ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 Математика. Механика. Информатика Вып. 1(52)

УДК 531.381;531.395

К теории подобно изменяемых сложных механических систем

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Рассматривается движение вокруг неподвижного полюса механической системы с переменными составом массы и геометрической конфигурацией, изменяющимися во времени согласно закону структурно-динамического подобия. Приводятся свойства изменения величины массы и конфигурации системы, а также условия стабилизации ее центра масс. Исследуется приводимость по Ляпунову уравнений движения системы при ее движении, происходящем без внешнего моментно-силового воздействия.

Ключевые слова: *механическая система переменного состава; структурно-динамическое подобие системы; приводимая динамическая система.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-1-25-31

1. Предварительные положения

К подобно изменяемым механическим системам [1] относятся системы, у которых эллипсоид инерции, построенный для неподвижного (опорного) полюса, в каждый момент времени образует геометрически подобные фигуры согласно преобразованию гомотетии. Системы такого рода обладают изменяемой во времени конфигурацией, а величина их массы и ее состав могут быть как переменными, так неизменными (постоянными). К объектам такого класса могут относиться механические системы, моделируемые как:

− твердые тела, равномерно выгорающие, сублимирующие или напыляемые по всей их поверхности;

− механические системы постоянного состава массы с гомотетическим изменением их конфигурации.

Закон структурно-динамического подобия механических систем является одной из форм базовой управляющей программы, регулирующей изменение во времени их структуры [2].

В дальнейшем рассматриваются некоторые локальные свойства программного изменения этой структуры.

Предполагается, что *сложная механическая система* (СМС) движется так, что ее неизменяемая твердая основа (база) вращается вокруг определенного неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}(t)$ $(t \in T \equiv [0, +\infty))$.

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O: неподвижный Γ_1; базис Γ_2, неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 $(Ox_1x_2x_3)$, оси Ox_j $(j = 1, 2, 3)$ которого для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \mathrm{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r\,(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j\,(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}\,(t)$ известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесенные к базису Γ_3, считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил* [2], обусловленных переносом рабочего тела [2] из некоторой области Θ, принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}(t)$. Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in T$ определяется как

$$\mathbf{L}(t) = \int_{\Theta} \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV. \quad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области Θ; $\mathbf{u}(t)$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из Θ; $\mathbf{r}(t, \mathbf{r})$ – радиус-вектор точки этой области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \qquad (1, 2, 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний − относительно базиса Γ_2); $\lambda(t)$ − эффективная угловая скорость базиса Γ_2; $A_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ − главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3. Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [2]; каждый из них задан программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на заданные управляющие параметры, являются *управляющими связями.* Здесь и далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3.

Пусть $M(t)$ − величина массы СМС; g − стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $P = Mg$; $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) − орт, неизменно связанный с базисом Γ_1 такой, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t), r_j(t)$ − радиус-вектор центра тяжести объекта K и его координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 ($j = 1, 2, 3$).

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется системой уравнений типа Жуковского–Пуассона [2]:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + P(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_C), \\ \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0, \end{gathered} \quad (3)$$

где $\mathbf{L}$ (L_1, L_2, L_3) определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ − характерный вектор, определяемый равенством (2).

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции СМС, определяемые базисом Γ_3, принимают вид [2]

$$\begin{gathered} \dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 = L_1 + P(r_3 s_2 - r_2 s_3), \\ \dot{s}_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 = 0, \quad (4) \\ (1, 2, 3). \end{gathered}$$

2. Структурно-динамическое подобие системы

Пусть Θ − открытая регулярная (без особых точек) область конфигурационного пространства $\mathbf{R}^3$, вложенная в некоторую замкнутую (ограниченную) связную область D, охватывающую механическую систему. Область Θ содержит рабочее тело системы (понятие [2]), совершающее для $t \in T$ заданный непрерывный циркуляционный и (или) конвекционный массоперенос [2].

Введем для $t \in T$ вектор-функции классов $C^1(T), C^0(T)$, соответственно:

$$\mathbf{Q}(t) = M(t)\mathbf{r}_C(t) = \int_D \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{r}(t) dV \quad (5)$$

− статический момент СМС относительно полюса O;

$$\mathbf{K}^r(t) = \int_{\Theta} \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{v}^r(t) dV \quad (6)$$

− результирующее количество движения рабочего тела (присоединенных масс СМС), циркулирующего в области Θ с заданной скоростью $\mathbf{v}^r$ относительно базиса Γ_2.

Обозначим: $k(t)$, $\mu(t)$ − заданные ограниченные функции ($\mu > 0$), определенные в классах $C^1(T), C^2(T)$, соответственно, такие, что для $t \in T$ [2,3] имеем

$$\mu(t) = \exp \int_0^t k(\vartheta)\, d\vartheta. \qquad (7)$$

Зададим для $t \in T$ соотношения [2, 3]:

$$\mathbf{J}^{-1}(t)\,\mathbf{J}^0 = \mu(t)\mathbf{E}, \qquad (8)$$

$$M(t) = M^0 \mu(t), \quad \mathbf{Q}(t) = \mu(t)\mathbf{Q}^0, \qquad (9)$$

где $\mathbf{E}$ − единичная матрица, а μ определяется равенством (7). Здесь и всюду далее элементы матрицы инерции $\mathbf{J}$ для $t \in T$ задаются в осях базиса Γ_3, причем

$$\mathbf{J}(t) = \mathrm{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)],$$

а верхний нулевой индекс относится к значениям соответствующих величин при $t = 0$.

Пусть N − произвольная точка области Θ, $\mathbf{r}_N$ − ее радиус-вектор. Введем вектор-функцию [2]:

$$\mathbf{Q}^V(t) = \int_\Theta \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{r}(t)\, dV \quad (\mathbf{r}_N \in \Theta, t \in T) \qquad (10)$$

− статический момент относительно полюса O подсистемы объектов рабочего тела, перенесенных через фиксированную поверхность области Θ в единицу времени.

Замечание. В дальнейшем все приводимые соотношения определяются или задаются для $\mathbf{r}_N \in \Theta \subset D$ и (или) для $t \in T$ без дополнительных оговорок о принадлежности.

Утверждение 1. Для того чтобы выполнялись соотношения (9), достаточно, чтобы выполнялись условия [2, 3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = k(t)\,\rho(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{K}^r(t) = 0, \qquad (11)$$

где ρ − функция класса $C^2(T)$, а $k\ (t)$ − величина, связанная с функцией $\mu\ (t)$ зависимостью (7).

Доказательство. Зададим начальные условия

$$M(0) = M^0, \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}^0. \qquad (12)$$

Интегрируя первое равенство (11) по области Θ, в силу соотношений

$$M(t) = \int_D \rho(t, \mathbf{r})\, dV, \; \dot{M}(t) = \int_\Theta \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \qquad (13)$$

в результате получаем [1]

$$M^{-1}(t)\, \dot{M}(t) = k(t), \qquad (14)$$

а согласно зависимостям (5), (10) и первому условию (11), находим

$$\mathbf{Q}^V(t) = k(t)\mathbf{Q}(t). \qquad (15)$$

Дифференцируя по t равенство (5) относительно базиса Γ_2, в силу равенства (6) и второго условия (11) получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}^V(t), \qquad (16)$$

а из соотношений (15), (16) следует

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = k(t)\mathbf{Q}(t), \qquad (17)$$

где коэффициент $k(t) = \mu^{-1} \dot{\mu}$ [2, 3].

Интегрируя равенства (14), (17) при условиях (12), с учетом зависимости (7) получаем соотношения (9).

Замечание. Первое равенство (11), выполняющееся в открытой регулярной области D, определяется как достаточное, так и как необходимое условие существования первого соотношения структурного подобия (9). □

Докажем выполнимость соотношения (8). Предположим, что присоединенная подсистема (рабочее тело СМС) изменяет конфигурацию массы системы так, что для любого значения $t \in T$ каждая ее точка $N \in \Theta \subset D$ перемещается относительно базиса Γ_2 со скоростью [2]

$$\mathbf{v}^r(t) = -k(t)\mathbf{r}(t). \qquad (18)$$

Утверждение 2. Для того чтобы выполнялось соотношение (8), достаточно, чтобы в открытой регулярной области Θ выполнялось условие (18) и первое ограничение (11).

Доказательство. Пусть Θ − открытая регулярная область, такая, что $\Theta \subset D$. Зададим начальные условия:

$$\mathbf{J}(0) = \mathbf{J}^0, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^0. \qquad (19)$$

Дифференцируя по t равенство [4, с. 39]

$$\mathbf{J}(t) = \int_D \rho(t, \mathbf{r})\,(\mathbf{r}^2\mathbf{E} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, dV \qquad (20)$$

относительно базиса Γ_2, в силу зависимостей (11), (13), (20) получаем

$$\mathbf{J}^{-1}(t) \cdot \dot{\mathbf{J}}(t) = -k(t)\,\mathbf{E}.$$

Отсюда при начальных условиях (19) для **J** следует соотношение (8). □

Введем управляющую связь [3]:

$$\mathbf{G}^r(t) = \mathbf{J}^0(\mu^{-1}\boldsymbol{\omega}^r - \boldsymbol{\lambda}^0),$$

которая в силу соотношения (8) эквивалентна зависимости

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mu(t)\boldsymbol{\lambda}^0. \qquad (21)$$

В этом случае система равенств (8), (9), (21) выражает *закон структурно-динамического подобия* СМС как механического объекта с изменяемыми во времени величиной массы и геометрией конфигурации. При этом как структурное (конфигурационное), так и динамическое подобие носят реономный характер.

Соотношения (8), (9), представленные в координатных осях базиса Γ_3 в виде [1, 2]

$$\frac{A_i^0}{A_i(t)} = \frac{M(t)}{M^0} = \frac{Q_j(t)}{Q_j^0} = \mu(t) \qquad (22)$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

и присоединенное к ним условие (21) определяют реономно-гомотетический закон изменения конфигурационных и динамических параметров СМС, представляющий случай центроаффинного преобразования евклидова пространства-времени (A_j, Q_j, λ_j, M, t) (j = 1, 2, 3) размерности n = 11.

В силу структурно-динамического подобия, согласно условию (8), эллипсоиды инерции СМС, построенные для неподвижного полюса O, в каждый момент времени образуют гомотетичные геометрические фигуры с центром гомотетии в полюсе O и реономным коэффициентом $\mu^{-1}(t)$. При этом функция k (t), которая согласно принятой зависимости (7) равна $k(t) = \mu^{-1}\dot{\mu}$, такова, что ее модуль представляет аналог коэффициента скорости относительной конфигурационной "деформации" системы [3].

Механический объект, для которого выполняется закон структурно-динамического подобия (22), является *подобно изменяемой* СМС [2, 3].

Из соотношений (22) непосредственно следуют известные зависимости изменения величины массы системы и материальной точки [5]. В частности, при k (t) ≡ const = a имеем

$$M(t) = M^0 \exp(at),$$

а при $\mu(t) = 1 - \alpha t$ $(\alpha = \text{const} > 0)$ имеем

$$M(t) = M^0(1 - \alpha t) \quad (t \in [0, \alpha^{-1}) \subset T).$$

В частности, если k (t) ≡ 0, μ (t) ≡ 1, то, в силу равенств (9), (8) получаем M (t) ≡ M^0, **J** (t) ≡ $\mathbf{J}^0$, соответственно.

Если вместо соотношений (8), (9) или (22) изначально задать только структурно-динамические условия (9) или, в координатной форме,

$$\frac{A_i^0}{A_i(t)} = \frac{Q_j(t)}{Q_j^0} = \mu(t) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

то отсюда следуют зависимости

$$A_i(t)M(t)r_j(t) \equiv \text{const} = n_{ij} \neq 0 \qquad (23)$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Конфигурационно-параметрические ограничения вида (23) являются одной из инвариантных форм представления свойства структурно-динамического подобия СМС. Каждое отдельное равенство (23) не выражает закон подобия в целом, а определяет лишь подобие по данным величинам с фиксированными значениями индексов i, j.

Соотношения такого рода применены, в частности, в работах [2, 6, 7]. При известных заданных зависимостях $A_i(t), M(t)$ (i = 1, 2, 3) каждый инвариант из множества (23) однозначно определяет уравнение движения проекции центра масс СМС на координатные оси Ox_j (j = 1, 2, 3) базиса Γ_3.

3. Приводимость уравнений движения системы

Под приводимостью неавтономной системы уравнений движения СМС понимается существование некоторого неособого аналитического преобразования, приводящего данную систему уравнений к соответствующей автономной динамической системе.

Идея приводимости динамической системы в указанном смысле принадлежит А.М. Ляпунову [8], который применил ее к линейной неавтономной системе уравнений.

Здесь данное понятие распространяется на нелинейную неавтономную динамическую систему уравнений (3) в предположении о существовании определенных условий.

Эти условия выражаются структурно-динамическими ограничениями, а также условиями существования неособого преобразования, реализующего это приведение.

Положим, что СМС имеет подобно изменяемую структуру, подчиненную ограничениям (8), (9), (21) и находится в пассивном режиме движения, при котором $\mathbf{L}\ (t) \equiv 0$. Покажем, что в этом случае динамическая система (3) приводима.

Выполняя неособое гладкое преобразование $(\mathbf{G}, t) \leftrightarrow (\mathbf{p}, \tau)$ $(\tau \in [0, +\infty))$ согласно равенствам

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}^0 (\mathbf{p} - \boldsymbol{\lambda}^0), \quad \tau = \int_0^t \mu(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad (24)$$

представим систему уравнений (3) подобно изменяемой СМС в виде

$$\mathbf{J}^0\mathbf{p}' + \mathbf{p} \times \mathbf{J}^0\mathbf{p} + \mathbf{J}^0\boldsymbol{\lambda}^0 \times \mathbf{p} = g\,(\mathbf{s} \times \mathbf{Q}^0),$$
$$\mathbf{s}' + \mathbf{p} \times \mathbf{s} = 0\,,$$

где штрих обозначает производную по τ.

Преобразование (24) позволяет сопоставить движение фазовой точки СМС в пространстве ($\mathbf{G}$, t) движению ее образа, происходящего в пространстве ($\mathbf{p}$, τ). Это преобразование отражает гладкий диффеоморфизм класса C^1. При этом полученная система уравнений является приведенной в упомянутом выше смысле.

Пусть движение СМС происходит в активном режиме, при котором $\mathbf{L}\ (t) \neq 0$ для значений $t \in T$. Введем структурные ограничения [2]

$$\mathbf{r}_C(t) = 0, \quad \mathbf{J}^{-1}(t) = (\mathbf{J}^0)^{-1} + \sigma(t)\mathbf{E} \qquad (25)$$

и управляющую связь [2, 3]

$$\mathbf{G}^r(t) = \mathbf{J}(t)(\boldsymbol{\omega}^r - \boldsymbol{\lambda}^0), \qquad (26)$$

где $\sigma \geq 0$ − заданная ограниченная функция класса C^1 такая, что $\sigma(0) = 0$.

Утверждение 3. Первое уравнение системы (3) для СМС, находящейся в активном режиме движения с условиями (25) на управляющей связи (26), приводимо по Ляпунову.

Доказательство. Согласно соотношениям (2) из второго условия (25) следует

$$m_j(t) = m_j^0 \quad (j = 1, 2, 3), \qquad (27)$$

а из ограничения (26) получаем

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}^0. \qquad (28)$$

В силу первого условия (25) и соотношений (27), (28) левая часть динамического уравнения системы (3) принимает автономную форму:

$$\dot{\mathbf{G}} + (\mathbf{J}^0)^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda}^0 \times \mathbf{G} = \mathbf{L}(t),$$

что и устанавливает приводимость (по оператору левой части) исходного уравнения.

Замечание. Если длины полуосей эллипсоида инерции подобно изменяемого механического объекта, отнесенного к полюсу O, изменяются во времени согласно соотношению (8), то длины полуосей соответствующего гирационного эллипсоида инерции, отнесенного к тому же полюсу, согласно второму равенству (25), к каждому моменту времени изменяются аддитивно на одну и ту же величину.

4. Стабилизация центра масс структурно изменяемой системы

При изменении состава массы и (или) геометрии конфигурации СМС ее центр масс в общем случае может перемещаться относительно тела-носителя вследствие изменения геометрии масс системы. В силу этого при решении задач динамики СМС может возникнуть вопрос об условиях, при которых положение центра масс системы является фиксированным. В частности, такой вопрос возникает в связи с необходимостью выполнения первого ограничения (25).

Под стабилизацией центра масс системы понимается неизменность его положения относительно данного базиса. При этом стабилизация (в целом) подразделяется на *полную* (по всем координатам r_j) и *частичную* (по части данных координат).

Полная стабилизация центра масс СМС относительно базиса Γ_3 выражается соотношением

$$\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}_C^0. \qquad (29)$$

Следствие (из утверждения 1). Если для СМС выполняются условия подобия (9), то имеет место ограничение (29). □

Это заключение непосредственно следует из соотношений (5), (9). Таким образом, центр масс подобно изменяемой СМС для всех значений $t \in T$ является полностью стабилизированным.

Для его частичной стабилизации достаточно выполнения свойства подобия СМС по определенной части координат ее центра масс (22) или (23).

Для случая, при котором СМС не является структурно подобной, необходимое условие стабилизации ее центра масс представлено в работе [2] и сводится к следующему.

Введем вектор-функции:

$$\ddot{M}(t) = \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dV, \tag{30}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{Q}^p(t) = \int_{\Theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \mathbf{r}(t) dV, \\ \mathbf{K}^V(t) = \int_{\Theta} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v}^r(t) dV \end{gathered} \tag{31}$$

− расход массы рабочего тела второго порядка; статический момент второго порядка относительно полюса O и результирующее количество движения относительно базиса Γ_2 рабочего тела, переносимого через фиксированную поверхность, расположенную в области Θ, в единицу времени, соответственно;

$$\mathbf{F}^r(t) = -\int_{\Theta} \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{a}^r(t) dV \tag{32}$$

− результирующий вектор сил инерции, обусловленных нестационарным циркуляционным переносом рабочего тела в области Θ относительно базиса Γ_2. Здесь $\mathbf{a}^r(t)$ − ускорение точки $N \in \Theta$ рабочего тела относительно базиса Γ_2.

В силу зависимостей (5), (6), (30)−(32), представленных относительно базиса Γ_2, находим [2]:

$$M^{-1}\dot{M}\mathbf{Q} + M\mathbf{v}_C^r - \mathbf{K}^r - \mathbf{Q}^V = 0, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} M^{-1}\ddot{M}\mathbf{Q} + 2\dot{M}\mathbf{v}_C^r + M\mathbf{a}_C^r - \\ - 2\mathbf{K}^V - \mathbf{Q}^p + \mathbf{F}^r = 0. \end{gathered} \tag{34}$$

В равенствах (33), (34) $\mathbf{v}_C^r, \mathbf{a}_C^r$ − векторы скорости и ускорения центра масс СМС относительно базиса Γ_2. В случае, при котором в СМС циркуляционного массопереноса рабочего тела не происходит, в условиях (33), (34) следует вектор-функции $\mathbf{K}^r, \mathbf{K}^V, \mathbf{F}^r$ положить тождественно равными нулю.

Если центр масс системы полностью стабилизирован относительно полюса O, то имеем

$$\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{v}_C^r(t) = \mathbf{a}_C^r(t) \equiv 0, \tag{35}$$

а соотношения (33), (34) в силу условий (35) сводятся к следующим [2]

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^r(t) + \mathbf{Q}^V(t) = 0, \\ 2\mathbf{K}^V(t) + \mathbf{Q}^p(t) - \mathbf{F}^r(t) = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Для случая, при котором массоизменение СМС происходит только путем конвекционного массопереноса рабочего тела системы, условия (36) упрощаются и принимают вид

$$\mathbf{Q}^V(t) = \mathbf{Q}^p(t) \equiv 0.$$

5. Альтернативная форма условия структурного подобия

Величины $\ddot{M}, \mathbf{Q}^p$, согласно равенствам (30), (31), содержат функцию $\partial^2\rho/\partial t^2$, имеющую конкретное функциональное выражение для подобно изменяемой системы.

Для любой точки $N \in \Theta$ при условии регулярности данной области согласно первому условию (11) имеем [2]:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = f(t)\rho(t, \mathbf{r}), \tag{37}$$

где обозначено

$$f(t) = \dot{k} + k^2 = \mu^{-1}\ddot{\mu}, \tag{38}$$

а величины k, μ взаимосвязаны условием (7).

Согласно равенству (37) в силу соотношений (30), (31) получаем

$$\ddot{M}(t) = f(t)M(t), \ \mathbf{Q}^p(t) = f(t)\mathbf{Q}(t). \tag{39}$$

Зависимости (37)−(39) выражают свойство структурно-динамического подобия системы с реономным коэффициентом подобия второго порядка $f(t)$ (38).

Случаи, при которых массоперенос рабочего тела СМС происходит согласно условию (18), является либо *лучевой конвекцией*, либо *лучевой циркуляцией.* В обоих случаях изменение структуры системы происходит по направлениям лучей, исходящих из неподвижного полюса O. При этом в случае конвекции происходит вынос рабочего тела из области Θ с его переносом через фиксированную гипотетическую замкнутую поверхность, охватывающую эту область (в данном случае $k(t)<0$ − монотонная функция), а в случае циркуляции частицы рабочего тела, перемещаясь по лучам внутри области Θ, совершают периодические (или квазипериодические) колебательные движения (здесь $k\,(t)$ − знакопеременная осциллирующая функция). Из равенства (6), согласно условию (18), следует:

$$\mathbf{K}^r(t) = -k(t)\mathbf{Q}(t), \qquad (40)$$

а в силу соотношения (31) имеем:

$$\mathbf{K}^V(t) = -k(t)\mathbf{Q}^V(t). \qquad (41)$$

При полной стабилизации центра масс СМС из первого условия (36) и равенства (40) следует соотношение (15), в силу которого согласно равенству (41) находим:

$$\mathbf{K}^V(t) = -k^2(t)\mathbf{Q}(t). \qquad (42)$$

Таким образом, изменение вектор-функций $\mathbf{K}^r, \mathbf{K}^V, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^V$, согласно зависимостям (40)−(42), подчиняется закону подобия массоизменения СМС с реономным коэффициентом подобия $k\,(t)$.

Вектор-функции скорости и ускорения центра масс системы относительно базиса Γ_2 в силу соотношений (31)−(34) определяются равенствами:

$$\mathbf{v}_C^r(t) = -\frac{\dot{M}}{M^2}\mathbf{Q}, \qquad (43)$$

$$M\mathbf{a}_C^r(t) = \Phi(t)\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^p + \mathbf{F}^r, \qquad (44)$$

где обозначено:

$$\Phi\,(t) = 2\left(\frac{\dot{M}^2}{M^2} - k^2\right) - \frac{\ddot{M}}{M}\ .$$

Согласно соотношениям (14), (15), (39), (42) имеем $\Phi = -f\,(t)$ и зависимости (43), (44) принимают простейший вид:

$$M\mathbf{v}_C^r(t) = -k\mathbf{Q}, \quad M\mathbf{a}_C^r(t) = -\mathbf{F}^r.$$

Список литературы

1. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Труды Казанского авиационного ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.
2. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политехнический ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03. 89, № 1656-В89.
3. *Макеев Н.Н.* Геометрическая интерпретация движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4(4). С. 44−49.
4. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
5. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехиздат, 1952. 280 с.
6. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 22−30.
7. *Макеев Н.Н.* Интеграл Горячева для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 31−39.
8. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

On the theory of similarly changeable mechanical systems

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The motion around a fixed pole of a mechanical system with variable mass composition and configuration is considered, changing in time according to the law of structural-dynamic similarity. The properties of changing the mass value and configuration of the system are given.

Keywords: *system of variable composition; structural-dynamic similarity; driven dynamic system.*