

УДК 624.072.2

## Контактная задача об изгибе двух балок с внутренним шарниром

**М. А. Осипенко**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29  
osipenko.michael@yandex.ru; 8(342) 239-17-02

Рассмотрен совместный изгиб двух балок Бернулли–Эйлера. Один конец каждой балки защемлен, другой – свободен. Длины и толщины балок различны. Длинная балка нагружена сосредоточенной силой, расположенной на свободном конце. Эта балка является составной – содержит внутренний шарнир. Между балками имеет место односторонний контакт без трения. Требуется найти упругие линии балок. Эта задача сводится к отысканию плотности сил взаимодействия балок и константы, описывающей заранее неизвестное слабое в перемещении незащемленной части составной балки. Сформулирована математическая постановка данной контактной задачи. Плотность ищется в виде суммы кусочно-непрерывной функции и дельта-функций, описывающих сосредоточенные силы. Доказана единственность решения контактной задачи и построено аналитическое решение. Установлено, что в зависимости от длин и толщин балок возможны два варианта контакта. Первый вариант: контакт в одной точке, расположенной на конце короткой балки. Второй вариант: контакт в этой же точке и еще в одной точке, расположенной на незащемленной части составной балки. Координата этой точки есть корень кубического уравнения. Полученное аналитическое решение использовано для оптимизации рассматриваемой конструкции. Задача оптимизации состоит в отыскании толщин балок, минимизирующих максимальное напряжение в конструкции при заданных нагрузке, длинах балок и общем прогибе. Эта задача решена численно для некоторых значений заданных параметров. На основе результатов численного решения предложена гипотеза о равнонапряженности оптимальной конструкции, позволяющая построить аналитическое решение рассмотренной задачи оптимизации.

**Ключевые слова:** балка Бернулли–Эйлера; внутренний шарнир; контактная задача; аналитическое решение; оптимизация.

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-1-37-42

### Введение

Контактные задачи для балок Бернулли–Эйлера составляют своеобразный раздел контактных задач теории упругости [1–15]. Задачи этого раздела представляют значительный математический интерес, так как их аналитические решения неэлементарны, и в настоящее время отсутствует достаточно общий метод построения таких решений.

Поэтому изучение этих задач находится сейчас на стадии накопления набора аналитических решений, каждое из которых строится с помощью эвристических приемов, часто

угадывается, но затем, конечно, строго обосновывается [2, 7, 12, 13].

Одним из типичных элементов балочных конструкций является составная балка с внутренним шарниром (рис. 1, [16, с. 290]).

Контактные задачи для таких балок почти не изучены. В [17] при построении равнонапряженных конструкций из двух балок переменной толщины найдено, что толщина одной из балок во внутренней точке может обратиться в нуль, то есть появляется внутренний шарнир (рис. 2; в [17] без рисунка приведены выражения для переменных толщин;

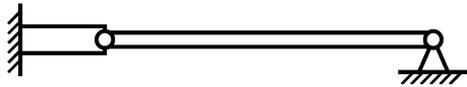


Рис. 1. Составная балка с внутренним шарниром

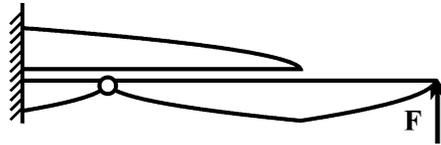


Рис. 2. Равнонапряженная конструкция



Рис. 3. Трехбалочная конструкция

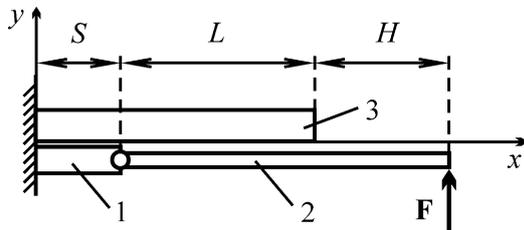


Рис. 4. Контакт двух балок с внутренним шарниром

основные вопросы о характере контакта балок остаются открытыми).

В [18] рассмотрена контактная задача для системы двух защемленных балок и одной свободной балки (рис. 3; в [18] без рисунка приведено описание системы). Численно обнаружены четыре возможных картины контакта. Полное (обоснованное) аналитическое решение этой задачи до сих пор не известно. Если контакт свободной балки и нижней защемленной балки происходит только на левом конце свободной балки, то система эквивалентна изображенной на рис. 4. Эта система и изучается в настоящей статье; результат можно рассматривать как частичное решение задачи [18] и пополнение вышеупомянутого набора аналитических решений таких задач.

В студенческой работе [19] без строгого вывода получены некоторые аналитические результаты, относящиеся к данной системе; обоснование этих результатов проведено лишь на численном примере.

В отсутствие нагрузки балки плотно прилегают друг к другу; трением пренебрегаем. Длинная балка нагружена сосредоточен-

ной силой. Под действием этой нагрузки балки испытывают слабый изгиб с возможным отставанием (односторонний контакт). Требуется найти формы упругих линий балок. Эта задача сводится к отысканию плотности сил взаимодействия балок (контактной нагрузки). На рис. 4 приведены обозначения  $S, L, H > 0$  для длин отрезков и нумерация 1–3 трех (сплошных) балок, составляющих систему. Все балки изготовлены из материала с модулем упругости  $E$  и имеют одинаковую ширину  $w$  в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 4. Пусть  $h_k$  – толщины балок,  $a_k = 12/(Ewh_k^3)$  (изгибные податливости),  $y_k(x)$  – уравнения упругих линий балок.

### 1. Постановка контактной задачи

Пусть  $f(x)$  – плотность сил взаимодействия балок 1–3 и 2–3;  $0 \leq x \leq L+S$ . Из теории Бернулли–Эйлера для балок [20] следует, что для балки 2 должно выполняться условие равновесия

$$\int_S^{L+S} (x-S)f(x) dx = F(L+H), \quad (1)$$

и  $y_k(x)$  имеют вид

$$y_1(x) = -a_1 \int_0^S G(x, \xi) f(\xi) d\xi -$$

$$-a_1 G(x, S) \int_S^{L+S} f(\xi) d\xi + a_1 G(x, S) F, \quad (2)$$

$$y_2(x) = -a_2 \int_S^{L+S} G(x-S, \xi-S) f(\xi) d\xi +$$

$$+ a_2 G(x-S, L+H) F + \alpha(x-S) + y_1(S), \quad (3)$$

$$y_3(x) = a_3 \int_0^{L+S} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi^2(3x-\xi)/6 & (\xi \leq x), \\ x^2(3\xi-x)/6 & (\xi \geq x) \end{cases} \quad (5)$$

(функция Грина),  $\alpha$  – некоторая постоянная.

Контактная задача заключается в отыскании  $y_k(x)$  и сводится к отысканию  $f(x)$  и  $\alpha$ . Будем считать, что функция  $f(x)$  имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x-x_i), \quad (6)$$

где  $p(x) \geq 0$  – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при  $0 < x \leq L+S$  и непрерывна справа при  $x=0$ ;  $P_i \geq 0$ ;  $x_i > 0$  (все  $x_i$  раз-

личны); сумма конечна;  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Обозначим

$r_1(x) = y_3(x) - y_1(x)$ ,  $r_2(x) = y_3(x) - y_2(x)$  (7) (расстояния между балками). Условие контакта балок состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между балками неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю:

$$r_{1,2}(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \geq 0 & (f(x) = 0). \end{cases} \quad (8)$$

Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

**Задача 1.** Найти функцию  $f(x)$  вида (6) и число  $\alpha$ , удовлетворяющие условиям (1) и (8), где  $r_{1,2}(x)$  выражаются формулами (7), а  $y_k(x)$  – формулами (2)–(4).

## 2. Доказательство единственности решения контактной задачи

**Теорема 1.** Задача 1 может иметь только одно решение.

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$ ,  $\alpha$  и  $f^*(x)$ ,  $\alpha^*$  – два решения задачи. По формулам (2)–(4) и (7) этим решениям соответствуют функции  $r_{1,2}(x)$  и  $r_{1,2}^*(x)$ . Обозначим  $\rho(x) = f(x) - f^*(x)$ . Функция  $\rho(x)$  имеет вид (6), но  $p(x)$  и  $P_i$  могут быть отрицательными. Составим выражение

$$\varepsilon = \int_0^S (r_1(x) - r_1^*(x))\rho(x)dx + \int_S^{L+S} (r_2(x) - r_2^*(x))\rho(x)dx. \quad (9)$$

Из (8) следует, что  $\varepsilon \leq 0$ , так как в каждом интеграле либо один из сомножителей равен нулю, либо они имеют разные знаки. С другой стороны, используя (1)–(5) и (7), можно привести (9) к виду

$$\varepsilon = a_1 \int_0^S A_1^2(x)dx + a_2 \int_S^{L+S} A_2^2(x)dx + a_3 \int_0^{L+S} A_2^2(x)dx, \quad (10)$$

где

$$A_1(x) = \int_x^S (\xi - x)\rho(\xi)d\xi + (S - x) \int_S^{L+S} \rho(\xi)d\xi,$$

$$A_2(x) = \int_x^{L+S} (\xi - x)\rho(\xi)d\xi.$$

Из (10) вытекает, что  $\varepsilon \geq 0$ , следовательно  $\varepsilon = 0$ . Используя упомянутый выше вид функции  $\rho(x)$ , можно показать, что  $A_{1,2}(x)$  непрерывны, соответственно, при  $0 \leq x \leq S$ ,  $0 \leq x \leq L+S$ . Тогда из (10) и равенства  $\varepsilon = 0$  следует, что  $A_{1,2}(x) \equiv 0$  при соответствующих  $x$ . Из формулы для  $A_2(x)$  тогда нетрудно вывести, что  $\rho(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L+S$ , следовательно,  $f(x) \equiv f^*(x)$ . Остается доказать, что  $\alpha = \alpha^*$ . Из (2)–(4) и (7) находим

$$r_2(x) - r_2^*(x) = -(\alpha - \alpha^*)(x - S)$$

при  $S \leq x \leq L+S$ . Предположим, что  $\alpha \neq \alpha^*$ , тогда  $r_2(x)$  и  $r_2^*(x)$  не обращаются в нуль одновременно при  $S < x \leq L+S$ : либо  $r_2(x) > 0$ , либо  $r_2^*(x) > 0$ . Если  $r_2(x) > 0$ , то  $f(x) = 0$ ; если  $r_2^*(x) > 0$ , то  $f^*(x) = 0$  и, следовательно,  $f(x) = 0$ . Таким образом,  $f(x) = 0$  при  $S < x \leq L+S$ , что противоречит (1). Поэтому принятое предположение неверно и  $\alpha = \alpha^*$ .

## 3. Аналитическое решение контактной задачи

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= a_2H + a_3(L + H), \\ B &= a_2H - 2a_3(L + H), \\ C &= (2a_1S^3H + a_3S^2(L + H)(2S + 3L))/L^3, \\ D &= 2\sqrt{AC} + B. \end{aligned} \quad (11)$$

**Теорема 2.** Решение задачи 1 имеет следующий вид.

(a) Если  $D \geq 0$ , то

$$f(x) = P\delta(x - L - S) \quad (13)$$

(одноточечный контакт, рис. 5, a),

$$\alpha = (2a_1S^3H - a_2HL^3 + 2a_3(L+S)^3(L+H))F/(6L^2), \quad (14)$$

где

$$P = (L + H)F/L. \quad (15)$$

(b) Если  $D < 0$ , то

$$f(x) = Q\delta(x - L - S) + R\delta(x - \lambda - S) \quad (16)$$

(двухточечный контакт, рис. 5, b),

$$\alpha = \left( 2a_3^2(L+H)(\lambda+S)^2 + a_2^2H\lambda^2 + a_2a_3 \left( \lambda^2(2L+3H) + 2\lambda(2S(L+H) + S^2) - S^2H \right) \right) F / (4\lambda(a_2+a_3)), \quad (17)$$

$$Q = \frac{a_2(2(L-\lambda)+3H)F}{2(L-\lambda)(a_2+a_3)},$$

$$R = \frac{A(\lambda_*-\lambda)F}{\lambda(L-\lambda)(a_2+a_3)}, \quad (18)$$

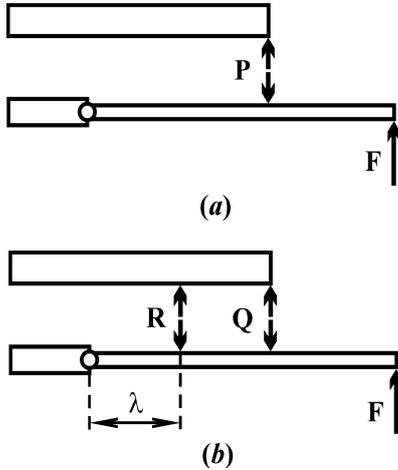


Рис. 5. Два возможных варианта контакта балок

$0 < \lambda < \lambda_*$  – корень уравнения  $\Phi(\lambda) = 0$ , (19)

$$\lambda_* = -BL/(2A), \text{ при этом } 0 < \lambda_* < L, \quad (20)$$

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3(a_2+a_3)A - \lambda a_3 S^2(3(a_2+a_3) \cdot (L+H) + 2(a_2-a_1)S) + S^3(a_1+a_3)B.$$

*Доказательство.*

(а) Очевидно, что (13) имеет вид (6). Подставляя (13) и (15) в (1), находим, что (1) выполнено. Подставляя (13)–(15) в (2)–(4) и (7) находим, что  $r_1(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq S$ , так как  $y_3(x) \geq 0$ , а  $y_1(x) \leq 0$ , и также, с учетом (11) и (12), находим

$$r_2(x) = (F/6)(L+S-x) \cdot$$

$$\left( \left( \sqrt{A}(x-S)/L - \sqrt{C} \right)^2 L + D(x-S) \right),$$

откуда следует, что  $r_2(x) \geq 0$  при  $S \leq x \leq L+S$ . Далее, (13) положительна только при  $x=L+S$ , а  $r_2(L+S) = 0$ .

Таким образом, (8) выполнено.

(б) Неравенство (20) для  $\lambda_*$  следует из (11), (12) и условия  $D < 0$ . Существование корня  $\lambda$  следует из непрерывности  $\Phi(\lambda)$  и легко устанавливаемых неравенств:

$$\Phi(0) < 0,$$

$$\Phi(\lambda_*) = \lambda_*^2 L^2 (a_2 + a_3) (B^2 / (4A) - C) > 0$$

(единственность корня следует из теоремы 1). Из (18)–(20) следует, что  $Q > 0$  и  $R > 0$ , следовательно, (16) имеет вид (6). Подставляя (16) и (18) в (1) и учитывая (19) и (20), находим, что (1) выполнено. Подставляя (16)–(19) в (2)–(4) и (7) находим, что  $r_1(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq S$ , так как  $y_3(x) \geq 0$ , а

$$y_1(x) = -\frac{a_1 F}{6\lambda} \left( \frac{a_3(\lambda_* - \lambda)}{a_2 + a_3} + \frac{H\lambda_*}{L} \right) \cdot x^2(3S-x) \leq 0,$$

и также находим

$$r_2(x) = \begin{cases} F(S+\lambda-x)^2(3Ha_2\lambda - B(S+\lambda-x))/(12\lambda) & (S \leq x \leq S+\lambda), \\ Ha_2F(L+S-x)(x-S - \lambda)^2/(4(L-\lambda)) & (S+\lambda \leq x \leq L+S). \end{cases}$$

Так как  $B < 0$ , что следует из условия  $D < 0$ , то  $r_2(x) \geq 0$  при  $S \leq x \leq L+S$ . Далее, (16) положительна только при  $x=S+\lambda$  и  $x=L+S$ , а  $r_2(S+\lambda) = r_2(L+S) = 0$ . Таким образом, (8) выполнено.

#### 4. Пример использования полученного решения для оптимизации конструкции

Полученное аналитическое решение контактной задачи позволяет найти прогиб системы  $y_{\max} = y_2(S+L+H)$ , напряжения в балках (компонента  $\sigma_{xx}$  на нижней поверхности балки [20])  $\sigma_k(x) = (Eh_k/2)y_k''(x)$  и максимальное напряжение в конструкции

$$\sigma_{\max} = \max(\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}, \sigma_{\max 3}),$$

где

$$\sigma_{\max 1} = \max_{0 \leq x \leq S} |\sigma_1(x)|,$$

$$\sigma_{\max 2} = \max_{S \leq x \leq L+H+S} |\sigma_2(x)|,$$

$$\sigma_{\max 3} = \max_{0 \leq x \leq L+S} |\sigma_3(x)|.$$

$$h_3/h_2 = \sqrt{(1+S/L)(1+L/H)}.$$

В качестве иллюстрации применения полученного аналитического решения рассмотрим следующую задачу оптимизации.

**Задача 2.** При заданной силе  $F$ , заданных длинах  $S$ ,  $L$ ,  $H$  и при заданном прогибе  $y_{\max}^*$  найти отношения толщин  $h_1/h_2$  и  $h_3/h_2$ , при которых  $\sigma_{\max} = \min$  [13].

Из соображений размерности величин  $y_{\max}$  и  $\sigma_{\max}$  нетрудно установить, что для решения задачи 2 можно перейти к формально безразмерным параметрам системы  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{h}_1$ ,  $\tilde{h}_2$ ,  $\tilde{h}_3$ , положить  $\tilde{S} = S/(S+L+H)$ ,

$$\tilde{L} = L/(S+L+H), \quad \tilde{H} = H/(S+L+H),$$

$\tilde{h}_1 = h_1/h_2$ ,  $\tilde{h}_2 = 1$ ,  $\tilde{h}_3 = h_3/h_2$  и искать точку  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_3)$  безусловного минимума величины  $\sigma_{\max}/y_{\max}^{2/3}$  как функции  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_3$ . Найденные безразмерные величины не зависят от заданного значения  $y_{\max}^*$ . Это значение потребуется, если нужно еще найти (размерные)  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ; это нетрудно сделать, так как отношения  $h_1/h_2$  и  $h_3/h_2$  получены и можно легко найти  $h_2$ , имея возможность вычислять  $y_{\max}$  (при найденном решении контактной задачи).

Приведем численный пример. Пусть  $S=L=H$ ; минимизация  $\sigma_{\max}/y_{\max}^{2/3}$  проводилась методом Нелдера–Мида [21]; найдено, что  $h_1/h_2=1$ ;  $h_3/h_2=2$  (с некоторой погрешностью, зависящей от минимальных размеров симплекса). Можно показать, что при таких параметрах имеет место одноточечный контакт и конструкция является частично равнонапряженной [17], а именно:

$$\sigma_{\max 1} = \sigma_{\max 3} = \sigma_{\max 2} \equiv \sigma_2(x) \quad \text{при } S \leq x \leq L+S. \quad (21)$$

Если принять в качестве гипотезы, что для оптимальной конструкции выполнены условия (21) и имеется одноточечный контакт, то, используя построенное аналитическое решение контактной задачи, можно найти аналитические выражения для оптимальных параметров:

$$h_1/h_2 = \sqrt{S/L},$$

## Заключение

Предложенный подход к исследованию взаимодействия двух балок, одна из которых содержит внутренний шарнир, позволил сформулировать соответствующую контактную задачу, доказать единственность ее решения и построить аналитическое решение, которое применено для оптимизации конструкции.

Автор благодарит *К.Е. Хозяшева* за ценные обсуждения.

## Список литературы

1. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек // Инженерный журнал. 1965. Т. 5, № 4. С. 782–785.
2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
5. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: изд-во МГАПИ, 1997. 340 с.
6. Shi M., Srisupattarawanit T., Schiefer F, Ostermeyer G.-P. On the wellbore contact of drill strings in a finite element model // Proc. Appl. Math. Mech. 2013. № 13. P. 109–110.
7. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // Int. J. Solids Struct. 2003. № 40. P. 3129–3136.
8. Ватульян А.О., Васильев Л.В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 449–456.
9. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83.
10. Кузнецов С.А. Механика контактного взаимодействия. Казань: изд-во Казанского ун-та, 2014. 72 с.

11. Kim J.H., Ahn Y.J., Jang Y.H., Barber J.R. Contact problems involving beams // Int. J. Solids Struct. 2014. № 51. P. 4435–4439.
12. Осипенко М.А., Няшин Ю.И., Касаткин А.А. Особенности контактных задач для систем струн и балок со слабо закрепленными элементами // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 121–129.
13. Осипенко М.А., Касаткин А.А. Контактная задача для балок, возникающая при оптимизации листовой рессоры: аннот. докл. XI-го Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань. 2015. С. 212.
14. Comez I., El-Borgi S., Kahya V., Erdol R. Receding contact problem for two-layer functionally graded media indented by a rigid punch // Acta Mech. 2016. Vol. 227. P. 2493–2504.
15. Belyaev A.K., Eliseev V.V., Irschik H., Oborin E.A. Static contact of belt and pulleys with account for shear and gravity // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. Vol. 1048. 012002.
16. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.
17. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Гитман М.Б. Равнонапряженные листовые рессоры // Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. 2014. № 4. С. 22–26.
18. Григорьева М.В., Осипенко М.А. Контактная задача упругого изгиба пластинчатого зубного имплантата: сб. тр. XV зимней школы по механике сплошных сред, Пермь, 2007. С. 290–293.
19. Хозяишев К.Е., Осипенко М.А. Аналитическое решение контактной задачи об изгибе двухлистового упругого элемента с внутренним шарниром: приложение к исследованию протеза стопы // Master's Journal. 2015. № 2. С. 216–228.
20. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.
21. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.

## A contact problem of bending of two beams with the internal joint

**М. А. Osipenko**

Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia  
osipenko.michael@yandex.ru; 8(342) 239-17-02

The joint bending of two Bernoulli–Euler’s beams is considered. Each beam has one end fixed and the other free. The beams have the different lengths and thicknesses. The long beam is loaded by the concentrated force. This beam is composite as it includes the internal joint. There is the frictionless unilateral contact between the beams. The elastic lines of the beams are to be found. This problem is reduced to finding of the density of forces of interaction between the beams and the constant that describes the unknown term in the displacement of the unrestrained part of the composite beam. The mathematical formulation of this contact problem is propounded. The density is assumed to be the sum of piecewise continuous function and delta-functions describing the concentrated forces. The uniqueness of the solution of the problem is proved and the analytical solution is constructed. Two possible contact patterns are found out. The former is contact at one point at the end of the short beam. The latter is contact at the same point and at one more point located at the unrestrained part of the composite beam. The coordinate of this point is the root of the cubic equation. The obtained analytical solution is used for the optimization of the structure. The optimization problem is to find the beams thicknesses that minimize the maximum stress for the given loading, beams lengths and the overall deflection. This problem is solved numerically for some values of the given parameters. The hypothesis of the equal-stressed optimum structure is set up on the basis of the numerical results. This hypothesis enables to construct the analytical solution of the optimization problem.

**Keywords:** *Bernoulli–Euler’s beam; internal joint; contact problem; analytical solution; optimization.*