Математика

УДК 517.977.56

Представление решения системы линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка α

С. Т. Алиева
Бакинский государственный университет
Az, 1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, 68
saadata@mail.ru

Рассматривается одна линейная неоднородная двухпараметрическая дискретная система дробного порядка, причем граничное условие является решением аналога задачи Коши для линейного обыкновенного разностного уравнения. Коэффициентами уравнения являются, заданные дискретные матриц-функции. Введя аналог матрицы Римана получены представления решений рассматриваемой краевой задачи. Отметим, что полученный результат играет существенный роль в линейном случае для установления необходимого и достаточного условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, а также в общем случае для исследования особого управления в дискретных задачах оптимального управления системами 2D дробными порядками.

Ключевые слова: *2D линейных систем дробного порядка; дробная сумма; аналог матриц Римана; представления решений.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-1-5-8

Введение

К настоящему времени рядом авторов изучены различные свойства 2D линейных систем, описываемых разностными уравнениями дробного порядка [1–3] и др.

В предлагаемой работе некоторые идеи работ [4], используются для решения линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка и установлены представления решений в явном виде.

1. Основные понятия [4]

Определение 1. Расширенный биномиальный коэффициент $\begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix}$ определяется следующим образом

$$\begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n>0 \\ 1, & n=0 \\ 0 & n<0. \end{cases}$$

Определение 2. Пусть $0<\alpha\le 1$, дробная сумма порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{-\alpha}u(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\begin{pmatrix} j+\alpha-1 \\ j \end{pmatrix} u(n-j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} n-j+\alpha-1 \\ n-j \end{pmatrix} u(j),$$

а дробный оператор порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{\alpha}u(n)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j-\alpha}{j}\Delta u(n-j)=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n-j-\alpha-1}{n-j}u(j)-\binom{n-\alpha-1}{n-1}u(0).$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему 2D линейных уравнений дробного порядка α:

$$\Delta^{\alpha}z(t+1,x+1)=A(t,x)z(t,x)+B(t,x)z(t+1,x)+$$
$$+C(t,x)z(t,x+1)+f(t,x), \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1,\\ &z(t,x_0)=b(t),\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1,\\ &a(x_0)=b(t_0).\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ – заданные $(n\times n)$-мерные дискретные функции, $g(t,x)$– заданная n-мерная дискретная функция, $b(t)$ – заданная дискретная векторная функция, а $a(x)$– n-мерная вектор-функция, являющаяся решением линейного разностного уравнения

$$\begin{aligned}&a(x+1)=D(x)a(x)+g(x),\quad x\in X,\\ &a(x_0)=a_0.\end{aligned} \qquad (3)$$

Требуется найти представление решения системы уравнений дробного порядка (1)–(3) через аналог матрица Римана.

3. Представление решения

Пусть $0<\alpha\le 1$ и $\mu=1-\alpha$, применим $\Delta^{-\alpha}$ обеим сторонам уравнения (1).

$$\begin{aligned}&\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha}z(t+1,x+1)\right)=\\ &\Delta^{-\alpha}\left(A(t,x)z(t,x)\right)+\Delta^{-\alpha}\left(B(t,x)z(t+1,x)\right)+\\ &\Delta^{-\alpha}\left(C(t,x)z(t,x+1)+f(t,x)\right).\end{aligned} \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим выражение

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}z(t+1,x+1).$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности проведем следующие преобразования:

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}z(t+1,x+1)=\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{1-\mu}z(t+1,x+1)\right)=$$
$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{-\mu}\left(\Delta z(t+1,x+1)\right)=\Delta^{-1}\left(\Delta z(t+1,x+1)\right)=$$
$$=\sum_{j=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\left(z(j+1,s+1)-z(j,s)\right)=$$
$$=z(t+1,x+1)-z(t_0,x_0). \qquad (5)$$

Принимая во внимание (5) представления (4) можно записать в виде:

$$z(t,x)=z(t_0,x_0)+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)A(j,s)z(j,s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)B(j,s)z(j,s+1)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)C(j,s)z(j+1,s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)f(j,s),$$

где

$$R_{\alpha}(t,x:j,s)=\binom{t-j+\alpha-1}{t-j}\binom{x-s+\alpha-1}{x-s}.$$

Используя замену переменных $j+1=\alpha$, $s+1=\beta$ доказывается справедливость следующих тождеств:

$$\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j,s)B(j,s)z(j+1,s)=$$
$$=\sum_{j=t_0+1}^{t}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j-1,s)B(j-1,s)z(j,s)=$$
$$=\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j-1,s)B(j-1,s)z(j,s)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;t-1,s)B(t-1,s)z(t,s)-$$
$$-\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s)=$$
$$\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_{\alpha}(t-1,x-1;j-1,s)B(j-1,s)z(j,s)+$$
$$\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s),$$

(6)

$$\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s)C(j,s)z(j,s+1)=$$
$$\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0+1}^{x} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s-1)C(j,s-1)z(j,s)=$$
$$=\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x-1)C(j,x-1)z(j,x)-$$
$$-\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)z(j,x_0)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R(t,x;\,j,s-1)C(j,s-1)z(j,s)=$$
$$=\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R(t,x;\,j,s-1)C(j,s-1)z(j,s)-$$
$$-\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)z(j,x_0). \quad (7)$$

Принимая во внимание тождества (5)–(7) в (4) будем иметь

$$z(t,x)=z(t_0,x_0)=$$
$$=\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s)A(j,s)z(j,s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j-1,s)B(j-1,s)z(j,s)+$$
$$\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R(t-1,x-1;\,j,s-1)C(j,s-1)z(j,s)+$$
$$\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)z(j,x_0)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s)f(j,s). \quad (8)$$

Теперь предположим, что $R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s)$ является решением следующей задачи:

$$R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s)A(j,s)=$$
$$=-R_\alpha(t-1,x-1;\,j-1,s)B(j-1,s)-$$
$$-R_\alpha(t-1,x-1;\,j,s-1)C(j,s-1),$$
$$j=t-1,\ldots,t_0,\ s=x-1,\ldots,x_0,$$
$$R_\alpha(t,x;t-1,x-1)=E.$$

Тогда из тождества (8) следует что,

$$z(t,x)=z(t_0,x_0)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)z(j,x_0)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\tau,s)f(j,s).$$

Принимая во внимание (2) представления (8) можно записать в виде:

$$z(t,x)=a(x_0)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)b(j)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)a(s)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\tau,s)f(j,s). \quad (9)$$

Известно, что $a(x)$ решения линейных неоднородных уравнений в виде (3) и это решение определяется в следующем виде [5–6]:

$$a(x)=\Phi(x,x_0-1)a(x_0)+\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g(s). \quad (10)$$

Здесь матричная функция $\Phi(x,s)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)D(s),$$
$$\Phi(x,x-1)=E.$$

E – $n\times n$-мерная единичная матрица.

Подставляя (10) в (9) будем иметь:

$$z(t,x)=a(x_0)+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,x-1;\,j,x_0-1)C(j,x_0-1)b(j)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\times$$
$$\times\left[\Phi(s,x_0-1)a(x_0)+\sum_{\tau=t_0}^{s-1}\Phi(s,\tau)g(\tau)\right]+$$
$$+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1,x-1;\tau,s)f(j,s).$$

Отсюда, используя дискретный аналог двумерный леммы Фубини [7], имеем

$$
\begin{aligned}
&z(t,x)=a(x_0)+\\
&+\sum_{j=t_0}^{t-1}R_\alpha(t-1,x-1;j,x_0-1)C(j,x_0-1)b(j)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\Phi(s,x_0-1)a(x_0)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\tau=s}^{x-1}R_\alpha(t-1,x-1;t_0-1,\tau)B(t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)g(s)+\\
&+\sum_{j=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_\alpha(t-1,x-1;j,s)f(j,s). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Таким образом, доказано следующее:

Теорема. Решение $z(t,x)$ системы линейных 2D-разностных уравнений дробного порядка (1)–(3) допускает представление в виде (11).

Список литературы

1. *T. Kaczorek*. Reachability of positive 2D fractional linear systems. Physica Scripta, 2009.
2. *M. Feckan, J.Wang, M.Pospisil.* Fractional-order equations and inclusions. Vol. 3. 2010. 384 p.
3. *Sajewski, Ł.* Positive realization of SISO 2D different orders fractional discrete-time linear systems. Acta Mechanica et Automatica 5(2). P. 122–127 (2011).
4. *Nuno R.O. Bastos, Rui A.C.Ferreria, Delfim F.M.Torres.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B (DCDS-B). 2010. P. 21.
5. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку: Изд-во Бакинского гос. ун-та. 2002. 114 с.
6. *Гайшун И.В.* Многопараметрические системы управления. Минск: Наука и техника, 1996. 200 с.
7. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2017. 263 с.

Representation of a solution for a system of linear inhomogeneous two-dimensional difference equations of fractional order

S. T. Alieva
Baku State University; 68, Bakhtiyar Vagabzade st., Baku, Az, 1141, Azerbaijan
saadata@mail.ru

One linear inhomogeneous two-parameter discrete fractional system is considered, and the boundary condition is a solution of an analogue of the Cauchy problem for a linear ordinary difference equation. Equation coefficients are given by discrete matrix functions. By introducing an analogue of the Riemann matrix, representations of solutions of the considered boundary value problem are obtained. Note that the result obtained plays an essential role in the linear case for establishing a necessary and sufficient optimality condition in the form of the Pontryagin maximum principle, and also in the general case for studying special control in discrete optimal control problems for systems of 2D fractional orders.

Keywords: *2D-linear fractional order system; fractional sum; analogue of Riemann matrices; representation of solutions.*