ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(53)

УДК 531.381; 531.395

Поле алгебраических интегралов уравнений движения сложной механической системы

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Приводятся критериальные условия существования некоторых видов алгебраических первых интегралов уравнений движения механической системы переменного состава массы и изменяемой конфигурации. Тело-носитель системы (базовое тело) вращается вокруг неподвижного полюса в стационарном однородном поле силы тяжести под воздействием заданных нестационарных сил. Указаны виды частных интегралов и установлены ограничения, определяющие их существование, для случаев, при которых число переменных, содержащихся в интегралах, больше трех.

Ключевые слова: *алгебраический интеграл; критерий существования частного интеграла; интегрируемость динамической системы; сложная механическая система.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-37-44

1. Предварительные положения

Под полем алгебраических интегралов системы уравнений движения *сложной механической системы* (СМС) понимается полное многообразие этих интегралов, удовлетворяющее условиям постановки данной задачи.

Предполагается, что сложная механическая система [1, 2] движется так, что ее неизменяемая твердая основа (база) вращается вокруг определенного неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}\,(t)$ $(t \in T \equiv [0, +\infty))$.

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O: неподвижный Γ_1; базис Γ_2, неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 $(O x_1 x_2 x_3)$, оси $O x_j$ $(j = 1, 2, 3)$ которого для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \mathrm{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$.

В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r\,(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j\,(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}\,(t)$ известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r\,(t)$, $\mathbf{J}\,(t)$, отнесенные к базису Γ_3, считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил* [2], обусловленных переносом рабочего тела [2] из некоторой области Θ, принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}\,(t)$. Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in T$ определяется как

$$\mathbf{L}\,(t) = \int\limits_{\Theta} \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV. \qquad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области Θ; $\mathbf{u}(t)$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из Θ; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор точки этой области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \qquad (1, 2, 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса *O* всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний − относительно базиса Γ_2); $\lambda(t)$ − эффективная угловая скорость базиса Γ_2; $A_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ − главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3. Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t), \mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [2]; каждый из них задан программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на заданные управляющие параметры, являются *управляющими связями.* Здесь и далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3. Величины с данными индексами, находящимися при компонентах векторов, относятся к проекциям этих векторов на координатные оси Ox_j (j = 1, 2, 3).

Пусть M (t) − величина массы СМС в момент времени t; g − стандартное значение ускорения силы тяжести; $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) − орт, неизменно связанный с базисом Γ_1 такой, что $\mathbf{g} = -g\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t), r_j(t)$ − радиус-вектор центра тяжести системы и его ортогональные декартовы координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 (j = 1, 2, 3).

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется системой уравнений типа Жуковского–Пуассона [1, 3]

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + (\mathbf{s} \times \mathbf{k}), \\ &\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

где вектор-момент $\mathbf{L}$ (L_1, L_2, L_3) определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ − характерный вектор, определяемый равенством (2); $\mathbf{k} = Mg\mathbf{r}_C$ − барицентрический вектор.

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе *O* оси инерции СМС, определяемые базисом Γ_3, принимают вид [1, 2]

$$\begin{aligned} &\dot{G}_j + \Phi_j = L_j + k_{j+2}s_{j+1} - k_{j+1}s_{j+2}, \\ &\dot{s}_j + \Omega_{j+1}s_{j+2} - \Omega_{j+2}s_{j+1} = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$(j = 1, 2, 3),$$

$$\Phi_j = m_j G_{j+1}G_{j+2} + \lambda_{j+1}G_{j+2} - \lambda_{j+2}G_{j+1},$$

$$\Omega_j = A_j^{-1}G_j + \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Система уравнений (4), (5) при заданных программных структурно-динамических параметрах СМС является детерминированной многопараметрической системой эволюционного типа, аналитически замкнутой относительно переменных $V = \{G_j, s_j\}$.

Вопрос об интегрируемости в квадратурах данной системы уравнений сводится к проблеме существования дополнительного по Е. Уиттекеру [4] независимого интеграла. Если этот интеграл существует и объединенная система, составленная из общих первых интегралов и присоединенного к ним дополнительного интеграла, на некотором симплектическом многообразии находится в инволюции, то данная система уравнений *интегрируема по Буру–Лиувиллю*.

В силу этого данный вопрос приводит к задаче о нахождении независимого первого интеграла данной системы уравнений, дополнительного к системе общих интегралов, если он существует. Каждый из независимых дополнительных интегралов данной системы уравнений явно зависит от определенной части переменных множества V. В частности, аналог классического интеграла Лагранжа (линейный интеграл уравнений движения СМС) [2, 5] − от одной переменной G_j; аналог интеграла Эйлера [2, 6] − от трех переменных G_j; аналоги интегралов Ковалевской [3] и Горячева [7] − от четырех переменных G_j, s_k (j, k = 1, 2, 3). Аналогичные случаи зависимости от части переменных множества V имеют место и для аналогов линейных интегралов Гесса [2] и Гриоли [2, 8].

В связи с этим *ставится задача:* на многообразии возможных значений $W(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ определить структурно-динамические ограничения и управляющие связи, при реализации которых для системы уравнений (4), (5) на заданном гладком многообразии существует независимый алгебраический первый интеграл $F(\mathbf{G}, \mathbf{s}) \in \mathrm{C}^2$, определенный в области ($\mathbf{G}$, $\mathbf{s}$) фазового пространства, и находящийся в инволюции с общими интегралами данной системы. □

Такая постановка задачи предполагает существование k независимых дополнительных первых интегралов, каждый из которых может быть определен в соответствующей подобласти $D_k \subset D$.

Поскольку каждый из дополнительных интегралов системы уравнений (4), (5), как частный интеграл, может существовать лишь при определенных структурно-динамических и начальных условиях, данную задачу следует рассматривать как задачу нахождения элементов *интегрального многообразия* динамической системы в предположении, что это многообразие заведомо не является пустым.

2. Задача о существовании дополнительных интегралов

Рассмотрим решение поставленной выше задачи в классе однозначных алгебраических функций $\mathrm{C}^2(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ и составим основное (базовое) уравнение, порождающее дополнительные первые интегралы динамической системы (4), (5). Представим искомые интегралы в общем виде:

$$F(t; G_1, G_2, G_3; s_1, s_2, s_3) = h, \tag{6}$$

где F – алгебраическая функция заданных переменных, h − постоянная интегрирования.

Как известно [4], критериальным условием существования первого интеграла (6) данной системы уравнений является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора) от функции F и гамильтониана данной системы, заданных на симплектическом многообразии. Согласно этому имеем

$$(\nabla_{\mathbf{G}} F \bullet \dot{\mathbf{G}}) + (\nabla_{\mathbf{s}} F \bullet \dot{\mathbf{s}}) = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) в силу уравнений системы (4), (5) является тождеством, выполняющимся при определенных ограничениях, наложенных на структурно-динамические параметры данной системы. Эти ограничения и определяют искомые случаи существования дополнительных первых интегралов вида (6) для исходной системы уравнений.

Следует ожидать, что искомые интегралы, если они существуют, явно зависят лишь от части переменных, содержащихся в равенстве (6). Такая закономерность, в частности, имеет место в классических случаях интегрируемости для твердого тела, движущегося в однородном поле силы тяжести [4].

Равенство (7) в силу уравнений системы (3) является тождеством по всем переменным G_j и по любым двум переменным s_j.

Выражение (7) в силу соотношения (6) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} F_t + \sum_{j=1}^{3} \; [(L_j + k_{j+2} s_{j+1} - k_{j+1} s_{j+2} - \\ - \Phi_j)\, p_j + \Omega_{j+2} s_{j+1} - \Omega_{j+1} s_{j+2})\, q_j] = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где обозначено

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, \; p_j = \frac{\partial F}{\partial G_j}, q_j = \frac{\partial F}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Соотношение (8) является тождеством по всем переменным G_j и по любым двум переменным s_j, удовлетворяющимся при определенных заданных структурно-динамических условиях, наложенных на параметры системы уравнений (4), (5). Совокупность этих условий составляет критериальный признак существования данного первого дополнительного интеграла.

Рассмотрим возможные случаи решения поставленной задачи.

3. Дополнительные интегралы с четырьмя переменными

Пусть дополнительный интеграл (6) системы уравнений (4)−(5) задан в виде

$$F(t; G_1, G_2, s_1, s_2) = h, \tag{9}$$

для которого соотношение (8) будет

$$\begin{gathered} Q + (a_3 G_3 + \lambda_3)(q_1 s_2 - q_2 s_1) + \\ + (\Omega_1 q_2 - \Omega_2 q_1) s_3 + k_3 (p_1 s_2 - p_2 s_1) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

В равенстве (10) и далее обозначено

$$\begin{gathered} Q = R(p_1, p_2) - N(p_1, p_2) G_3 + \\ + \lambda_3 (p_1 G_2 - p_2 G_1) + (k_1 p_2 - k_2 p_1) s_3, \\ R(p_1, p_2) = F_t + p_1 L_1 + p_2 L_2, \\ u_1 = m_2 G_1 - \lambda_1, u_2 = m_1 G_2 + \lambda_2, u_3 = m_2 G_3 + \lambda_3, \\ N(p_1, p_2) = p_1 u_2 + p_2 u_1, \; a_j = A_j^{-1} \, (j = 1,2,3). \end{gathered}$$

Введем управляющую связь и условие частичной стабилизации центра масс СМС, соответственно [2]:

$$G_3^r(t) = A_3 \omega_3^r, \; r_3(t) = 0 \quad (t \in T), \tag{11}$$

а также ограничение

$$R(p_1, p_2) = 0,$$

к которым присоединим управляющую связь

$$p_1 L_1 + p_2 L_2 = 0. \qquad (12)$$

Для линейного по G_1, G_2 интеграла (9) условие (11) переходит в соотношение

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0.$$

Исключая этот случай, имеем $p_j = p_j\ (G_1,\ G_2)$ $(j = 1, 2)$.

Для интеграла вида (9) примем условия

$$L_1(t) = L_2\,(t) = 0 \quad (t \in T), \qquad (13)$$

при которых условие (12) тождественно удовлетворяется, а интеграл (9) в силу условий (13) принимает автономную форму:

$$F\,(G_1, G_2, s_1, s_2) = h. \qquad (14)$$

Рассмотрим интеграл вида (14) при ограничениях (11), (13). Поскольку равенство (10) является тождеством по переменной G_3, то в силу принятых условий имеем

$$\begin{aligned} &\Phi_1(F) \equiv N(p_1, p_2) - a_3(q_1 s_2 - q_2 s_1) = 0, \\ &\Phi_2(F) \equiv k_2 p_1 - k_1 p_2 + \Omega_2 q_1 - \Omega_1 q_2 = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Здесь и всюду далее $\Phi_j\ (j = 1, \ldots, 5)$ − символы линейных по p_j, q_j операторов.

Обозначим:

$$\sigma_j = a_3 \Omega_j + (-1)^j a_{3-j} \frac{\partial N}{\partial p_{3-j}},$$

$$\sigma_{j+2} = (-1)^{j+1}[(a_{3-j} A_3 m_{3-j} +$$

$$+ (-1)^j a_j) \frac{\partial N}{\partial p_j} - \sigma_{3-j}],$$

$$\sigma_{j+4} = 2 a_{3-j} m_{3-j} + (-1)^j a_j a_3 \ (j = 1, 2).$$

Для операторов Φ_j введем скобку Пуассона (коммутатор двух векторных полей на заданном многообразии) [9, с. 179]

$$\Phi_3(F) = [\Phi_2, \Phi_1] = k_2 m_2 p_2 - k_1 m_1 p_1 + \\ + \sigma_1 q_1 + \sigma_2 q_2,$$

$$\Phi_4(F) = [\Phi_3, \Phi_1] = m_1 m_2 (k_2 p_1 - k_1 p_2) + \\ + a_3(\sigma_3 q_1 + \sigma_4 q_2),$$

$$\Phi_5(F) = [\Phi_3, \Phi_2] = k_2 \sigma_5 q_1 + k_1 \sigma_6 q_2$$

и уравнение

$$\Phi_3(F) = 0. \qquad (16)$$

Полагая, что независимые уравнения (15), (16) образуют полную систему уравнений [10], отметим, что операторы Φ_4, Φ_5 в силу этого являются линейными комбинациями скобок Пуассона $\Phi_j\ (j = 1, 2, 3)$. Следовательно, имеем

$$D_s(F) = 0 \quad (s = 1, 2), \qquad (17)$$

где D_1, D_2 − определители систем уравнений $\Phi_s(F) = 0$ с неизвестными p_j, q_j для j = 1, … , 4 и j = 1, 2, 3, 5, соответственно. При этом

$$D_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & -a_3 s_2 & a_3 s_1 \\ k_2 & -k_1 & \Omega_2 & -\Omega_1 \\ -k_1 m_1 & k_2 m_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ k_2 m_1 m_2 & -k_1 m_1 m_2 & a_3 \sigma_3 & a_3 \sigma_4 \end{vmatrix},$$

а выражение для определителя D_2 находится заменой в определителе D_1 последней строки на следующую:

$$[0 \quad 0 \quad k_2 \sigma_5 \quad k_1 \sigma_6].$$

Согласно теореме существования независимых решений системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [10] соотношения (17) составляют критерий существования по крайней мере одного решения системы уравнений (15) и, следовательно, интеграла (14).

Уравнение $D_1 = 0$ (17) приведем к виду, при котором в определителе D_1 последняя строка заменена на $[0\ \ 0\ \ f_1\ \ f_2]$, где

$$f_j = a_3 \sigma_{j+2} + (-1)^j m_1 m_2 \Omega_{3-j} \quad (j = 1, 2).$$

Соотношения (17) должны удовлетворяться тождественно по G_1, G_2, s_1, s_2.

В силу этого слагаемые данных равенств, содержащие общий коэффициент $a_3 P$ [11], обращаются в нуль тождественно по переменным s_1, s_2 при выполнении по крайней мере одной из групп следующих условий [2]:

- *Случай* 1: при $\mathrm{J}(t) = A(t)\mathrm{E}$;
- *Случай* 2: при $r_1(t) = r_2(t) = 0;$ (18)
- *Случай* 3: при $A_j(t) = A_3(t),\ r_j(t) = 0$ $(j = 1, 2),$

• *Случай* 4: $K(t) \equiv m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2 \neq 0,$
$A_1(t) = A_2(t) = 2A_3(t),\ \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0,$

• *Случай* 5: $K(t) = 0,\ m_j(t) \neq 0,$
$$r_j(t) \neq 0 \quad (j = 1, 2).$$

В равенствах (18) обозначено: **E** − единичная матрица, $A(t)$ − собственное значение оператора инерции СМС для случая центральной структурной симметрии системы.

Ограничения (18) в случае 4 эквивалентны условиям $f_1 = f_2 = 0$, причем

$$(A_1 = A_2 = 2A_3) \leftrightarrow (\sigma_5 = \sigma_6 = 0), \qquad (\alpha)$$

поскольку последние условия приводят к равенствам

$$2(A_3 - A_{3-j}) + A_j = 0 \quad (j = 1, 2). \qquad (19)$$

В дальнейшем применяются структурные условия (18) для случая 5, имеющие вид

$$m_j(t) \neq 0, \quad r_j(t) \neq 0 \ (j = 1, 2). \qquad (20)$$

Соотношения (17) при условиях (18), (20) удовлетворяются тождественно по G_1, G_2, если на управляющей связи [2]

$$G_j^r = A_j \omega_j^r \leftrightarrow \lambda_j = 0 \quad (j = 1, 2), \qquad (21)$$

при которой управляющий вектор **λ** коллинеарен оси структурной симметрии СМС, выполняются ограничения (19), приводящие к условиям (α). Эти условия, принятые совместно с ограничениями (21), содержатся в структурно-динамических соотношениях, определяющих существование аналога интеграла Ковалевской для СМС [3].

При данных структурных условиях соотношение (18) для случая 5 в виде $K = 0$, рассматриваемое при $A_1 \neq A_3$, принимает вид $r_1^2 + r_2^2 = 0$, откуда $r_1(t) = r_2(t) \equiv 0$, что противоречит условиям (20). Следовательно, соотношения (17), рассматриваемые при условии (18) в случае 5, не выполняются.

Таким образом, в силу ограничений (13), (18), условия [2]

$$\mathbf{G}^{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{r}} \leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \qquad (\beta)$$

и второго условия (11), полученные структурно-динамические условия соответствуют следующим аналогам случаев существования интеграла вида (14), определяемым соотношениями (18): центральной структурной симметрии (случай 1); Эйлера–Жуковского (случай 2 при $r_3 \equiv 0$ согласно условию (11)); Лагранжа (случай 3); Ковалевской (случай 4).

Из всех приведенных случаев интеграл вида (14), независимый по отношению к другим интегралам данной системы, существующим при указанных условиях, имеет место только для обобщенного аналога случая Ковалевской [3]. Это утверждение справедливо и для интегралов вида

$$F(G_j, G_3, s_1, s_3) = h \qquad (j = 1, 2),$$

однотипных с интегралом вида (14).

Таким образом, не существует дополнительного первого интеграла, независимого по отношению к обобщенному интегралу Ковалевской, зависящего от двух переменных G_j и величин s_j (j = 1, 2, 3). Этот результат допускает обобщение на случай, когда, в противоположность условию $r_3 \equiv 0$, имеем $r_3 \neq 0$.

Пусть теперь интеграл (6) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, G_3, s_3) = h. \qquad (22)$$

Тогда, в соответствии с представлением (22) соотношение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} &F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{p} + q_3 \mathbf{w})\mathbf{s} + \\ &+ (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p})\mathbf{G} = 0, \end{aligned} \qquad (23)$$

где обозначено

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\Omega_2, -\Omega_1, 0),\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(p_j)\ (j = 1, 2, 3).$$

Введем ограничение

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) = 0, \qquad (24)$$

которое при $\mathbf{L} \equiv 0$ позволяет от интеграла (22) перейти к его стационарной форме:

$$F(G_1, G_2, G_3, s_3) = h, \qquad (25)$$

рассматриваемой в дальнейшем.

К интегралам вида (25) относится обобщенный аналог интеграла Горячева [7]:

$$(G_1^2 + G_2^2)G_3 - 4ns_3G_1 = h \quad , \qquad (26)$$

где (n = const), критериальные условия существования которого известны [2].

Рассмотрим вопрос о существовании дополнительных первых интегралов системы уравнений (4), (5) вида (25), независимых по отношению к другим интегралам системы.

Так как равенство (23) является тождеством по переменной s_2, то, согласно условию (24), имеем

$$\Phi_1(F) \equiv k_3 p_1 - k_1 p_3 - \Omega_1 q_3 = 0,$$
$$\Phi_2(F) \equiv -(\mathbf{W}\cdot\mathbf{p}) + \Omega_2 s_1 q_3 = 0, \tag{27}$$

где вектор $\mathbf{W}(W_j)$ определяется равенством

$$\mathbf{W} = (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{G}) + \mathbf{k}\times\mathbf{s},$$

в котором $s_2(t) \equiv 0$.

Обозначим

$$v_1 = m_3 G_1 + \lambda_1,\ v_2 = m_3 G_2 - \lambda_2,\ v_3 = m_1 G_3 - \lambda_3,$$
$$Q_1 = (2\Omega_1 - a_3 G_1) k_1 + u_3 k_3,$$
$$Q_2 = u_2 k_1 + \Omega_1 k_2,$$

введем операторы

$$\Phi_3(F) = [\Phi_2, \Phi_1] = Q_1 p_2 - Q_2 p_1 + {}$$
$$+ v_2 k_3 p_3 + a_1 W_1 q_3,$$
$$\Phi_4(F) = [\Phi_3, \Phi_1] = k_3[a_1 k_2 p_1 + {}$$
$$+ (2m_2 - a_1) k_1 p_2] + 2 a_1 Q_2 q_3, \tag{28}$$
$$\Phi_5(F) = [\Phi_3, \Phi_2] = -(v_3 Q_1 + 2 a_1 k_2 W_1 + {}$$
$$+ m_1 k_1 W_2 + u_2 v_2 k_3) p_1 + [u_3 Q_2 + (2a_1 - {}$$
$$- m_2) k_1 W_1 + m_2 k_3 W_3 - u_1 v_2 k_3] p_2 + (v_2 Q_2 - {}$$
$$- v_1 Q_1 + m_3 k_3 W_2) p_3 + [(a_2 Q_1 - a_1 k_2 \Omega_2) s_1 + {}$$
$$+ a_1(v_3 W_2 + u_2 W_3)] q_3$$

и составим уравнение

$$\Phi_3(F) = 0. \tag{29}$$

Поскольку равенства (27), (29) образуют полную систему независимых уравнений, то, аналогично предыдущему, получаем условия вида (17) (D-условия), составленные для операторов (28) и системы уравнений (27), (29). Система этих D-условий составляет *критерий существования* дополнительного интеграла вида (25).

Из полученных D-условий, являющихся тождествами по G_j, s_3 $(j = 1, 2, 3)$, следуют нижеприведенные аналоги случаев, при которых эти тождества удовлетворяются в заданном классе программных ограничений:

- Случай центральной структурной симметрии СМС, определяемый условием (18), пункт 1, на управляющей связи (β);
- Случай Эйлера–Жуковского, определяемый условием (18), пункт 2, при дополнительном условии $r_3 \equiv 0$;
- Обобщенный случай Лагранжа–Пуассона, соответствующий условиям (18), пункт 3, на управлении (21).

Ни в одном из этих случаев невырожденный интеграл вида (25) не существует. Следовательно, интеграл (26) является единственным представителем класса дополнительных первых интегралов вида (25).

Это утверждение относится также и к интегралам вида

$$F(G_1, G_2, G_3, s_j) = h \quad (j = 1, 2),$$

однотипным с интегралом (25).

Если интеграл (6) имеет форму

$$F(t; G_1, s_1, s_2, s_3) = h,$$

то в силу тривиального интеграла системы (4), (5) он приводится к интегралу с тремя переменными вида

$$F(t; G_1, s_2, s_3) = h,$$

рассмотренному в работе [11]. К этому же виду приводятся однотипные интегралы вида

$$F(t; G_j, s_1, s_2, s_3) = h \quad (j = 2, 3).$$

4. Дополнительные интегралы с числом переменных более четырех

Рассмотрим случаи существования дополнительных интегралов, содержащих пять и шесть переменных G_j, s_j $(j = 1, 2, 3)$.

Если интеграл (6) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, s_1, s_2, s_3) = h, \tag{30}$$

то в силу тривиального интеграла системы (4), (5) он приводится к виду интеграла (9). Это же относится и к интегралам вида

$$F(t; G_j, G_3, s_1, s_2, s_3) = h \quad (j = 1, 2),$$

однотипным с интегралом вида (30).

Пусть интеграл (6) представлен в форме

$$F(t; G_1, G_2, G_3, s_1, s_2) = h \tag{31}$$

и является независимым по отношению к интегралам данной системы уравнений.

Рассмотрим интеграл (31), определенный на многообразии структурно-динамических параметров СМС, для которого вместе с равенством (31) существует интеграл [2]:

$$(\mathbf{s}\cdot\mathbf{G}) = H \quad (H = \mathrm{const}). \tag{32}$$

Исключая из соотношения (32) величину s_3 в силу тривиального интеграла, получим равенство

$$s_1 G_1 + s_2 G_2 \pm G_3 \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2} = H, \tag{33}$$

также являющееся первым интегралом системы уравнений (4), (5). Исключая затем из равенства (31) одну из компонент G_j в силу соотношения (33) (например, G_3), приведем интеграл (31) к виду интеграла (9).

Аналогичное приведение может быть совершено и для интегралов вида

$$F(t; G_1, G_2, G_3, s_j, s_3) = h \quad (j = 1, 2), \quad (34)$$

однотипных с интегралом (31).

В случае, при котором интеграл (6) содержит шесть переменных G_j, s_j, в силу тривиального интеграла, существующего для любых СМС, он приводится к одной из форм интегралов (31), (34).

Итак, дополнительный интеграл, содержащий более четырех переменных G_j, s_j при ограничениях, заданных на допустимом множестве программных управлений, приводится к форме, содержащей по крайней мере четыре данных переменных. Следовательно, дополнительный первый интеграл системы уравнений (4), (5) с числом заданных переменных более четырех, независимый по отношению к остальным первым интегралам этой системы, не существует.

Заключение

Классическая задача о нахождении условий существования дополнительного алгебраического интеграла системы уравнений Эйлера–Пуассона для неизменяемого твердого тела была поставлена С.В. Ковалевской.

Отметим, что первый интеграл системы уравнений (6) является *алгебраическим*, если функция F − алгебраическая и, следовательно, может быть представлена в виде линейной комбинации полиномов различных степеней от переменных $G_j \; s_j \;\; (j = 1, 2, 3)$ [12,13].

Задача о существовании многообразия дополнительных по Уиттекеру [4] алгебраических интегралов уравнений движения СМС, содержащего неполное количество (менее шести) определяющих переменных, включает несколько случаев, соответствующих числу выделенных переменных.

Эти случаи, рассмотренные в работе [11] и в настоящей статье, объединены единой парадигмой, устанавливающей общую картину построенного интегрального многообразия уравнений движения СМС в классе задач, относящихся к однородному полю силы тяжести.

В результате проведенного анализа установлены следующие типы алгебраических первых дополнительных интегралов.

Интегралом, содержащим четыре переменные, образующие пары величин G_j, s_j с одинаковыми индексами j = 1, 2, 3, является обобщенный аналог интеграла Ковалевской [3]. Других первых интегралов данного вида, независимых по отношению к этому интегралу, данная система уравнений не имеет.

Интегралом, содержащим четыре переменные: три величины G_j и одну s_j, является обобщенный аналог интеграла Горячева [7]. Других первых интегралов этого вида, независимых по отношению к данному интегралу, исходная система уравнений не имеет.

Интегралы, зависящие от одной из величин G_j и трех переменных s_j, не существуют.

Дополнительные первые интегралы, содержащие более четырех переменных G_j, s_j, на непустом непрерывном множестве программных ограничений, не существуют.

Таким образом, для системы уравнений (4), (5) на допустимом структурно-динамическом ограничении не существуют новые дополнительные алгебраические первые интегралы, содержащие четыре и более переменных, независимые по отношению к упомянутым выше. К таким интегралам относятся обобщенные аналоги классических первых интегралов Ковалевской и Горячева [3, 7].

Аналогичная задача для неизменяемого твердого тела постоянного состава массы и неизменяемой конфигурации в традиционно принятой классической постановке рассмотрена в монографии [13], а также в статье [14].

Список литературы

1. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого гиростата переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т, Пермь. 1976. С. 99−104.
2. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политехн. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03. 89, № 1656-В89.
3. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 22−30.

4. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
5. *Макеев Н.Н.* О существовании первых интегралов движения управляемого гиродина // Дифференциальные уравнения и теория функций: сб. науч. тр. / Саратовский ун-т. Саратов, 1984. С. 58−64.
6. *Макеев Н.Н.* О некоторых движениях гиростата переменной массы в случае типа Эйлера // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 1974. Вып. 6. С. 71−78.
7. *Макеев Н.Н.* Интеграл Горячева для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 31−38.
8. *Макеев Н.Н.* Интеграл Гриоли для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 41−49.
9. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
10. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.; Л.: ОНТИ, 1934. 359 с.
11. *Макеев Н.Н.* Об алгебраических интегралах уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2(53). С. 29–36.
12. *Макеев Н.Н.* Линейный и квадратичный интегралы сложной системы / Саратовский политехн. ин-т. Саратов, 1989. 86 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03.89, № 1657- В 59.
13. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328.
14. *Богаевский В.Н.* К вопросу об общих интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости // Прикладная математика и механика. 1966. Вып.4. С. 782−783.

The field of algebraic integrals of equations of motion of a complex mechanical system

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Criteria for the existence of certain types of algebraic first integrals of the equation of motion of a mechanical system of variable mass composition and variable configuration are given. The carrier body of the system (base body) rotates around a fixed pole in a stationary homogeneous gravity field under the influence of specified nonstationary forces. The types of partial integrals are indicated and restrictions are established that determine their existence.

Keywords: *Algebraic integral; criterion for the existence of a particular integral; integrability of a dynamic system; complex mechanical system.*