УДК 531.381; 531.395

Об алгебраических интегралах уравнений движения сложной механической системы

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Приводятся критериальные условия существования некоторых видов алгебраических первых интегралов уравнений движения механической системы переменного состава массы и изменяемой конфигурации. Тело-носитель системы (базовое тело) вращается вокруг неподвижного полюса в стационарном однородном поле силы тяжести под воздействием заданных нестационарных сил. Указаны виды частных интегралов и установлены ограничения, определяющие их существование.

Ключевые слова: *алгебраический интеграл; критерий существования частного интеграла; интегрируемость динамической системы; сложная механическая система.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-29-36

1. Предварительные положения

Предполагается, что *сложная механическая система* (СМС) [1, 2] движется так, что ее неизменяемая твердая основа (база) вращается вокруг определенного неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}\,(t)$ $(t \in T \equiv [0, +\infty))$.

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O: неподвижный Γ_1; базис Γ_2, неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 $(O x_1 x_2 x_3)$, оси $O x_j$ $(j = 1,2,3)$ которого для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \mathrm{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r\,(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j\,(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}\,(t)$ известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r\,(t)$, $\mathbf{J}\,(t)$, отнесенные к базису Γ_3, считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил* [2], обусловленных переносом рабочего тела [2] из некоторой области Θ, принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}\,(t)$. Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in T$ определяется как

$$\mathbf{L}\,(t) = \int_\Theta \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u})\, dV \qquad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области Θ; $\mathbf{u}(t)$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из Θ; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор точки этой области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}\,(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \qquad (2)$$
$$\boldsymbol{\Omega}\,(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \qquad (1, 2, 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3; $\mathbf{G}\,(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний − относительно базиса Γ_2); $\boldsymbol{\lambda}\,(t)$ − эффективная угловая скорость базиса Γ_2; $A_j\,(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ − главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3. Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t), \mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [2]; каждый из них задан программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на заданные управляющие параметры, являются *управляющими связями.* Здесь и далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3. Величины с данными индексами, находящимися при компонентах векторов, относятся к проекциям этих векторов на координатные оси Ox_j $(j = 1, 2, 3)$.

Пусть $M\ (t)$ − величина массы СМС в момент времени t; g − стандартное значение ускорения силы тяжести; $\mathbf{s}\ (s_1, s_2, s_3)$ − орт, неизменно связанный с базисом Γ_1 такой, что $\mathbf{g} = -\,g\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t), r_j(t)$ − радиус-вектор центра тяжести системы и его ортогональные декартовы координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 $(j = 1, 2, 3)$.

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется системой уравнений типа Жуковского–Пуассона [1]:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + (\mathbf{s} \times \mathbf{k}), \\ \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где вектор-момент $\mathbf{L}\ (L_1, L_2, L_3)$ определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ − характерный вектор, определяемый равенством (2).

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции СМС, определяемые базисом Γ_3, принимают вид [1, 2]

$$\begin{gathered}\dot{G}_j + \Phi_j = L_j + k_{j+2}s_{j+1} - k_{j+1}s_{j+2}, \\ \dot{s}_j + \Omega_{j+1}s_{j+2} - \Omega_{j+2}s_{j+1} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

$(j = 1, 2, 3),$

$$\Phi_j = m_j G_{j+1}G_{j+2} + \lambda_{j+1}G_{j+2} - \lambda_{j+2}G_{j+1},$$

$$\Omega_j = A_j^{-1}G_j + \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Система уравнений (4), (5) при заданных программных структурно-динамических параметрах СМС является детерминированной многопараметрической системой эволюционного типа, аналитически замкнутой относительно переменных $V = \{G_j, s_j\}$.

Вопрос об интегрируемости в квадратурах данной системы уравнений сводится к проблеме существования дополнительного по Е. Уиттекеру [4] независимого интеграла. Если этот интеграл существует и объединенная система, составленная из общих первых интегралов и присоединенного к ним дополнительного интеграла, на некотором симплектическом многообразии находится в инволюции, то данная система уравнений *интегрируема по Буру–Лиувиллю*.

В силу этого данный вопрос приводит к задаче о нахождении независимого первого интеграла данной системы уравнений, дополнительного к системе общих интегралов, если он существует. Каждый из независимых дополнительных интегралов данной системы уравнений явно зависит от определенной части переменных множества V. В частности, аналог классического интеграла Лагранжа (линейный интеграл уравнений движения СМС) [2, 5] − от одной переменной G_j; аналог интеграла Эйлера [2, 6] − от трех переменных G_j; аналоги интегралов Ковалевской [3] и Горячева [7] − от четырех переменных G_j, s_k $(j, k = 1, 2, 3)$. Аналогичные случаи зависимости от части переменных множества V имеют место и для аналогов линейных интегралов Гесса [2] и Гриоли [2, 8].

В связи с этим *ставится задача:* на многообразии возможных значений $W(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ определить структурно-динамические ограничения и управляющие связи, при реализации которых для системы уравнений (4), (5) на заданном гладком многообразии существует независимый алгебраический первый интеграл $F(\mathbf{G}, \mathbf{s}) \in C^2$, определенный в области $(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ фазового пространства, и находящийся в инволюции с общими интегралами данной системы. □

Такая постановка задачи предполагает существование k независимых дополнительных первых интегралов, каждый из которых может быть определен в соответствующей подобласти $D_k \subset D$.

Поскольку каждый из дополнительных интегралов системы уравнений (4), (5), как частный интеграл, может существовать лишь при определенных структурно-динамических и начальных условиях, данную задачу следует рассматривать как задачу нахождения элементов *интегрального многообразия* динамической системы в предположении, что это многообразие заведомо не является пустым.

2. Задача о существовании дополнительных интегралов

Рассмотрим решение поставленной выше задачи в классе однозначных алгебраических функций $\mathrm{C}^2(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ и составим основное (базовое) уравнение, порождающее дополнительные первые интегралы динамической системы (4), (5). Представим искомые интегралы в общем виде:

$$F(t; G_1, G_2, G_3; s_1, s_2, s_3) = h, \tag{6}$$

где F – алгебраическая функция заданных переменных, h − постоянная интегрирования.

Как известно [4], критериальным условием существования первого интеграла (6) данной системы уравнений является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора) от функции F и гамильтониана данной системы, заданных на симплектическом многообразии. Согласно этому имеем

$$(\nabla_{\mathbf{G}} F \bullet \dot{\mathbf{G}}) + (\nabla_{\mathbf{s}} F \bullet \dot{\mathbf{s}}) = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) в силу уравнений системы (4), (5) является тождеством, выполняющемся при определенных ограничениях, наложенных на структурно-динамические параметры данной системы. Эти ограничения и определяют искомые случаи существования дополнительных первых интегралов вида (6) для исходной системы уравнений.

Следует ожидать, что искомые интегралы, если они существуют, явно зависят лишь от части переменных, содержащихся в равенстве (6). Такая закономерность, в частности, имеет место в классических случаях интегрируемости для твердого тела, движущегося в однородном поле силы тяжести [4].

Равенство (7) в силу уравнений системы (3) является тождеством по всем переменным G_j и по любым двум переменным s_j.

Выражение (7) в силу соотношения (6) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} F_t + \sum_{j=1}^{3} \; [(L_j + k_{j+2} s_{j+1} - k_{j+1} s_{j+2} - \\ - \Phi_j)\, p_j + \Omega_{j+2} s_{j+1} - \Omega_{j+1} s_{j+2})\, q_j] = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где обозначено

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t},\; p_j = \frac{\partial F}{\partial G_j}, q_j = \frac{\partial F}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Соотношение (8) является тождеством по всем переменным G_j и по любым двум переменным s_j, удовлетворяющемся при определенных заданных структурно-динамических условиях, наложенных на параметры системы уравнений (4), (5). Совокупность этих условий составляет критериальный признак существования данного первого дополнительного интеграла.

Рассмотрим возможные случаи решения поставленной задачи.

3. Интеграл с одной переменной

Пусть дополнительный интеграл (6) имеет вид[1]

$$F(t; G_3) = h. \tag{9}$$

Тогда соотношение (8), принимающее форму

$$K + (k_3 s_2 - k_2 s_3 - \Phi_1)\, p_1 = 0,$$

тождественно удовлетворяется при структурно-динамических ограничениях:

$$A_1 = A_2,\;\; r_1 = r_2 = 0,\;\; r_3 \neq 0, \tag{10}$$

$$G_j^r = A_j \omega_j^r \leftrightarrow \lambda_j = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{11}$$

и присоединенном к ним условии

$$K(p_1) \equiv F_t + p_1 L_1 = 0. \tag{12}$$

Ограничению (12) удовлетворяет обобщенный аналог классического *интеграла Лагранжа* [2]:

$$G_3(t) = G_3^0 + \int_0^t L_3(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

непосредственно следующий из системы уравнений (4), (5) при условиях (10), (11). Следовательно, дополнительный первый интеграл вида (9) может являться только линейным по G_3 интегралом (13), обусловленным структурой заданных ограничений (10), (11).

Если дополнительный первый интеграл (6) задан в виде

$$F(t; s_3) = h, \tag{14}$$

то из соотношения (8) следует:

---

[1] Равенство (9) здесь рассматривается как интеграл-представитель совокупности интегралов вида $F(t; G_j) = h$ (j = 1, 2, 3).

$$F_t + [(a_2 G_2 + \lambda_2) s_1 - (a_1 G_1 + \lambda_1) s_2] q_3 = 0.$$

Здесь и всюду далее обозначено $a_j = A_j^{-1}$ (j = 1, 2, 3). Это равенство не может являться тождеством по переменным G_1, G_2 и, следовательно, интеграл вида (14) не существует.

Таким образом, первый дополнительный интеграл, зависящий только от одной из переменных G_j, s_j, может являться лишь обобщенным аналогом интеграла Лагранжа (13).

4. Интеграл с двумя переменными

Для первого дополнительного интеграла (6), представленного в виде

$$F(t; G_1, G_2) = h \tag{15}$$

из соотношения (8) следует:

$$R(p_1, p_2) - [(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + (m_2 G_1 - \lambda_1) p_2] G_3 + k_3 (p_1 s_2 - p_2 s_1) + (k_1 p_2 - k_2 p_1) s_3 + \lambda_3 (p_1 G_2 - p_2 G_1) = 0,$$

где выражение для величины R определяется равенством (23).

Приведенное равенство удовлетворяется тождественно по переменным G_3, s_1, s_2, если имеют место условия:

$$\begin{gathered} N(p_1, p_2) \equiv (m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + (m_2 G_1 - \lambda_1) p_2 = 0, \\ p_j r_3 = 0 \quad (j = 1, 2), \ p_2 r_1 - p_1 r_2 = 0, \\ R(p_1, p_2) + \lambda_3 (p_1 G_2 - p_2 G_1) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Из равенств (16) для $t \in T$ следует:

$$r_3(t) = 0, \tag{17}$$

а система уравнений относительно ненулевых величин p_1, p_2, составленная из первого и четвертого равенств (16), приводит к соотношению

$$m_1 r_1 G_2 + m_2 r_2 G_1 + \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2 = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) в классе программных структурно-динамических ограничений выполняется при любых значениях G_1, G_2, если

$$m_j r_j = 0 \quad (j = 1, 2), \ \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2 = 0. \tag{19}$$

При этом последнее условие (19) эквивалентно управляющей связи:

$$(G_2^r - A_2 \omega_2^r) r_1 - f (G_1^r - A_1 \omega_1^r) r_2 = 0, \tag{20}$$

где $f = a_1 A_2$, реализующейся при условии параллельности вектора $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{k}$ главной плоскости инерции Ox_1x_2.

Из структурных условий (17), (19) вытекают следующие случаи существования первого интеграла вида (15), относящиеся к классу заданных программных ограничений.

● Случай *центральной структурной симметрии* СМС, определяемый условием

$$\mathbf{J}(t) = A(t)\mathbf{E}, \tag{□}$$

где A (t) − заданная функция класса C^0, $\mathbf{E}$ − единичная матрица.

● Аналог классического *случая Эйлера*, соответствующий для $t \in T$ ограничению

$$\mathbf{r}_C [r_1(t) \ r_2(t) \ r_3(t)]^T = 0, \tag{21}$$

применяемому совместно с условием полной стабилизации центра масс СМС для значений $t \in T = [0, +\infty)$ [2].

● Случай осевой структурной симметрии системы, при которой ее центр масс расположен на главной оси инерции, совпадающей с соответствующей осью кинетической симметрии. В этом случае для $t \in T$ выполняется одна из групп следующих условий:

$$A_j(t) = A_3(t), \ r_j(t) = r_3(t) = 0 \ (j = 1, 2). \tag{22}$$

Согласно четвертому условию (16), для группы (22) при j = 1 получаем $r_2(t) = 0$, а для условий при j = 2 имеем r_1 (t) = 0. Следовательно, в силу ограничения (21), третий случай содержится во второй позиции как частный случай. Управляющая связь (20), являющаяся ограничением только в первом случае, принимает вид

$$r_1 G_2^r - r_2 G_1^r = 0.$$

Последнее условие (16) в первых двух случаях приводит либо к режиму движения с программным управлением, либо к движению на сервосвязи и представимо в виде

$$R(p_1, p_2) \equiv F_t + p_1 L_1 + p_2 L_2 = 0. \tag{23}$$

Структурно-динамические условия (19), вытекающие из соотношения (18), можно ослабить, если интеграл (15) является линейным интегралом вида

$$F(t; G_1, G_2) \equiv f_1 G_1 + f_2 G_2 = h, \tag{24}$$

где f_1, f_2 − заданные функции класса C^0 (T), причем $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$.

Действительно, если $f_1 \neq 0$, то в силу равенства (18) вместо условий (19) имеем

$$\begin{aligned} &m_1 f_1 r_1 - m_2 f_2 r_2 = 0, \\ &(\lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2) f_1 + h m_2 r_2 = 0. \end{aligned} \qquad (25)$$

Если положить $\mathbf{f}(t) = \mathbf{r}_C(t)$, то из ограничений (25) следуют условия, характерные для аналога *интеграла Гесса* [2]:

$$m_1 r_1^2 - m_3 r_3^2 = 0 \ \ (m_1 m_3 > 0,\, r_1 \neq 0),$$

$$\lambda_3 r_1 - \lambda_1 r_3 - h m_3 r_1^{-1} r_3 = 0,$$

а также сопряженные им условия [2].

Таким образом, случаи существования интеграла вида (15) в классе программных ограничений сводятся к первым двум приведенным ранее представлениям и к обобщенному аналогу случая Гесса.

В классе линейных однородных G_j-ограничений, из соотношения (18) вместо первых двух равенств (19) следует соотношение

$$m_1 r_1 G_2 + m_2 r_2 G_1 = 0.$$

Помимо линейной формы (24) интеграл вида (15) реализуется в квадратичном виде

$$a_1 G_1^2 + a_2 G_2^2 + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = h$$

при наличии определенных ограничений, налагаемых на структурно-динамические параметры СМС [2, 9].

Если дополнительный интеграл (6) имеет вид

$$F(t; G_1, s_1) = h, \qquad (26)$$

то, в силу соотношения (8), получаем

$$\begin{aligned} &K(p_1) - (k_2 p_1 + \Omega_2 q_1) s_3 + \\ &+ [a_3 s_2 q_1 - (m_1 G_2 + \lambda_2) p_1] G_3 + \\ &+ \lambda_3 p_1 G_2 + (\lambda_3 q_1 + k_3 p_1) s_2 = 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

Поскольку соотношение (27) является тождеством по переменной s_3, то имеем равенство $k_2 p_1 + (a_2 G_2 + \lambda_2) q_1 = 0$, являющееся тождеством по переменной G_2. В силу этого имеем $q_1 \equiv 0$ и интеграл (26) принимает вид интеграла с одной переменной.

Если интеграл (6) имеет вид

$$F(t; G_1, s_2) = h, \qquad (28)$$

то, согласно соотношению (28), из равенства (8) следует

$$\begin{aligned} &K(p_1) + (\Omega_1 q_2 - k_2 p_1) s_3 - \\ &-[(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + a_3 s_1 q_2] G_3 + \\ &+ k_3 s_2 p_1 + \lambda_3 (p_1 G_2 - s_1 q_2) = 0. \end{aligned} \qquad (29)$$

Так как равенство (29) является тождеством по переменным G_3, s_1, то отсюда имеем

$$(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + a_3 s_1 q_2 = 0,$$

откуда следует $q_2 \equiv 0$ и интеграл (28) принимает вид интеграла с одной переменной.

В случае, при котором интеграл (6) представлен в виде

$$F(t; G_1, s_3) = h, \qquad (30)$$

соотношение (8) приводится к форме

$$\begin{aligned} &K(p_1) + [(\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + a_2 s_1 q_3] G_2 + \\ &+ (k_3 p_1 - \Omega_1 s_2 q_3) s_2 - k_2 s_3 p_1 + \\ &+ \lambda_2 (s_1 q_3 - p_1 G_3) = 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

Поскольку равенство (31) является тождеством по переменным G_2, s_1, то отсюда

$$(\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + a_2 s_1 q_3 = 0,$$

в силу чего имеем $q_3 \equiv 0$. Таким образом, и в этом случае интеграл вида (30) приводится к форме интеграла с одной переменной.

В случае, при котором интеграл (6) задан в виде

$$F(t; s_1, s_2) = h, \qquad (32)$$

соотношение (8) приводит к условию

$$\begin{aligned} &F_t + (a_1 q_2 G_1 - a_2 q_1 G_2) s_3 + \\ &+ a_3 (s_2 q_1 - s_1 q_2) G_3 + (\lambda_3 s_2 - \lambda_2 s_3) q_1 + \\ &+ (\lambda_1 s_3 - \lambda_3 s_1) q_2 = 0, \end{aligned}$$

являющемуся тождеством по переменной G_j (здесь индекс j фиксирован). Отсюда следует, что $q_1 = q_2 \equiv 0$ и, следовательно, интеграл вида (32) для данной системы не существует.

Таким образом, из первых дополнительных интегралов системы уравнений (4), (5), содержащих две из величин G_i, s_j, существует только интеграл вида (15).

5. Интеграл с тремя переменными

Пусть интеграл (6) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, G_3) = h. \qquad (33)$$

Тогда соотношение (8) приводит к равенству

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}) + V = 0, \qquad (34)$$

где обозначено

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} - \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G},$$

$$V = (\mathbf{k} \times \mathbf{p})\mathbf{s}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(p_j).$$

Соотношение (34) является тождеством по переменным s_1, s_2. Выражая из тривиального интеграла $\|\mathbf{s}\|^2 = 1$ величину s_3, разложим это выражение в ряд Маклорена по переменным s_1, s_2 и подставим в равенство (34). В результате, применяя стандартный прием [10] и полагая $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\Phi_j) = (M\mathbf{r}_C \times \mathbf{p})$, получим

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}) + g\Phi_3 = 0, \ \Phi_1 = \Phi_2 = 0. \quad (35)$$

Рассмотрим равенства (35) как систему алгебраических уравнений относительно величин p_1, p_2, p_3 с определителем

$$D = Br_3 \quad (B = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_C), \quad (36)$$

и выделим случаи, при которых $D = 0$. Это условие выполняется, если $B \neq 0$,

$$r_3(t) = 0 \quad (t \in T), \quad (37)$$

и при $r_3 \neq 0$ в случае, когда $B = 0$.

В классе программных структурно-динамических ограничений последнее условие выполняется при произвольных возможных значениях G_j, если выполняются условия:

$$(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{L}) = 0, \quad (38)$$

$$P\mathbf{r}_C = 0, \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_C = 0, \quad (40)$$

где P − проектор-оператор такой, что выполняется равенство $P\mathbf{r}_C = P\mathbf{r}_C(m_j r_j)$.

В силу условия $r_3 \neq 0$ из соотношения (39) следует, что к ограничениям (38), (40) следует присоединить либо условие (□), либо ограничения типа (22). Каждый из этих случаев соответствует структурной симметризации по Лагранжу [2], реализуемой на управляющих связях (38), (40). При этом связь (38) для условий типа (22) реализуется на управлении $L_3 = 0$, а ограничение (40) − при условии (□) будет $\mathbf{r}_C \times \mathbf{G}^r = 0$, тогда как при условиях типа (22) эта связь реализуется на управлении $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Согласно соотношениям $\Phi_j = 0$ (35) при условиях типа (22) получаем $p_j r_3 = 0$ (j = 1, 2), в силу чего интеграл (33) принимает вид интеграла с одной переменной, соответствующей интегралу типа Лагранжа (13).

Если выполняется условие (37), то равенства $\Phi_j = 0$ (35) переходят в соотношения $p_3 r_j = 0 \ (j = 1, 2)$ и тождественно удовлетворяются либо при ограничении (21), либо при $p_3 = 0$, когда интеграл (33) приводится к виду (15).

В случае, при котором интеграл (33) имеет автономную форму

$$F(G_1, G_2, G_3) = h, \quad (41)$$

интеграл (41) в классе программных ограничений существует либо в режиме с условием (21), либо при ограничении (□) на управляющих связях (38), (40).

Пусть теперь $F_t \neq 0$, $D \neq 0$. Тогда в силу соотношений (35), (36) имеем

$$\mathbf{p} = -B^{-1} F_t \mathbf{r}_C \quad (42)$$

и согласно равенству (42) если хотя бы одна из величин $r_j \equiv 0$ (j = 1, 2, 3), то интеграл (33) принимает вид (15). В силу этого для дальнейшего положим $\rho = r_1 r_2 r_3 \neq 0$.

В классе детерминированных программных ограничений первое из условий (35) тождественно удовлетворяется, если

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) + g\Phi_3 = 0, \quad (43)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{p} = 0, \quad P\mathbf{p} = 0. \quad (44)$$

Согласно равенству (42) из последнего соотношения (44) следует условие (□), а из первого равенства (44) получаем ограничение (40). При этом $\mathbf{\Phi} = 0$, в силу чего условия $\Phi_j = 0$ (35) тождественно удовлетворяются и равенство (43) принимает вид

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) = 0. \quad (45)$$

Таким образом, в случае, при котором $F_t \neq 0$, $\rho \neq 0$, для существования интеграла вида (33) в классе программных структурно-динамических ограничений необходимо, чтобы выполнялось условие (□), а также условия (40), (45).

Интеграл вида

$$F(t; s_1, s_2, s_3) = h, \quad (46)$$

независимый по отношению к тривиальному интегралу, не существует, поскольку, если допустить обратное, то интеграл (46) в силу тривиального интеграла приводится к форме интеграла с двумя переменными (32).

Пусть интеграл (6) задан в виде

$$F(t; G_1, s_2, s_3) = h. \quad (47)$$

Тогда соотношение (8) представляется в виде

$$K(p_1)+[(\lambda_3-m_1G_3)p_1+a_2s_1q_3]G_2-$$
$$-(\lambda_2 p_1+a_3s_1q_2)G_3+(\lambda_2q_3-\lambda_3q_2)s_1+ \quad (48)$$
$$+(k_3p_1-\Omega_1q_3)s_2-(k_2p_1-\Omega_1q_2)s_3=0.$$

Поскольку равенство (48) является тождеством по переменным G_2, G_3, то из первого условия

$$(\lambda_3-m_1G_3)p_1+a_2s_1q_3=0,$$
$$\lambda_2 p_1+a_3s_1q_2=0 \quad (49)$$

следует $A_2 = A_3$, в силу чего система (49) принимает вид

$$A_2\lambda_j p_1+s_1q_j=0 \quad (j=2,3). \quad (50)$$

Условие (48) не налагает ограничений на величины G_1, s_2, s_3 с учетом равенств (50), когда имеют место условия

$$r_j(t)=0, \quad \lambda_j(t)=0 \ (j=2,3) \quad (51)$$

и выполняется условие (12). Присоединяя к этим ограничениям условие $A_2 = A_3$, убеждаемся в том, что полученная система соотношений характеризует обобщенную структурно-динамическую симметризацию типа Лагранжа с приведением интеграла (47) к виду интеграла с одной зависимой переменной.

Действительно, в силу λ-условий (51) при $p_1s_1\neq 0$ из системы условий (50) следует $q_2=q_3\equiv 0.$ К интегралу (47) в силу тривиального интеграла приводятся интегралы вида

$$F(t;G_1,s_1,s_j)=h_j \quad (h_j=\text{const},\ j=2,3),$$

однотипные с интегралом (47).

Аналогичным образом устанавливается, что не существует дополнительных первых интегралов указанного типа, в которых переменная G_1 заменяется последовательно на G_2 и на G_3.

Если интеграл (6) задать в виде

$$F(t;G_1,G_2,s_1)=h \quad (52)$$

и обозначить

$$Q=R-NG_3+\lambda_3(p_1G_2-p_2G_1)+$$
$$+(k_1p_2-k_2p_1)s_3,$$

где N, R определяются равенствами (16), (23), соответственно, то, согласно выражению (52), равенство (8) примет вид

$$Q+(\Omega_3q_1+k_3p_1)s_2-\Omega_2q_1s_3-k_3p_2s_1=0.$$

Поскольку это равенство является тождеством по переменным G_3, s_2, то имеем

$$(a_3G_3+\lambda_3)q_1+k_3p_1=0,$$

в силу чего $q_1\equiv 0$ и интеграл (52) приводится к виду (15) или, если $r_3\neq 0$, к виду интеграла с одной зависимой переменной.

В случае, при котором интеграл (6) задан в виде

$$F(t;G_1,G_2,s_2)=h, \quad (53)$$

условие его существования согласно равенству (8) выражается в форме

$$Q-(\Omega_3q_2+k_3p_2)s_1+k_3p_1s_2+\Omega_1q_2s_3=0$$

и является тождеством по переменным G_3, s_1. В силу этого из уравнения

$$(a_3G_3+\lambda_3)q_2+k_3p_2=0$$

следует $q_2\equiv 0.$ Следовательно, интеграл (53) приводится к виду интеграла (15) или, если $r_3\neq 0,$ к виду интеграла с одной зависимой переменной.

Рассматривая интеграл (6) в виде

$$F(t;G_1,G_2,s_3)=h \quad (54)$$

и применяя стандартный прием [10], приведем этот интеграл к форме

$$F(t;G_1,G_2,s_1,s_2)=h, \quad (55)$$

относящейся к интегралу с четырьмя заданными зависимыми переменными. Исследование существования дополнительных интегралов вида (55) является предметом отдельного рассмотрения.

Аналогичным образом проводится анализ и для интегралов, идентичных формам (52)−(54), в которых пара переменных (G_1, G_2) заменена парами (G_1, G_3), (G_2, G_3).

Заключение

Таким образом, первый дополнительный алгебраический интеграл системы уравнений (4), (5) с тремя зависимыми переменными в классе программных структурно-динамических ограничений существует: в форме (41) − для обобщенного аналога классического случая Эйлера (21) или при центральной структурной симметрии СМС, определяемой условием (□), а в форме (33) − при шаровой кинетической симметрии системы. Обе эти формы реализуются на специальных управляющих связях. В частности, такими интегралами являются линейный и квадратичный по G_j интегралы.

Исключая интеграл в форме (54), приводимый к виду (55) и в дальнейшем рассматриваемый отдельно, заключаем, что для системы уравнений (4), (5) дополнительные первые интегралы других видов с числом зависимых переменных меньше четырех не существуют.

Аналогичная задача для не изменяемого по величине массы и конфигурации абсолютно твердого тела постоянного состава в традиционно принятых для классической механики постановке и предпосылках рассмотрена в монографии [10].

Список литературы

1. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого гиростата переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т, Пермь, 1976. С. 99−104.
2. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политехн. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03. 89, № 1656-В89.
3. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 22−30.
4. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
5. *Макеев Н.Н.* О существовании первых интегралов движения управляемого гиродина // Дифференциальные уравнения и теория функций: сб. науч. тр. / Саратовский ун-т. Саратов, 1984. С. 58−64.
6. *Макеев Н.Н.* О некоторых движениях гиростата переменной массы в случае типа Эйлера // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 1974. Вып. 6. С. 71−78.
7. *Макеев Н.Н.* Интеграл Горячева для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 31−39.
8. *Макеев Н.Н.* Интеграл Гриоли для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 41−49.
9. *Макеев Н.Н.* Линейный и квадратичный интегралы сложной системы / Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 86 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03.89, № 1657-В 59.
10. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328.

On algebraic integrals of equations of motion of a complex mechanical system

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Criteria for the existence of certain types of algebraic first integrals of the equation of motion of a mechanical system of variable mass composition and variable configuration are given. The carrier body of the system (base body) rotates around a fixed pole in a stationary homogeneous gravity field under the influence of specified nonstationary forces. The types of partial integrals are indicated and restrictions are established that determine their existence.

Keywords: *algebraic integral; criterion for the existence of a particular integral; integrability of a dynamic system; complex mechanical system.*