*)\| < \delta.$$

где δ взято из определения устойчивости.

По предположению, $x \equiv 0$ является равномерно асимптотически устойчивым решением системы (1), и следовательно, точка $(t, x) \in$ А при любом t, если $\|x\| < \delta$. Но тогда точки $(T, x(T, t_0, x_0))$ и $(T, x(T, t_0, x_0^*))$ принадлежат связной части множества A и, следовательно, могут быть соединены непрерывной кривой. Применяя к этой кривой обратное преобразование, сдвигающее каждую точку этой линии по соответствующей интегральной кривой на время $t_0 - T$, получим непрерывную кривую, соединяющую точки (t_0, x_0) и (t_0, x_0^*) и целиком лежащую в A.

Отсюда следует, что A является связным множеством. Отметим, что если $t_0 \neq t_0^*$, то нам надо к уже полученной кривой добавить отрезок интегральной кривой, соединяющий соответствующие точки в моменты t_0 и t_0^*.

2. Теорема об области асимптотической устойчивости

Теорема 1. Для того чтобы наперед заданная инвариантная область $A \subset R^{n+1}$, содержащая прямую $(t, x = 0)$, была областью асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1), необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции

$V(t,x)$ и $W(t,x)$, обладающие следующими свойствами:

1. Функции V, W заданы в A, вещественны и непрерывны, причем $V(t,x)$ непрерывна в точке $x = 0$ равномерно по t;

2. Функция V отрицательно определенная, а функция W положительно определенная;

3. В области A выполнены неравенства

$$-1 < V(t,x) < 0, \quad x \neq 0, \qquad (2)$$

$$W(t,x) \geq \varphi(x), \qquad (3)$$

где $\varphi(x)$ – некоторая положительно определенная функция, такая, что

$$\varphi(x) > \alpha > 0 \text{ при } \|x\| > \beta > 0. \qquad (4)$$

4. Вдоль интегральных кривых системы (1) функция $V(t,x)$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{dV(t,x)}{dt}\Big|_{(1)} = W(x,t)(1+V(x,t). \qquad (5)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть А является областью асимптотической устойчивости. Построим функции V и W, удовлетворяющие условиям теоремы.

Прежде всего преобразуем систему (1), сделав в ней замену:

$$ds = dt\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x)}\,. \qquad (6)$$

В результате получим систему уравнений

$$\frac{dx}{ds} = \frac{f(t,x)}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x)}}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,x)}}. \qquad (7)$$

Правые части системы (7) являются непрерывными и ограниченными функциями переменных t и x, что обеспечивает [3] существование решений этой системы на всей оси $-\infty < s < +\infty$.

После замены (6) область асимптотической устойчивости A системы (1), перейдет в область асимптотической устойчивости A' системы (7). То есть, A'– есть множество точек (s_0, x_0), удовлетворяющих условиям:

I. любая интегральная кривая $x(s; s_0, x_0)$ системы (7), начинающаяся в области A', при любом s принадлежит области A';

II. имеет место равномерная устойчивость решения $x \equiv 0$ и

$$\lim_{s\to\infty}\|x(s; s_0, x_0)\| = 0 \qquad (8)$$

при $(s_0, x_0) \in A'$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению равномерной асимптотической устойчивости, найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|x_0\| < \delta$ будет $\|x(s; s_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $s > s_0$ и $\lim_{s\to\infty}\|x(s; s_0, x_0)\| = 0$.

Построим непрерывную функцию $L(s)$, заданную при $s > -\infty$, строго убывающую от $+\infty$ до 0 при $s \to +\infty$ и такую, что

$$\|x(s+\tau; s_0, x_0)\| < L(\tau) \qquad (9)$$

при $\tau > 0, \|x_0\| < \delta$.

Положим

$$L'(\tau) = \sup_{\|x_0\|\leq\delta}\|x(s_0+\tau; s_0, x_0)\|.$$

Ясно, что функция $L'(\tau)$,) задана при $\tau > 0$ и обладает свойствами:

$$0 \leq L'(\tau) < \varepsilon \text{ при } \tau > 0,$$

$$L'(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty\,.$$

Выберем теперь непрерывную функцию $L(\tau)$, заданную при $-\infty < \tau < +\infty$, строго убывающую от $+\infty$ до 0 при τ, возрастающем от $-\infty$ до $+\infty$, и такую, что при $\tau > 0$ $L(\tau) \geq L'(\tau)$.

Легко видеть, что построенная таким образом функция удовлетворяет всем нашим требованиям. Выберем функцию

$$\phi(x) = \|x(s; s_0, x_0)\|e^{-L^{-1}\|x(s;s_0,x_0)\|}.$$

Здесь через $L^{-1}(\eta)$ обозначена обратная к $L(\tau)$ функция. Положим

$$\bar{V}(s,x) = -\int_s^\infty \phi\big(x(\lambda; s, x)\big)d\lambda. \qquad (10)$$

Покажем, что при $(s,x) \in A'$ интеграл (10) сходится. Если $(s,x) \in A'$, то можно указать величину $\Lambda(s,x)$ такую, что при $\lambda > s + \Lambda(s,x)$ будет

$$\|x(\lambda; s, x)\| < \delta.$$

Представим интеграл в (10) в виде суммы двух интегралов:

$$\int_s^\infty \phi\big(x(\lambda; s, x)\big)d\lambda =$$

$$= \int_s^{s+\Lambda(s,x)} \phi d\lambda + \int_{s+\Lambda(s,x)}^\infty \phi d\lambda. \qquad (11)$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной интегрирования

$$\lambda = \bar{\lambda} + s + \Lambda(s,x)$$

и положив

$$\bar{s} = s + \Lambda(s,x), \qquad \bar{x} = x(\bar{s}; s, x),$$

получим

$$\int_s^\infty \phi\big(x(\lambda; s, x)\big)d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \phi\left(x(\bar{s}+\bar{\lambda}; \bar{s}, \bar{x})\right)d\bar{\lambda}. \qquad (12)$$

В силу выбора $\Lambda(s,x)$)

$$\|\bar{x}\| < \delta,$$

а тогда, учитывая равномерную асимптотическую устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (7), при всех $\bar{\lambda} > 0$ будет

$$\left\|x(\bar{s}+\bar{\lambda}; \bar{s}, \bar{x})\right\| < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу (9) при всех $\bar{\lambda} > 0$ будет

$$\|x(\bar{s}+\bar{\lambda};\bar{s},\bar{x})\| < L(\bar{\lambda}).$$

Применяя к этому неравенству обратную функцию, получим

$$\bar{\lambda} < L^{-1}(\|x(\bar{s}+\bar{\lambda};\bar{s},\bar{x})\|).$$

Откуда

$$\|x(\bar{s}+\bar{\lambda};\bar{s},\bar{x})\|e^{-\bar{\lambda}} > \\ > \phi\left(x(\bar{s}+\bar{\lambda};\bar{s},\bar{x})\right). \quad (13)$$

Применяя (13) к оценке интеграла (12), получим

$$\int_s^\infty \phi(x(\lambda;s,x))d\lambda < \varepsilon\int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}}d\bar{\lambda} = \varepsilon.$$

Таким образом, сходимость (11) доказана.

Приступим теперь к исследованию непрерывности функции $\bar{V}(s,x)$. Прежде всего покажем, что $\bar{V}(s,x)$ равномерно непрерывна по s в точке $x \equiv 0$.

Действительно,

$$|\bar{V}(s,x)| = \int_0^\infty \phi(x(s+\bar{\lambda};s,x))d\bar{\lambda}.$$

Этот интеграл ничем принципиально не отличается от интеграла, стоящего в правой части равенства (12). Если теперь выберем $\|x\| < \delta$, то для рассматриваемого интеграла останутся справедливыми все рассуждения, проведенные для интеграла из правой части (12). Но тогда будет иметь место и оценка

$$|\bar{V}(s,x)| < \epsilon,$$

при $\|x\| < \delta$. Учитывая произвольность выбора момента $s \geq 0$, заключаем, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что сразу для всех $s \geq 0$ будет $|\bar{V}(s,x)| < \epsilon$ как только $\|x\| < \delta$, что и означает равномерную непрерывность по s функции $\bar{V}(s,x)$ в точке $x = 0$.

Покажем теперь, что функция $\bar{V}(s,x)$ непрерывна в A'. Пусть (s_1,x_1) и (s_2,x_2) – две произвольные точки, принадлежащие A'. Тогда найдется $S > 0$ такое, что

$$\int_S^\infty \phi(x(s_i+\bar{\lambda};s_i,x_i))d\bar{\lambda} < \frac{1}{3}\epsilon', \ \ i = 1,2,$$

где $\epsilon' > 0$ – некоторая положительная постоянная. В силу интегральной непрерывности по числу $S > 0$ и $\sigma_2 > 0$ можно выбрать $\sigma_1 = \sigma_1(S,\sigma_2)$ такое, что при

$$\|x_1 - x_2\| < \sigma_1, \|s_1 - s_2\| < \sigma_1$$

будет

$$\|x(s_1+\bar{\lambda};s_1,x_1) - x(s_2+\bar{\lambda};s_2,x_2)\| < \sigma_2$$

при всех $\bar{\lambda} \in [0,S]$. Кроме того, σ_2 можно выбрать столь малым, чтобы

$$|\phi_1 - \phi_2| < \frac{\epsilon\prime}{3S},,$$

$$\phi_1 = \phi\left(x(s_1+\bar{\lambda};s_1,x_1)\right),$$

$$\phi_2 = \phi(x(s_2+\bar{\lambda};s_2,x_2)).$$

Объединяя все полученные оценки, приходим к неравенству

$$|\bar{V}(s_1,x_1) - \bar{V}(s_2,x_2)| = \\ = \left|\int_0^\infty [\phi_1 - \phi_2]d\bar{\lambda}\right| < \epsilon'$$

при $\|x_1 - x_2\| < \sigma_1$.

А это, в силу произвольности выбора величины $\epsilon' > 0$ и произвольности выбора точки, например (s_1,x_1), как раз означает, что функция $\bar{V}(s,x)$ непрерывна в A' .

Итак, мы показали, что функция $\bar{V}(s,x)$) непрерывна в области A' и равномерно непрерывна по $s \geq 0$ в точке $x = 0$.

Покажем, что $\bar{V}(s,x)$ отрицательно определенная функция.

Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\|\bar{x}\|$.

Тогда

$$|\bar{V}(s,x)| = -\int_0^\alpha \phi(x(s+\bar{\lambda};s,x))d\bar{\lambda}\,. \quad (14)$$

Но

$$\|x(s+\bar{\lambda};s,x)\| = \\ = \left\|\int_s^{s+\bar{\lambda}} \frac{f(x(\xi;s,x),\xi)}{\sqrt{1+\|f(x(\xi;s,x),\xi)\|^2}}d\xi\right\| \leq \bar{\lambda}$$

следовательно, при $0 \leq \bar{\lambda} \leq \propto$

$$\|x(s+\bar{\lambda};s,x) - x\| \leq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Откуда

$$\|x(s+\bar{\lambda};s,x)\| \geq \frac{1}{2}\|x\|. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем

$$\bar{V}(s,x) \leq -\frac{1}{2}\|x\|\phi\left(\frac{1}{2}\|x\|\right),$$

что и доказывает отрицательную определенность функции $\bar{V}(s,x)$.

Покажем далее, что при любом фиксированном $s_0 \geq 0$

$$\lim_{k\to\infty} \bar{V}(s_0,x_k) = -\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_{0,}$$

где $x_k \in A'$, $x_0 \in \partial A'$ – границе области.

Выберем некоторое $\bar{\delta} < \delta$ и обозначим через s_k момент, когда интегральная кривая

$$x(s_0+s;s_0,x_0)$$

попадает на поверхность $\|x\| = \bar{\delta}$. Покажем, что при этом последовательность $\{s_k\} \to +\infty$. Предположим противное, т.е., что $\{s_k\} \nrightarrow +\infty$. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $\lim_{k\to\infty} s_k = s^*$.

В силу интегральной непрерывности по s^* и σ_1. можно выбрать $\sigma_2 > 0$. такое, что для всех $s \in [0, s^*]$ при $\|x_k - x_0\| < \sigma_2$ будет

$$\|x(s_0 + s; s_0, x_k) - x(s_0 + s; s_0, x_0)\| < \sigma_1.$$

Кроме того, σ_1 можно взять столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x(s_0 + s^*; s_0, x_0)\| < \delta.$$

Этим самым показано, что $x_0 \in A'$, вопреки предположению. Полученное противоречие и доказывает стремление для последовательности $\{s_k\} \to +\infty$ при k $\to \infty$.

Рассмотрим $\bar{V}(s_0, x_k)$.

Представим ее в виде

$$\bar{V}(s_0, x_k) = -\int_{s_0}^{s_0+s_k} \phi d\lambda - \int_{s_0+s_k}^{\infty} \phi d\lambda$$

для $\phi = \phi(x(\lambda; s_0, x_k))$.

Сделав в последнем интеграле замену переменной интегрирования

$$\lambda = \bar{\lambda} + s_0 + s_k$$

и положив $\bar{s_k} = s_0 + s_k,\ \bar{x}_k = x(s_k; s_0, x_k)$, получим

$$\bar{V}(s_0, x_k) = -\int_{s_0}^{s_0+s_k} \phi(x(\lambda; s_0 . x_k))d\lambda -$$
$$-\int_0^{\infty} \phi\left(x(\bar{s_k} + \bar{\lambda}; \bar{s_k} . \overline{x_k})\right) d\lambda. \quad (16)$$

По самому построению $\|x\| = \bar{\delta} < \bar{\delta}$, и потому последний интеграл из (16) ничем принципиально не отличается от интеграла, стоящего в правой части (12). Но тогда для него справедлива оценка

$$\int_0^{\infty} \phi(x(\bar{s_k} + \bar{\lambda}; \bar{s_k} . \overline{x_k}))d\lambda < \epsilon. \quad (17)$$

Далее, так как при $s \in [0, s_k]$

$$\|x(s_0 + s; s_0, x_k)\| \geq,$$

а $\phi(x)$ монотонно возрастает вместе с $\|x\|$, то существует такое α^*, что для всех $s \in [0, s_k]$ будет

$$\phi(x(s_0 + s; s_0, x_k) \geq \alpha^*.$$

Но тогда

$$\int_{s_0}^{s_0+s_k} \phi(x(\lambda; s_0 . x_k))d\lambda \geq \alpha^* s_k . \quad (18)$$

Подставляя в (16) оценки (17) и (18), получим

$$\bar{V}(s_0, x_k) < \epsilon - \alpha^* s_k.$$

Вспоминая, что при $k \to \infty$ $s_k \to \infty$, и учитывая произвольность выбора момента s_0, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Наконец, определим $\frac{\overline{dV}}{ds}$.

Следуя [1], имеем

$$\frac{d}{ds}\bar{V}(s, x) = \left\{\frac{d}{d\xi}\bar{V}(\xi, x(\xi; s, x))\right\}_{\xi=s} =$$
$$= -\left\{\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{\infty} \phi(x(\lambda; \xi, x(\xi; s, x)))d\lambda\right\}_{\xi=s}.$$

Таким образом, мы показали, что на решениях системы (7) $\frac{\overline{dV}}{ds}$ есть функция положительно определенная.

Возвращаясь к системе (1), положим

$$V^*(t, x) = \bar{V}(s(t), x),$$

где $s(t)$ определяется из системы (7).

Легко проверить, что функция $V^*(t, x)$ обладает теми же свойствами, что и функция $\bar{V}(s, x)$ в области A'. Непосредственным вычислением проверяем, что на решениях системы (1)

$$\frac{d}{dt}V^*(t, x) = \phi(x)\sqrt{1 + \|f(t, x)\|^2} =$$
$$= W(t, x).$$

Очевидно, что $W(t, x)$ удовлетворяет требованиям 1–3 теоремы.

Положим, наконец,

$$V(t, x) = e^{V^*(t,x)} - 1.$$

Построенная функция $V(t, x)$, очевидно, также удовлетворяет требованиям 1–3 теоремы.

Найдем ее полную производную на решениях системы (1):

$$\frac{d}{dt}V(t, x) = \left(\frac{d}{dt}V^*(t, x)\right)e^{V^*(t,x)} =$$
$$= W(t, x)(V(t, x) + 1),$$

т.е. имеет место равенство (5). Необходимость условий теоремы доказана полностью.

Достаточность. Пусть для некоторой инвариантной области A выполнены условия теоремы. Тогда, так как функция $V(t, x)$ отрицательно определенная и равномерно непрерывная по $t \geq 0$ в точке $x = 0$, и, как следует из соотношений (2), (3), (5), ее полная производная в силу системы (1) является положительно определенной функцией, будет выполнено условие равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ [2]. Следовательно, по любому $\epsilon > 0$ можно указать $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что при $\|x_0\| < \delta$ и $t > 0$ будет

$$\|x(t_0 + t; t_0, x_0)\| < \epsilon,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t_0 + t; t_0, x_0)\| = 0. \quad (19)$$

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in A$ и покажем, что $\lim_{t\to+\infty} \|x(t_0 + t; t_0, x_0)\| = 0$.

Для этого, согласно (19), достаточно показать, что для любого $\delta' < \delta$ существует $T(\delta')$ такое, что $\|x(t_0 + T(\delta'); t_0, x_0)\| < \delta'$.

Пусть, напротив, для некоторой точки $(t_0, x_0) \in A$ и некоторого $\delta' < \delta$ требуемого $T(\delta')$ не существует.

В этом случае в качестве функции Ляпунова возьмем

$$V^*(t,x) = \ln(1+V).$$

Из соотношений (2)–(5) следует, что функция V^* – отрицательно определенная, а ее полная производная в силу системы (1) удовлетворяет оценке

$$\frac{dV^*}{dt} = \frac{1}{1+V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{1+V}W(1+V) =$$
$$= W \geq \phi(x) \geq \alpha(\delta') > 0.$$

Интегрируя это неравенство, найдем

$$V^* \geq V_0^* + t\alpha(\delta').$$

Таким образом, с ростом t функция V^* будет принимать сколь угодно большие значения, что невозможно ввиду ее отрицательности. Полученное противоречие и доказывает существование требуемого $T(\delta')$.

Для завершения доказательства теоремы отметим, что при доказательстве достаточности мы постоянно пользовались инвариантностью области A, так как, согласно условию 3 теоремы, все приведенные здесь рассуждения и оценки справедливы разве лишь в области A, т. е. когда

$$(t_0 + t, x(t_0 + t; t_0, x_0)) \in A$$

для всех $t > 0$, если $(t_0, x_0) \in A$.

3. Использование функций Ляпунова для нахождения периодических решений

Рассмотрим использование функций Ляпунова для нахождения периодических решений дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad (20)$$

где f – ω-периодическая по t и непрерывная на R^2 функция. Кроме того, пусть f такова, что имеет место существование и единственность решения, и $f(t,x) \equiv 0$.

Теорема 2. Если $x = 0$ является изолированным периодическим решением уравнения (20), то либо для уравнения (20), либо для уравнения

$$\dot{x} = -f(-t,x) \qquad (21)$$

существуют функции $V(t,x)$ и $W(t,x)$ такие, что:

1. Функции $V(t,x)$ и $W(t,x)$ заданы, вещественны и непрерывны в некоторой открытой, связной, инвариантной области $A \subset R^2$, содержащей прямую $(t,0)$), причем $V(t,x)$ непрерывна в точке $x = 0$ равномерно по t .

2. Функция V отрицательно определенная, а функция W положительно определенная.

3. В области A выполнено неравенство

$$-1 < V(t,x) < 0, \qquad x \neq 0.$$

4. Вдоль интегральных кривых соответствующего уравнения, принадлежащих области A, функция $V(t,x)$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{dV}{dt} = W(1+V).$$

5. Если уравнение

$$V(t,x) = -1$$

имеет непрерывное решение $\bar{x}(t)$, то $\bar{x}(t)$ будет ω-периодическим решением уравнения (20), причем между решениями $x \equiv 0$ и $x = \bar{x}(t)$) других периодических решений уравнение (20) не имеет. В противном случае уравнение (20) имеет единственное периодическое решение $x \equiv 0$.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Тогда, согласно [5], решение $x \equiv 0$ уравнения (20) будет либо асимптотически устойчиво относительно, например, верхней полуплоскости $x \geq 0$, либо неустойчиво. Во втором случае, положив $\tau = -t$ и перейдя от уравнения (20) к уравнению (21), вновь придем к случаю асимптотической устойчивости относительно верхней полуплоскости нулевого решения.

Пусть, для определенности, решение $x \equiv 0$ уравнения (20) асимптотически устойчиво относительно полуплоскости $x \geq 0$. Отметим, что в силу условия *единственности* решения оно будет и равномерно асимптотически устойчиво.

Обозначим через $A \subset R^2$ множество точек (t_0, x_0) , $x_0 > 0$, таких, что

$$\lim_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0\,,$$

где через $x(t; t_0, x_0)$ обозначено решение уравнения (20), начинающееся в точке x_0 в момент времени $t = t_0$. Повторяя рассуждения, приведенные ранее, нетрудно показать, что множество A является открытым, связным, инвариантным множеством, т.е., что A является областью асимптотической устойчивости решения $x \equiv 0$ уравнения (20), располагающейся в верхней полуплоскости.

Тогда из теоремы 1, доказанной ранее, следует, что существуют функции $V(t,x)$, $W(t,x)$, удовлетворяющие условиям 1–4.

Обозначим теперь через $\bar{x}(t)$ функцию, определяемую равенством

$$V(t, \bar{x}(t)) \equiv -1.$$

Таким образом, функция $\bar{x}(t)$ принадлежит границе области A. Но, как следует из работы [5], если $\bar{x}(t)$ ограничена, то она обязательно будет периодическим решением уравнения (20) и других периодических решений, располагающихся между $x \equiv 0$ и $\bar{x}(t)$ не может существовать.

Если же $\bar{x}(t)$ неограничена, то, очевидно, что в верхней полуплоскости вообще не существует ни одного периодического решения уравнения (20), отличного от решения $x \equiv 0$.

Аналогично рассматривается случай нижней полуплоскости.

4. Пример

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} \equiv -\sin x \sin(t + \mu x), \qquad (22)$$

где μ – параметр.

Положим

$$V(t, x) = \exp\{(\tan\frac{1}{2x})e^{-\cos(t+\mu x)}\} - 1,$$

$$W(t, x) =$$

$$= 2\mu \ \sin^2(\frac{1}{2x})\sin^2 (\mathrm{t} + \mu \mathrm{x})\, e^{-\cos(t+\mu x)}.$$

Легко проверить, что выбранная функция $V(t, x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы и строго возрастает на решениях уравнения (22). Отсюда, учитывая [5], следует, что решение уравнения (22) $x \equiv 0$ равномерно асимптотически устойчиво, и, следовательно, оно является изолированным периодическим решением.

Далее, уравнение

$$V(t, \bar{x}(t)) \equiv -1$$

имеет решения $x = \pm\pi$, которые, как нетрудно видеть, являются периодическими решениями уравнения (22), что полностью соответствует условию 5 теоремы.

Таким образом, в полосе $(-\pi, +\pi)$ уравнение (22) имеет единственное периодическое решение $x \equiv 0$, которое является равномерно асимптотически устойчивым.

Учитывая периодичность правой части уравнения (22), заключаем, что периодическими решениями уравнения (22) являются только решения вида $x \equiv k\pi$, причем решения вида

$$x \equiv 2k\pi$$

являются равномерно асимптотически устойчивыми, а решения вида

$$x \equiv (2k + 1)\pi$$

– неустойчивыми. Здесь $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

При $\mu < 0$ характер поведения решений сохраняется, если считать, что в (22) $t \to -\infty$.

При $\mu = 0$ общее решение уравнения (22) имеет вид

$$x = 2\mathrm{arctan}\left[\tan\left(\frac{1}{2x_0}\right)e^{(\cos t_0 - \cos t)}\right],$$

т. е. при $\mu = 0$ все решения уравнения (22) – периодические.

Приведенный пример показывает, что при учете конкретной ситуации иногда можно не требовать, чтобы функция W обязательно была положительно определенной.

Список литературы

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. (Методы Ляпунова и их применение). М.: Высшая школа, 1973.
3. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
5. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.–Л.: Наука, 1964.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача устойчивости. М.: Наука, 1969.
7. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
8. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings. 1863, P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
9. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
10. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. P. 74–112. DOI:10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
11. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2017, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863. P. 080002. DOI:10.1063/1.4992263.

12. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
13. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, № 9. P. 171. DOI: 10.3390/math 6090171.
14. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements. (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.
15. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics, 7(8). 677.
16. *Korolev V.* Properties of solutions of nonlinear equations of mechanics control systems, in 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017. IEEE Conference Proceedings. P. 7973973
17. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of nonsmooth one-variable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017. Proceedings, 7973965.
18. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1959. 080006.
19. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, *Mathematics* 2018, Vol. 6, № 9. P.171, DOI: 10.3390/math 6090171.
20. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Possible solutions of a linear homogeneous system of differential eqations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293, 060002
21. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) *AIP Conference Proceedings*, 1959. P. 080006, DOI: 10.1063/1.5034723.
22. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) *AIP Conference Proceedings*, 1863. P.080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
23. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay-stabilized systems (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
24. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060005.
25. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of stability of solutions of systems of ordinary differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings. 2293. 060004.
26. *Иванов Г.Г., Алфёров, Г.В., Королёв В.С.* Аппарат производных чисел и возможности применения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(54). С. 5–18.
27. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Горовенко П.А.* Производные числа функций одной переменной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 5–19.

References

1. *Demidovich B.P.* Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti. M.: Nauka, 1967.
2. *Zubov V.I.* Ustojchivost' dvizheniya. (Metody Lyapunova i ih primenenie). M.: Vysshaya shkola, 1973.
3. *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravleniya. M.: Nauka, 1975.
4. *Malkin I.G.* Teoriya ustojchivosti dvizheniya. M.: Nauka, 1966.
5. *Pliss V.A.* Nelokal'nye problemy teorii kolebanij. M.–L.: Nauka, 1964.
6. *Lyapunov A.M.* Obshchaya zadacha ustojchivosti. M.: Nauka, 1969.
7. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Ustojchivost' selektorno-linejnyh differencial'nyh vklyuchenij // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017. T. 37. Vyp. 2. S. 25–30.
8. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
9. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of re-

lay stabilized system (Book Chapter) (2017). Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
10. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. P. 74–112. DOI:10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
11. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2017, AIP Conference Proceedings. Vol. 1863. P. 080002. DOI:10.1063/1.4992263.
12. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
13. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, № 9. P. 171. DOI: 10.3390/math 6090171.
14. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements. (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.
15. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019). Mathematics, 7(8). 677 s.
16. *Korolev V.* Properties of solutions of nonlinear equations of mechanics control systems, in 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017. IEEE Conference Proceedings. P. 7973973.
17. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of nonsmooth one-variable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017. Proceedings, 7973965.
18. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1959. 080006.
19. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics 2018. Vol. 6, № 9. P. 171. DOI: 10.3390/math 6090171.
20. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Possible solutions of a linear homogeneous system of differential eqations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060002.
21. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1959. P. 080006. DOI: 10.1063/1.5034723.
22. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863. P.080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
23. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay-stabilized systems (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
24. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060005.
25. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of stability of solutions of systems of ordinary differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings. 2293. 060004.
26. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolev V.S.* Apparat proizvodnyh chisel i vozmozhnosti primeneniya // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2021. Vyp. 3 (54). S. 5–18.
27. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Gorovenko P.A.* Proizvodnye chisla funkcij odnoj peremennoj // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. Vyp. 3 (42). S. 5–19.

Просьба ссылаться на эту статью:
Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1 (56). С. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13.

Please cite this article as:
Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S. The theorem on the region of asymptotic stability and its applications // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Vyp. 1 (56). P. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13.